УДК 514.74

ВОЗВРАЩЕНИЕ К ИСТОКАМ. ТРИГОНОМЕТРИЯ. Ч. 1

С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, Е.С. Бурова

В последнее время при преподавании тригонометрии ее обычно рассматривают как раздел математики, в котором исследуются свойства тригонометрических функций. Соответственно, распространена точка зрения, согласно которой тригонометрия нужна только математикам и тем, кто работает в сильно математизированных отраслях науки. Однако это неправильный взгляд. Тригонометрия возникла и является инструментом, помогающим решать задачи, с которыми человек сталкивается в повседневной жизни. Поэтому, считаем правильным использовать подход, опирающийся на практическом применении тригонометрии. В данной работе мы постарались показать, как можно естественным путем прийти к тригонометрическим функциям.

Ключевые слова: теорема Фалеса; подобные треугольники; отношение длин сторон треугольников; синус, тангенс.

БАШТАЛГЫЧ БУЛАКТАРГА КАЙРЫЛУУ. ТРИГОНОМЕТРИЯ. 1-БӨЛҮК

С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, Е.С. Бурова

Акыркы жылдарда тригонометрияны окутууда, аны тригонометриялык функциялардын касиеттерин иликтеген математиканын бир бутагы деп эсептеген көз караш кеңири тараган. Ага ылайык тригонометрия математиктерге жана математиканы жогорку деңгээлде колдонгон адамдар үчүн гана зарыл деген көз караш келип чыгат. Бирок бул туура эмес. Тригонометрия адамдын күнүмдүк жашоосунда туш болгон маселелерди чечүү үчүн жаралган курал. Ошондуктан, биз, тригонометрияны практикалык колдонууга негизделген мамилени туура деп эсептейбиз. Бул макалада биз табигый жол менен тригонометриялык функцияларга кантип келсе болоорунун жолун көрсөтүүгө аракет кылдык.

Түйүндүү сөздөр: Фалес теоремасы; окшош үч бурчтуктар; үч бурчтуктардын жактарынын узундуктарынын катышы; синус; тангенс.

BACK TO THE ROOTS. TRIGONOMETRY. P. 1

S.K. Kydyraliev, A.B. Urdaletova, E.S. Burova

In modern times, when teaching trigonometry, it is usually considered as a branch of mathematics in which the properties of trigonometric functions are studied. Therefore, the point of view is widespread, according to which trigonometry is needed only by mathematicians and those who work in highly mathematical branches of science. However, this is the wrong approach. Trigonometry has arisen and is a tool to help solve problems that a person faces in everyday life. Therefore, we believe it is correct to use an approach based on the use of trigonometry. In this paper, we tried to show how to naturally come to trigonometric functions.

Keywords: Thales theorem; similar triangles; aspect ratio of the sides of the triangles; sine; tangent.

Если современному хорошему старшекласснику задать вопрос, что такое синус, то, скорее всего, он будет говорить: “синус – это периодическая функция, с периодом два пи, значения которой меняются в пределах от минус один до плюс один …”. В то же время, подавляющее большинство выпускников школы не в состоянии решить простые геометрические задачи с использованием тригонометрических функций.

Мы считаем, что в современной школьной программе по математике, доставшейся в наследство от прежней системы преподавания, имеет место неправильный подход при изучении этого предмета [1]. Конечно, все, о чем говорится в современных учебниках о тригонометрии правильно, но все это в дальнейшем пригодится, максимум, 5 % учащихся. Нужно делать упор на прикладных аспектах ее применения.

В связи с этим, у нас возникли любопытные ассоциации с эпизодом из хорошего американского фильма “Скрытые фигуры”, 2016 [2]. Одной из главных тем фильма является соперничество СССР и США в начале освоения космоса. Один из героев фильма, обращаясь к своим подчиненным говорит: “Мы их (советских) конечно победим. Ведь они даже не умеют делать хорошие холодильники”. Как известно, в той гонке американцы проиграли. По всей видимости, свою роль сыграли те самые 5 %, для которых писались учебники.

Томас Пейн в своей книге “Век Разума” (1794) [3] назвал тригонометрию “душой науки”.

