УДК 517.968.72

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ВОЛЬТЕРРОВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Е.А. Комарцова

Устанавливаются достаточные признаки асимптотической устойчивости решений линейного интегро-дифференциального уравнения пятого порядка типа Вольтерра на полуоси. Для этого развивается метод частичного срезывания. Приводится иллюстративный пример.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение типа Вольтерра; асимптотическая устойчивость решений; метод частичного срезывания; лемма Люстерника–Соболева.

ВОЛЬТЕРРАНЫН БЕШИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ИНТЕГРАЛДЫК-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК СЫЗЫКТУУ ТЕҢДЕМЕСИНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН АСИМПТОТИКАЛЫК ТУРУКТУУЛУГУНУН ЖЕТИШТҮҮ ШАРТТАРЫ

Е.А. Комарцова

Бул макалада Вольтерра тибиндеги бешинчи тартиптеги интегралдык-дифференциалдык теңдеменин чыгарылышынын асимптотикалык туруктуулук белгилери белгиленет. Бул үчүн жарым-жартылай кесүү методу өнүктүрүлөт. Иллюстративдик мисал келтирет.

Түйүндүү сөздөр: Вольтерра тибиндеги интегралдык-дифференциалдык теңдеме; чыгарылыштардын асимптотикалык туруктуулугу; жарым-жартылай кесүү методу; Люстерник – Соболевдин леммасы.

SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE ASYMPTOTIC STABILITY OF THE FIFTH ORDER LINEAR VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION SOLUTIONS

E.A. Komartsova

The sufficient signs for the asymptotic stability on the half-axis of solutions of the linear integro-differential equation of the fifth order like Volterra type are established. For this purpose, a partial cutting method is developed. The illustrative example is given.

Keywords: integro-differential equation of Volterra type; asymptotic stability of solutions; partial cutting method; Lyusternik-Sobolev lemma.

Все фигурирующие функции и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \geq t_0$, $t \geq \tau \geq t_0$; $J = [t_0, \infty)$; ИДУ – интегро-дифференциальное уравнение; ДУ – дифференциальное уравнение; под асимптотической устойчивостью решений линейного ИДУ пятого порядка понимается стремление к нулю при $t \to \infty$ всех его решений и их производных до четвертого порядка включительно.

ЗАДАЧА. Получить достаточные условия асимптотической устойчивости решений ИДУ пятого порядка типа Вольтерра следующего вида:

$$x^{(5)}(t)+\sum_{k=0}^{4}\left[a_k(t)x^{(k)}(t)+\int_{t_0}^{t}Q_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau)d\tau\right]=f(t),\ t\ge t_0. \tag{1}$$

Отметим, что в [1] такая задача решена развитием метода весовых и срезывающих функций [2]. В настоящей работе развивается метод частичного срезывания [3] в сочетании с другими хорошо известными методами.

Для решения этой задачи аналогично [1] применяется следующая нестандартная замена:

$$x^{(4)}(t)+p_3x'''(t)+p_2x''(t)+p_1x'(t)+p_0x(t)=W(t)y(t), \tag{2}$$

где p_k – некоторые вспомогательные параметры, причем $p_k>0$ $(k=0,1,2,3)$; $0<W(t)$ – некоторая весовая функция; $y(t)$ – новая неизвестная функция.

Введем обозначения [1]:

$b_4(t)\equiv a_4(t)-p_3+W'(t)(W(t))^{-1}$ (коэффициент $y(t)$),

$b_3(t)\equiv\left[a_3(t)-p_3a_4(t)+p_3^2-p_2\right](W(t))^{-1}$ (коэффициент $x'''(t)$),

$b_2(t)\equiv\left[a_2(t)-p_2a_4(t)+p_2p_3-p_1\right](W(t))^{-1}$ (коэффициент $x''(t)$),

$b_1(t)\equiv\left[a_1(t)-p_1a_4(t)+p_1p_3-p_0\right](W(t))^{-1}$ (коэффициент $x'(t)$),

$b_0(t)\equiv\left[a_0(t)-p_0a_4(t)+p_0p_3\right](W(t))^{-1}$ (коэффициент $x(t)$),

$P_0(t,\tau)\equiv(W(t))^{-1}\left[Q_0(t,\tau)-p_0Q_4(t,\tau)\right]$ (ядро с $x(\tau)$),