Слово “тригонометрия” греческого происхождения. В переводе на русский язык оно означает “измерение треугольников”. Как и все другие разделы математики, зародившиеся в глубокой древности, тригонометрия возникла в результате попыток решить те задачи, с которыми человеку приходилось сталкиваться на практике. Среди таких задач следует прежде всего назвать задачи землемерия и астрономии.

Зачатки тригонометрии можно найти в математических рукописях древнего Египта, Вавилона и древнего Китая. 56-я задача из папируса Ринда (II тысячелетие до н. э.) предлагает найти наклон пирамиды, высота которой равна 250 локтей, а длина стороны основания – 360 локтей.

Огромный вклад в развитие тригонометрии в IX–X вв. внесли среднеазиатские ученые. Благодаря трудам ал-Хорезми, ал-Марвази, ал-Фараби, ал-Баттани, Абу-л-Вафа, наряду с известными ещё индийцам синусом и косинусом, в математике появились новые тригонометрические функции: тангенс, котангенс, секанс и косеканс.

По всей видимости, первое знакомство европейцев с современной тригонометрией состоялось благодаря книге по астрономии и тригонометрии великого ученого ал-Хорезми, два перевода которого европейцы выполнили в XII веке [4].

Мы считаем, что тригонометрию правильно изучать, следуя истории развития этого важнейшего раздела математики. В начале, опираясь на подобие треугольников [5], показать, что значения тригонометрических функций есть отношения длин сторон прямоугольных треугольников. Далее, используя единичную окружность, перейти от острых углов к произвольным. И только после этого, возможно для продвинутых учеников, на школьных факультативах, подробно разбирать свойства тригонометрических функций.

Определение

Два треугольника подобны, если их углы равны.

Знак ~ используется для обозначения подобия. Математически подобие треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, записывается следующим образом: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$, (рисунок 1).

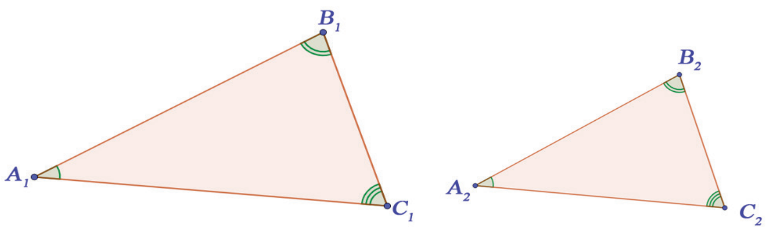

Рисунок 1 – Подобные треугольники

Задача

Подобны ли равнобедренные треугольники, если они:

а) имеют по равному тупому углу; b) имеют по равному острому углу; с) прямоугольные.

Решение

У равнобедренных треугольников два угла при основании равны друг другу.

а) Поэтому равнобедренный треугольник может иметь тупой угол только при вершине. Если он равен t, то углы при основании равны $(180° - t)/2$. Таким образом, если равнобедренные треугольники имеют равные тупые углы, то и остальные углы у них равны, и как следствие, они подобные.

b) Так как равнобедренные треугольники могут иметь острые углы как при вершине, так и при основании, наличие одного острого угла, равного углу другого треугольника недостаточно. Например, в первом треугольнике углы $50°, 50°, 80°$, а в другом, $50°, 65°, 65°$.

c) Прямой угол может быть только при вершине равнобедренного треугольника. Поэтому, такие треугольники подобны. Их углы: $45°, 45°, 90°$.

Терема (Свойство подобных треугольников)

Если два треугольника являются подобными, то отношения сторон одного треугольника к соответствующим сторонам другого треугольника равны между собой (рисунок 2):

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = k.$$

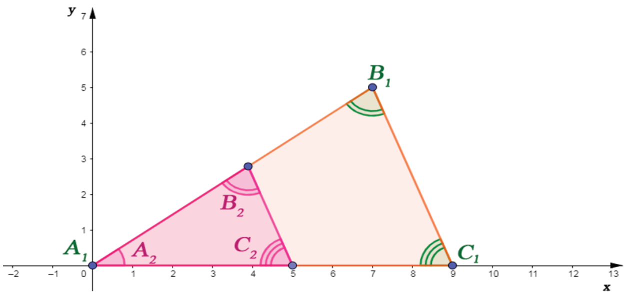

Рисунок 2 – Совмещенные подобные треугольники

Примечание. Число k называется коэффициентом подобия.