$P_1(t,\tau)\equiv(W(t))^{-1}\left[Q_1(t,\tau)-p_1Q_4(t,\tau)\right]$ (ядро с $x'(\tau)$),

$P_2(t,\tau)\equiv(W(t))^{-1}\left[Q_2(t,\tau)-p_2Q_4(t,\tau)\right]$ (ядро с $x''(\tau)$),

$P_3(t,\tau)\equiv(W(t))^{-1}\left[Q_3(t,\tau)-p_3Q_4(t,\tau)\right]$ (ядро с $x'''(\tau)$),

$K(t,\tau)=(W(t))^{-1}Q_4(t,\tau)W(\tau)$ (ядро с $y(\tau)$),

$F(t)\equiv(W(t))^{-1}f(t)$ – новый свободный член.

Тогда из ИДУ (1) приходим к следующей эквивалентной системе:

$$\begin{cases}x^{(4)}(t)+p_3x'''(t)+p_2x''(t)+p_1x'(t)+p_0x(t)=W(t)y(t),\\ y'(t)+b_4(t)y(t)+b_3(t)x'''(t)+b_2(t)x''(t)+b_1(t)x'(t)+b_0(t)x(t)+\\ +\int_{t_0}^{t}\left[P_0(t,\tau)x(\tau)+P_1(t,\tau)x'(\tau)+P_2(t,\tau)x''(\tau)+P_3(t,\tau)x'''(\tau)+\right.\\ \left.+K(t,\tau)y(\tau)\right]d\tau=F(t),\ t\ge t_0.\end{cases} \tag{3}$$

В дальнейшем также поступаем аналогично, как в [1], т. е. проведем отдельно преобразования для первого и второго уравнений системы (3), после чего сложим полученные тождества и проведем дальнейшие преобразования.

Для произвольно фиксированного решения $(x(t),y(t))$ первое уравнение системы (3), т. е. замену (2), возводим в квадрат, интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, и получаем тождество:

$$\begin{aligned}V(t)\equiv&\int_{t_0}^{t}\left[\left(x^{(4)}(s)\right)^2+\sum_{k=0}^{3}D_k\left(x^{(k)}(s)\right)^2\right]ds+p_0p_1(x(t))^2+(p_1p_2-p_0p_3)(x'(t))^2+\\ &+(p_2p_3-p_1)(x''(t))^2+p_3(x'''(t))^2+2p_0p_2x(t)x'(t)+2p_0p_3x(t)x''(t)+\\ &+2p_0x(t)x'''(t)+2(p_1p_3-p_0)x'(t)x''(t)+2p_1x'(t)x'''(t)+2p_2x''(t)x'''(t)\equiv\\ &\equiv V(t_0)+\int_{t_0}^{t}(W(s))^2(y(s))^2\,ds,\end{aligned} \tag{4}$$

где $D_0=p_0^2$, $D_1=p_1^2-2p_0p_2$, $D_2=p_2^2+2p_0-2p_1p_3$, $D_3=p_3^2-2p_2$.

Преобразуем второе уравнение системы (3). Для этого как в [2, с. 42–58; 3] введем следующие предположения и обозначения:

$$K(t,\tau)\equiv\sum_{i=0}^{n}K_i(t,\tau), \qquad (K),$$

$$F(t)\equiv\sum_{i=0}^{n}F_i(t), \qquad (F)$$

$\psi_i(t)$ $(i=1...n)$ – некоторые срезывающие функции,

$P_i(t)\equiv K_i(t,t)(\psi_i(t))^{-2}$, $T_i(t,\tau)\equiv K_i(t,\tau)(\psi_i(\tau))^{-1}$, $E_i(t)\equiv F_i(t)(\psi_i(t))^{-1}$

$P_i(t)\equiv A_i(t)+B_i(t)$ $(i=1...n)$, $\qquad (P)$

$c_i(t)$ $(i=1...n)$ – некоторые функции, т. е. применяем метод частичного срезывания.

Заметим, что ядра $T_i(t,\tau)$ $(i=1...n)$ называются частично срезанными [3].

Для произвольно фиксированного решения $(x(t),y(t))$ второе уравнение системы (3), т. е. ИДУ первого порядка типа Вольтерра, умножаем на $y(t)$, интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, вводим условия (*K*), (*F*), функции $\psi_i(t)$, $P_i(t)$, $T_i(t,\tau)$, $E_i(t)$, используем лемму 1.4, 1.5 [4], вводим условие (*P*), вводим функции $c_i(t)$ $(i=1..n)$. После чего приходим к следующему тождеству:

$$\begin{aligned}&(y(t))^2+2\int_{t_0}^{t}b_4(s)(y(s))^2ds+\sum_{i=1}^{n}\{A_i(t)(Y_i(t,t_0))^2-\int_{t_0}^{t}A_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2ds+\\&+B_i(t)(Y_i(t,t_0))^2-2E_i(t)Y_i(t,t_0)+c_i(t)-\int_{t_0}^{t}[B_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2-2E_i'(s)Y_i(s,t_0)+\\&+c_i'(s)]ds-2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}T_{i\tau}'(s,\tau)Y_i(\tau,t_0)y(s)d\tau ds\}+\\&+2\int_{t_0}^{t}y(s)\sum_{k=0}^{3}\left[b_k(s)x^{(k)}(s)+\int_{t_0}^{s}P_k(s,\tau)x^{(k)}(\tau)d\tau\right]ds\equiv c_*+2\int_{t_0}^{t}y(s)[F_0(s)-\\&-\int_{t_0}^{s}K_0(s,\tau)y(\tau)d\tau]ds,\end{aligned}\tag{5}$$

где $Y_i(t,\tau)\equiv\int_{\tau}^{t}\psi_i(\eta)y(\eta)d\eta$ $\quad(i=1..n)$, $\;c_*=(y(t_0))^2+\sum_{i=1}^{n}c_i(t_0).$

Теперь сложим тождества (4) и (5) и будем иметь следующее окончательное энергетическое тождество:

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t}[(x^{(4)}(s))^2+\sum_{k=0}^{3}D_k(x^{(k)}(s))^2]ds+p_0p_1(x(t))^2+(p_1p_2-p_0p_3)(x'(t))^2+\\&+(p_2p_3-p_1)(x''(t))^2+p_3(x'''(t))^2+2p_0p_2x(t)x'(t)+2p_0p_3x(t)x''(t)+\\&+2p_0x(t)x'''(t)+2(p_1p_3-p_0)x'(t)x''(t)+2p_1x'(t)x'''(t)+2p_2x''(t)x'''(t)+\\&+(y(t))^2+2\int_{t_0}^{t}b_4(s)(y(s))^2ds+\sum_{i=1}^{n}\{A_i(t)(Y_i(t,t_0))^2-\int_{t_0}^{t}A_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2ds+\\&+B_i(t)(Y_i(t,t_0))^2-2E_i(t)Y_i(t,t_0)+c_i(t)-\int_{t_0}^{t}[B_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2-2E_i'(s)Y_i(s,t_0)+\\&+c_i'(s)]ds-2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}T_{i\tau}'(s,\tau)Y_i(\tau,t_0)y(s)d\tau ds+2\int_{t_0}^{t}y(s)\sum_{k=0}^{3}[b_k(s)x^{(k)}(s)+\int_{t_0}^{s}P_k(s,\tau)x^{(k)}(\tau)d\tau]ds\equiv\\&\equiv c_{**}+\int_{t_0}^{t}(W(s))^2(y(s))^2ds+2\int_{t_0}^{t}y(s)[F_0(s)-\int_{t_0}^{s}K_0(s,\tau)y(\tau)d\tau]ds,\end{aligned}\tag{6}$$

где $c_{**}\equiv V(t_0)+c_*$.

Переходя от тождества (6) к интегральному неравенству, применяя обобщенный критерий Сильвестра [5], неравенства $2u_1u_2 \le \varepsilon u_1^2 + \frac{1}{\varepsilon}u_2^2$ ($\varepsilon > 0, \forall u_1, u_2 \in R$) и Коши–Буняковского, лемму 1 [6] и лемму Люстерника–Соболева [7, с. 393–394; 8] (если $x^{(k)}(t) \in L^2(J,R)$ $(k = 0,1)$, $x(t) \to 0$, $t \to \infty$), аналогично теореме из [1] доказывается