Доказательство

Если треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны, угол A_1 треугольника $A_1B_1C_1$ равен углу A_2 треугольника $A_2B_2C_2$. Совместим эти углы с началом координат, а стороны A_1C_1 и A_2C_2 расположим на оси OX. Тогда, стороны A_1B_1 и A_2B_2 расположатся на одной и той же прямой $y = kx$.

В силу равенства соответствующих углов, третьи стороны треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ расположатся на параллельных прямых $y = mx + b_1$ и $y = mx + b_2$.

Найдем координаты вершин треугольников. Точка C_1 – это точка пересечения прямой $y = mx + b_1$ с осью OX. Поэтому, из уравнения $0 = mx + b_1$ получаем координаты C_1: точка $C_1(-b_1/m;\ 0)$. Точно так же найдем, что $C_2(-b_2/m; 0)$. Так как первые координаты точек C_1 и C_2 равны длинам отрезков A_1C_1 и A_2C_2, их отношение: $(-b_1/m)/(-b_2/m) = b_1/b_2$.

Точка B_1 – это точка пересечения прямой $y = mx + b_1$ с прямой $y = kx$. Следовательно, в точке пересечения $mx + b_1 = kx$. Отсюда $B_1(b_1/(k-m); kb_1/(k-m))$. Так как вершина A_1 имеет координаты $(0;\ 0)$, длина стороны A_1B_1 равна:

$$\sqrt{\left(\frac{b_1}{k-m} - 0\right)^2 + \left(\frac{kb_1}{k-m} - 0\right)^2} = \frac{b_1}{k-m}\sqrt{1+k^2}.$$

Заменив $y = mx + b_1$ на $y = mx + b_2$ получим, что $B_2(b_2/(k-m); kb_2/(k-m))$ и

$$|A_2B_2| = \sqrt{\left(\frac{b_2}{k-m} - 0\right)^2 + \left(\frac{kb_2}{k-m} - 0\right)^2} = \frac{b_2}{k-m}\sqrt{1+k^2}.$$

Таким образом, так как $|A_1B_1|/|A_2B_2| = b_1/b_2$, доказана справедливость утверждения пункта а теоремы.

Вычислив отношение $|B_1C_1|/|B_2C_2|$, закончим доказательство теоремы. Для этого вычислим $|B_1C_1|$:

$$|B_1C_1| = \sqrt{\left(-\frac{b_1}{m} - \frac{b_1}{k-m}\right)^2 + \left(0 - \frac{kb_1}{k-m}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{kb_1}{m(k-m)}\right)^2 + \left(\frac{kb_1}{k-m}\right)^2} = \frac{kb_1}{m(k-m)}\sqrt{1+m^2} \text{ и } |B_2C_2|:$$

$$|B_2C_2| = \sqrt{\left(-\frac{b_2}{m} - \frac{b_2}{k-m}\right)^2 + \left(0 - \frac{kb_2}{k-m}\right)^2} = \frac{kb_2}{m(k-m)}\sqrt{1+m^2}.$$

Поскольку $|B_1C_1|/|B_2C_2| = b_1/b_2$, теорема доказана.

Задача

По рассказу Плутарха Херонейского, Фалес, будучи в Египте, поразил фараона Амасиса тем, что сумел точно установить высоту пирамиды.

Фалес определил высоту пирамиды, поместив в конечной точке отбрасываемой ею тени вертикальный шест [6]. Давайте и мы определим высоту Пирамиды Хеопса (Хуфу) – Великой пирамиды Гизы – единственной из “Семи чудес света”, сохранившейся до наших дней. Её возраст равен примерно 4500 лет [7].

Решение

Предположим, что шест Фалеса имел длину 0,8 м, длина его тени – 0,96 м. Фалес измерил длину тени пирамиды, которая равнялась 163,8 м (рисунок 3).