ТЕОРЕМА. Пусть 1) $p_k > 0$ $(k = 0,1,2,3)$, $W(t) > 0$, выполняются условия (*K*), (*F*), (*P*); 2) $D_k(t) > 0$ $(k = 0,1,2,3)$; 3) все главные миноры матрицы A положительны:

$$A = \begin{pmatrix} p_0p_1 & p_0p_2 & p_0p_3 & p_0 \\ p_0p_2 & p_1p_2 - p_0p_3 & p_1p_3 - p_0 & p_1 \\ p_0p_3 & p_1p_3 - p_0 & p_2p_3 - p_1 & p_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix};$$

4) $b_4(t) \ge 0$; 5) $A_i(t) \ge 0$, $B_i(t) \ge 0$, $B_i'(t) \le 0$, существуют функции $A_i^*(t) \in L^1(J,R_+)$, $c_i(t)$, $R_i^*(t) \in L^1(J,R_+)$ такие, что $A_i'(t) \le A_i^*(t)A_i(t)$, $\left(E_i^{(k)}(t)\right)^2 \le B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t)$ $(i = 1..n; k = 0,1)$;

6) $(W(t))^2 + (b_k(t))^2 + \left[\int_{t_0}^{t}(P_k(t,\tau))^2 d\tau\right]^{\frac{1}{2}} + |F_0(t)| + \int_{t_0}^{t}|K_0(t,\tau)|d\tau + \int_{t_0}^{t}|T_{i\tau}'(t,\tau)|(A_i(\tau))^{-\frac{1}{2}}d\tau \in L^1(J, R_+ \setminus \{0\})$ $(k = 0,1,2,3)$.

Тогда для любого решения $(x(t), y(t))$ системы (3) справедливы следующие утверждения:

$$x^{(k)}(t) \in L^2(J,R) \quad (k = 0,1,2,3,4), \tag{7}$$

$$y(t) = O(1). \tag{8}$$

Пусть дополнительно, 7) $W(t) \to 0$, $t \to \infty$. Тогда все решения ИДУ (1) и их производные до четвертого порядка включительно стремятся к нулю при $t \to \infty$, т. е. любое решение ИДУ пятого порядка (1) асимптотически устойчиво.

ПРИМЕР. Для ИДУ пятого порядка

$$x^{(5)}(t) + [5 + A(t)]x^{(4)}(t) + \left[11 + 4A(t) - \frac{e^{-t}}{t+1}\right]x'''(t) + \left[13 + 7A(t) + \sin e^{-2t}\right]x''(t) +$$

$$+\left[8 + 6A(t) + \frac{e^{-t}}{t^2+1}\right]x'(t) + \left[2 + 2A(t) + \frac{e^{-t}}{t^3+1}\right]x(t) + \int_0^t \{[2Q_4(t,\tau) + e^{-2t-\tau}]x(\tau) +$$

$$+\left[6Q_4(t,\tau) + \frac{e^{-t}}{(t+\tau+1)^4}\right]x'(\tau) + \left[7Q_4(t,\tau) + \frac{e^{-t}}{e^t + e^\tau + 1}\right]x''(\tau) +$$

$$+\left[4Q_4(t,\tau) + \frac{e^{-t-\tau}}{(t+1)^2}\right]x'''(\tau) + Q_4(t,\tau)x^{(4)}(\tau)\}d\tau = e^{-t+\sqrt{t}} - \frac{e^{-t}}{t^2+1}, t \ge 0,$$

где $A(t) \equiv \exp\left(t(\sin t)^{\frac{1}{3}}\right)$, $Q_4(t,\tau) \equiv e^{\sqrt{t}+\sqrt{\tau}-t+\tau}\left(e^{-5t-2\tau} - e^{-7t} + 8\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{e^{-t+\tau}}{(t^2+\tau^2+1)^2}$, справедливы все условия теоремы

при $p_3 = 4$, $p_2 = 7$, $p_1 = 6$, $p_0 = 2$, $W(t) \equiv e^{-t}$, здесь $t_0 = 0$, $D_0 = 4$, $D_1 = 8$, $D_2 = 5$, $D_3 = 2$,

матрица $A = \begin{pmatrix} 12 & 14 & 8 & 2 \\ 14 & 34 & 22 & 6 \\ 8 & 22 & 22 & 7 \\ 2 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$, ее главные миноры $\Delta_1 = 12$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 12 & 14 \\ 14 & 34 \end{vmatrix} = 212$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 12 & 14 & 8 \\ 14 & 34 & 22 \\ 8 & 22 & 22 \end{vmatrix} = 1206$,