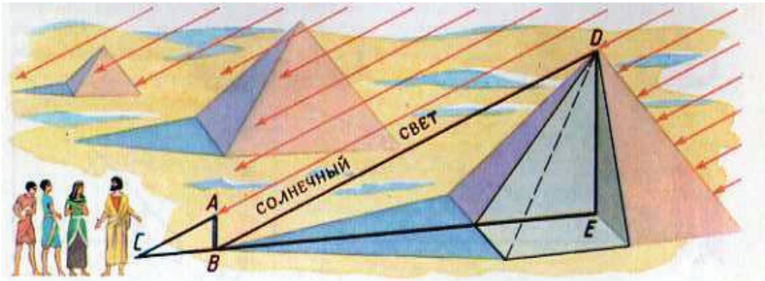

Рисунок 3 – Измерение высоты пирамиды

Судя по всему, Фалес знал, что длина тени пирамиды относится к длине тени шеста, как высота пирамиды к длине шеста. Поэтому, произведя необходимые измерения, он получил уравнение $163{,}8/0{,}96 = h/0{,}8$. Отсюда, $h = 163{,}8 \cdot 0{,}8/0{,}96 = 136{,}5$ метров. (Понятно, что в те времена пользовались другими единицами длины, но это не столь важно.)

Нетрудно установить, что справедливо и утверждение, обратное к теореме свойства подобных треугольников.

Терема (Признаки подобия треугольников)

Два треугольника являются подобными, если

a) угол одного треугольника равен углу другого, а отношения сторон одного треугольника, примыкающих к такому углу, к соответствующим сторонам другого треугольника равны между собой;

b) отношения сторон одного треугольника к соответствующим сторонам другого треугольника равны между собой (рисунок 4):

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = k.$$

Доказательство

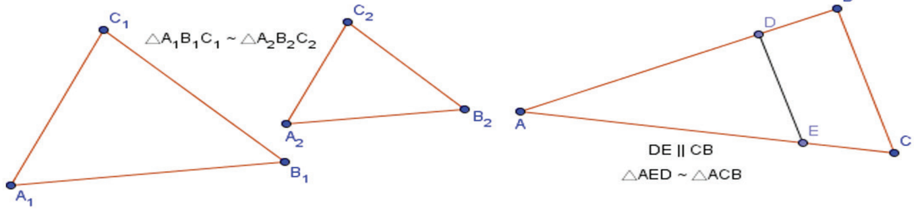

Рисунок 4 – Признаки подобия треугольников а) Пусть один угол треугольника $A_1B_1C_1$ равен углу треугольника $A_2B_2C_2$. Обозначим этот угол через *А* и наложим треугольники, как показано справа, на рисунке 4, с соответствующими переобозначениями вершин. Далее действуем по привычной схеме. Вводим систему координат, начало которой расположено в точке *А*, а ось ОХ направлена по стороне *АС*. Тогда, сторона *АВ* расположена на прямой $y = mx$. Соответственно, вершины треугольников имеют координаты: $A(0;\ 0), D(x_D; m{\cdot}x_D), B(x_B; m{\cdot}x_B)$, $C(x_C;0)$, $E(x_E;0)$, а длины сторон: $|AE| = x_E$; $|AC| = x_C$;

$$|AD| = \sqrt{(x_D)^2 + (mx_D)^2} = x_D\sqrt{1+m^2};\quad |AB| = \sqrt{(x_B)^2 + (mx_B)^2} = x_B\sqrt{1+m^2}.$$

По условиям задачи, $|AE|/|AC| = |AD|/|AB|$. Поэтому, $x_E / x_C = x_D / x_B$.

Теперь мы готовы доказать, что прямая DE параллельна BC. Для этого достаточно написать их уравнения в виде линейной функции и убедиться в том, что они имеют одинаковый наклон.

Итак, пусть $y = k_1x + b_1$ – уравнение прямой DE. Подставив координаты точек D и E, получим:

$$\begin{cases} mx_D = k_1x_D + b_1\ ; \\ 0 = k_1x_E + b_1\ ; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx_D = k_1x_D - k_1x_E\ ; \\ b_1 = -k_1x_E\ ; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = mx_D\ /\ (x_D - x_E)\ ; \\ b_1 = -k_1x_E\ . \end{cases}$$

Теперь определим коэффициенты функции $y = k_2x + b_2$ – уравнение прямой BC:

$$\begin{cases} mx_B = k_2x_B + b_2\ ; \\ 0 = k_2x_C + b_2\ ; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx_B = k_2x_B - k_2x_C\ ; \\ b_2 = -k_2x_C\ ; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_2 = mx_B\ /\ (x_B - x_C)\ ; \\ b_2 = -k_2x_C\ . \end{cases}$$

Итак, прямая *DE* параллельна *BC* если $x_D\ /\ (x_D - x_E) = x_B\ /\ (x_B - x_C)$.