$\Delta_4 = \det A = 2716$,

$b_4(t) \equiv A(t)$, $b_3(t) \equiv -\frac{1}{t+1}$, $b_2(t) \equiv e^t \sin e^{-2t}$, $b_1(t) \equiv \frac{1}{t^2+1}$, $b_0(t) \equiv \frac{1}{t^3+1}$, $n = 1$, $\psi_1(t) \equiv e^{\sqrt{t}}$, $P_1(t) = 2$,

$T_1(t,\tau) \equiv e^{\sqrt{t}}(e^{-5t-2\tau} - e^{-7t} + 8)^{\frac{1}{3}}$, $E_1(t) \equiv 1$, $K_0(t,\tau) \equiv \frac{1}{(t^2-\tau^2+1)^2}$, $f_0(t) = -\frac{1}{t^2+1}$, $P_0(t,\tau) \equiv e^{-t-\tau}$, $P_1(t,\tau) \equiv -\frac{1}{(t+\tau+1)^4}$,

$P_2(t,\tau) \equiv \frac{1}{e^t + e^\tau + 1}$, $P_3(t,\tau) \equiv \frac{e^{-\tau}}{(t+1)^2}$. Поэтому все решения и их производные до четвертого порядка включительно стремятся к нулю при $t \to \infty$, т. е. любое решение этого ИДУ асимптотически устойчиво.

Отметим, что при построении приведенного иллюстративного примера использован пример из [1].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из теоремы при $Q_k(t,\tau) \equiv 0 \quad (k = 0,1,2,3,4)$, $f(t) \equiv f_0(t)$ вытекают достаточные условия асимптотической устойчивости решений линейного неоднородного ДУ пятого порядка:

$$x^{(5)}(t) + \sum_{k=0}^{4} a_k(t) x^{(k)}(t) = f_0(t),\ t \geq t_0. \tag{1_0}$$

Насколько нам известно, эти результаты для ДУ (1_0) будут новыми и не содержатся, например в [9,10].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Подбирая вспомогательные параметры $p_k > 0 \quad (k = 0,1,2,3)$ весовую функцию $W(t)$, срезывающие функции $\psi_i(t) \quad (i = 1,...,n)$, функции $c_i(t) \quad (i = 1..n)$, можно получить коэффициентные условия для асимптотической устойчивости решений ИДУ пятого порядка (1).

Таким образом, нами исследована асимптотическая устойчивость решений ИДУ пятого порядка (1) методом, основанным на нестандартном методе сведения к системе (2), на применении метода частичного срезывания, метода интегральных неравенств и леммы Люстерника–Соболева.

В заключение подчеркнем, что в работе [11] рассмотрена задача об устойчивости решений ИДУ пятого порядка [1]. Настоящая статья дополняет результаты работы [11].

Литература

1. *Искандаров С.* О методе исследования асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения пятого порядка / С. Искандаров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2014. Вып. 46. С. 41–48.
2. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра / С. Искандаров. Бишкек: Илим, 2002. 216 с.
3. *Искандаров С.* Метод частичного срезывания и ограниченность решений неявного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка / С. Искандаров, Д.Н. Шабданов // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2004. Вып. 33. С. 67–71.
4. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра: автореф. дис…д-ра физ.-мат. наук / С. Искандаров. Бишкек, 2003. 34 с.
5. *Зубов В.И.* Теория уравнений управляемого движения: учеб. пособие / В.И. Зубов. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 288 с.
6. *Ведь Ю.А.* Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений / Ю.А. Ведь, З. Пахыров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. Фрунзе: Илим, 1973. Вып. 9. С. 68–103.
7. *Люстерник Л.А.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М.: Наука, 1965. 520 с.
8. *Искандаров С.* Об одном нестандартном методе исследования асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка / С. Искандаров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2012. Вып. 44. С. 44–51.
9. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Л. Чезари. М.: Мир, 1964. 477 с.
10. *Кигурадзе И.Т.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Т. Кигурадзе, Т.А. Чантурия. М.: Наука, 1990. 432 с.
11. *Комарцова Е.А.* Достаточные условия устойчивости решений линейного волтеррова интегро-дифференциального уравнения пятого порядка на полуоси / Е.А. Комарцова // Вестник КРСУ. 2018. Т. 18. № 12. С. 8 –14.