Преобразуем соотношение: $1/(1 - x_E/x_D) = 1/(1 - x_C/x_B)$. Теперь, вспомнив о том, что по условию: $|AE|/|AC| = |AD|/|AB| \Leftrightarrow x_E / x_C = x_D / x_B$, получим, что $x_E / x_D = x_C / x_B$.

Отсюда по теореме о параллельных прямых и секущей, получаем равенство соответствующих углов, и как следствие, подобие треугольников.

b) Пусть хотя бы один угол одного треугольника равен углу другого треугольника. Тогда мы попадаем в условия пункта (а).

Если предположить, что нет равных углов, то один из углов треугольника $A_1B_1C_1$ больше соответствующего угла треугольника $A_2B_2C_2$. Увеличив прилегающие к этому углу стороны треугольника $A_2B_2C_2$ в k раз, и соединив концы, получим треугольник, третья сторона которого меньше, чем B_1C_1, что противоречит условиям теоремы.

Задача

а) В треугольнике $A_1B_1C_1$ имеет место отношение сторон: $|A_1B_1|/|A_1C_1| = n$. В подобном ему треугольнике $A_2B_2C_2$ сторона A_2C_2 имеет длину k. Чему равна длина A_2B_2?

b) В прямоугольном треугольнике один из углов равен 44°. В другом прямоугольном треугольнике один из углов равен 46°. Являются ли эти треугольники подобными?

Решение

а) Так как треугольники подобны: $\dfrac{A_1B_1}{A_2B_2} = \dfrac{A_1C_1}{A_2C_2}$. Поэтому, также верна и пропорция $\dfrac{A_1B_1}{A_1C_1} = \dfrac{A_2B_2}{A_2C_2}$. Отсюда получаем, что длина A_2B_2 равна kn.

b) Конечно, являются. Так как треугольники прямоугольные, сумма двух оставшихся углов равна $90° = 44° + 46°$.

Итак, указав один из острых углов прямоугольного треугольника, мы тем самым определяем все семейство подобных ему треугольников. В то же время, свойство подобных треугольников $\dfrac{A_1B_1}{A_2B_2} = \dfrac{A_1C_1}{A_2C_2} = \dfrac{B_1C_1}{B_2C_2}$ предопределяет шесть равенств между отношениями сторон треугольников, типа $\dfrac{A_1B_1}{A_1C_1} = \dfrac{A_2B_2}{A_2C_2}$.

Математики древности, осмыслив эти связи, сделали великое открытие – они связали величины углов треугольников с длинами их сторон! Давайте и мы сделаем это.

Итак, возьмем прямоугольный треугольник, один из острых углов которого равен α. Пусть катет, лежащий напротив этого угла, имеет длину a, катет, прилежащий к этому углу – длину b, а гипотенуза – длину c (рисунок 5).

Тогда, для всех прямоугольных треугольников с острым углом α – для всех треугольников подобных исходному – отношение длины катета, лежащего напротив этого угла, и длины гипотенузы будет равно a/c. Математики договорились называть это число синусом угла α и обозначать как $\sin\alpha$.

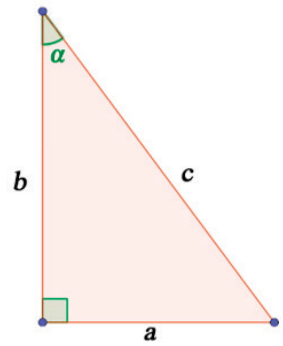

Рисунок 5 – Стороны прямоугольного треугольника

Упражнение

Нарисуйте треугольник со сторонами 3, 4, 5 см. (Надеемся, что Вы знаете, что это прямоугольный треугольник). Вычислите синус угла, лежащего напротив катета, длиной 3 см. Используйте транспортир и измерьте величину этого угла. Сформулируйте полученный результат.

Ответ. Согласно определению, синус угла – это отношение противолежащего катета к гипотенузе. В данном случае: $3/5 = 0{,}6$. Использовав транспортир, выясним, что этот угол чуть меньше 37°. Понятно, что на практике часто необходимы более точные значения. Вычислению таких значений математики затратили много времени и усилий. Так, обратившись к соответствующим таблицам, можем сказать, что синус угла 36,8699° приблизительно равен 0,6. Точно так же, как при выполнении этого упражнения, можно вычислить значения синусов любых углов. В результате, будет составлена таблица значений синуса.

Для того чтобы получить такие таблицы, великие ученые древности затратили несколько тысячелетий. И то, что сейчас представляется весьма обыденным, является одним из выдающихся достижений человечества.

Так же как мы ввели понятие синуса угла, можно определить значения и остальных тригонометрических функций.

Итак, для всех прямоугольных треугольников с острым углом α отношение длины катета, прилежащего к этому углу, и длины гипотенузы будет равно b/c. Это число называется косинусом угла α и обозначается как $\cos\alpha$. Нетрудно заметить, что катет b является противолежащим к углу, равному $90° - \alpha$.

Таким образом выяснилось, что $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$ и наоборот: $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$.

Получим еще одну формулу. Согласно теореме Пифагора, $a^2 + b^2 = c^2$. Разделив это равенство на c^2, получим: $a^2/c^2 + b^2/c^2 = 1$. Выше мы договорились обозначать отношение a/c как $\sin\alpha$, а b/c как $\cos\alpha$. Тогда: $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$.

Математики договорились записывать это равенство в виде $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, и называть основным тригонометрическим тождеством.

Далее рассмотрим отношение катетов. Для всех прямоугольных треугольников с острым углом α – отношение длины катета, лежащего напротив этого угла к длине катета, прилежащего к этому углу, будет равно a/b. Это число называется тангенсом угла α и обозначается: $\mathrm{tg}\alpha$. Так как $\sin\alpha = a/c$; $\cos\alpha = b/c$, получаем, что $a/b = (a/c)/(b/c)$, то есть $\mathrm{tg}\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$.

Оставшиеся отношения между длинами сторон треугольников являются обратными к уже рассмотренным.

Отношение b/a называется котангенсом угла α и обозначается как $\mathrm{ctg}\alpha$.

Понятно, что $\mathrm{ctg}\alpha = 1/\mathrm{tg}\alpha = \cos\alpha/\sin\alpha$.

Отношение c/a называется косекансом угла α и обозначается как $\mathrm{cosec}\alpha$.

Понятно, что $\mathrm{cosec}\alpha = 1/\sin\alpha$.

Отношение c/b называется секансом угла α и обозначается как $\sec\alpha$.

Понятно, что $\sec\alpha = 1/\cos\alpha$.

Замечание

В европейской и американской литературе тангенс, котангенс и косеканс угла α обозначаются $\tan\alpha,\ \cot\alpha,\ \csc\alpha.$ Итак, каждому углу можно сопоставить значения шести основных тригонометрических функций. Конечно, производить каждый раз измерения транспортиром довольно утомительно. Поэтому, давно уже составлены и используются таблицы тригонометрических функций. Эти таблицы содержатся в памяти современных компьютеров, калькуляторов и т. п.

Можно с гордостью отметить, что огромный вклад в составление таблиц тригонометрических функций внесли среднеазиатские ученые. В основе современных таблиц, которые используются во всем мире, лежат таблицы, составленные в Самаркандской обсерватории Улугбека в XV в. при непосредственном участии султана Улугбека. О точности этих таблиц можно судить по следующему факту: сотрудник этой обсерватории ал-Каши в одной из своих работ подсчитал, что $\sin 1^\circ \approx 0{,}017452406437283571$ (все цифры верны).

Литература

1. *Погорелов А.В.* Геометрия. 7–9 / А.В. Погорелов. М.: Просвещение, 2014. 240 с.
2. Скрытые фигуры. URL: https://www.kinopoisk.ru/film/skrytye-figury-2016-966036/ (дата обращения: 29.07.2019)
3. Paine Thomas. The Age of Reason / Thomas Paine // Dover Publications. 2004. С. 52.
4. *Шевцова Ю.В.* История математики / Ю.В. Шевцова. Саратов: Саратовский гос. ун-т. URL: http://elibrary.sgu.ru/uch_lit/1947.pdf (дата обращения 25.05.2019).
5. *Кыдыралиев С.К.* Вокруг теоремы Фалеса / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, Е.С. Бурова // Вестник КРСУ. 2019. Т. 19. № 8. С. 10–14.
6. Фалес_Милетский. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/ (дата обращения: 19.11.2019).
7. Пирамида Хеопса. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/ (дата обращения: 19.11.2019).