

**ФОРМУЛА ДЛЯ ПРОГИБА ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ С УСИЛЕННЫМИ
РАСКОСАМИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ**

Ткачук Г.Н. geoyukos@yandex.ru, НИУ МЭИ, Москва

Аннотация. Прогиб середины пролета симметричной статически определимой фермы рассчитывается по формуле Максвелла-Мора. Усилия в стержнях находятся методом вырезания узлов в аналитическом виде. При обобщении серии задач с различным последовательно увеличивающимся числом панелей используется метод индукции. Для последовательностей коэффициентов в искомой формуле составляются и решаются рекуррентные уравнения. Все преобразования выполнены в системе компьютерной математики Maple.

Ключевые слова: ферма, прогиб, индукция, Maple

**FORMULA FOR THE FLAKING OF A FLAT FARM WITH ENHANCED EQUIPMENT
WITH AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS**

Tkachuk G.N. geoyukos@yandex.ru, Moscow

Abstract. The deflection of the middle span of a symmetric statically definable truss is calculated using the Maxwell-Mohr formula. The forces in the rods are found by cutting the nodes in an analytical form. When generalizing a series of problems with various successively increasing number of panels, the induction method is used. For sequences of coefficients in the desired formula, recurrent equations are compiled and solved. All transformations are performed in the Maple computer mathematics system.

Keywords: truss, deflection, induction, Maple

Стержневые системы на прогиб и прочность, как правило, рассчитываются в специализированных программах, основанных на численных методах, например, методе конечных элементов. Такие программы позволяют рассчитывать весьма сложные конструкции, в том числе и многократно статически неопределимые. Аналитических расчетов

значительно меньше, особенно тех, которые дают решение в компактном формульном виде, с учетом произвольного числа панелей, если речь идет о регулярных структур.

Рассмотрим ферму с усиленными восходящими раскосами (рис. 1) равномерно нагруженную по узлам верхнего пояса. В каждой панели введены две дополнительные вертикальные стойки и два раскоса. В ферме с n панелями в половине пролета содержится $N=24n+4$ стержня, включая три стержня, моделирующие опоры. Расчет усилий произведем методом вырезания узлов по программе [1].

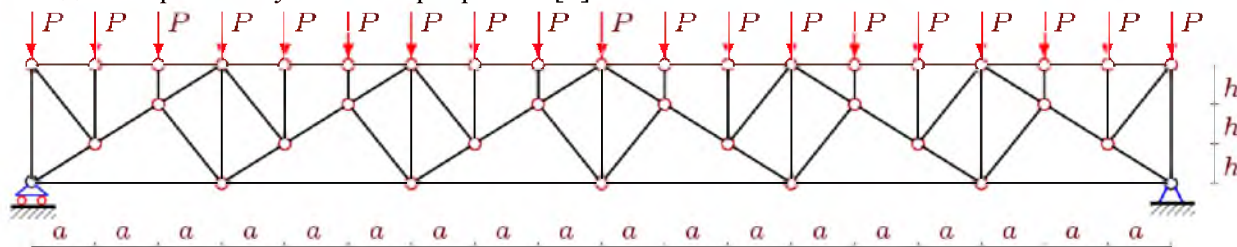


Рис. 1. Ферма под действием равномерной нагрузки, $n=3$

Ранее эта программа использовалась в расчетах ряда арочных [2-13] и пространственных [14-23] ферм. Решетчатые статически определимые фермы в аналитической форме рассчитывались в [24-29]. По этой программе было также получено решение плоской фермы башенного типа [30]. Формулы для шпренгельных ферм методом индукции получены в работах [31-34]. Кинематически изменяемые при определенном числе панелей фермы рассмотрены в [35-37].

Шарниры и стержни нумеруются (рис. 2). В программу вводятся координаты узлов. Приведем соответствующий фрагмент программы, написанной на языке системы Maple:

```
> for i to 2*n+1 do x[i]:=3*a*(i-1): y[i]:=0: od:
> for i to n do
> x[i+2*n+1]:=3*i*a-2*a: y[i+2*n+1]:=h:
> x[i+3*n+1]:=3*i*a+3*a*n-a: y[i+3*n+1]:=h:
> x[i+4*n+1]:=3*i*a-a: y[i+4*n+1]:=2*h:
> x[i+5*n+1]:=3*i*a+3*a*n-2*a: y[i+5*n+1]:=2*h:
> od:
> for i to 6*n+1 do
x[i+6*n+1]:=i*a-a: y[i+6*n+1]:=3*h: od:
```

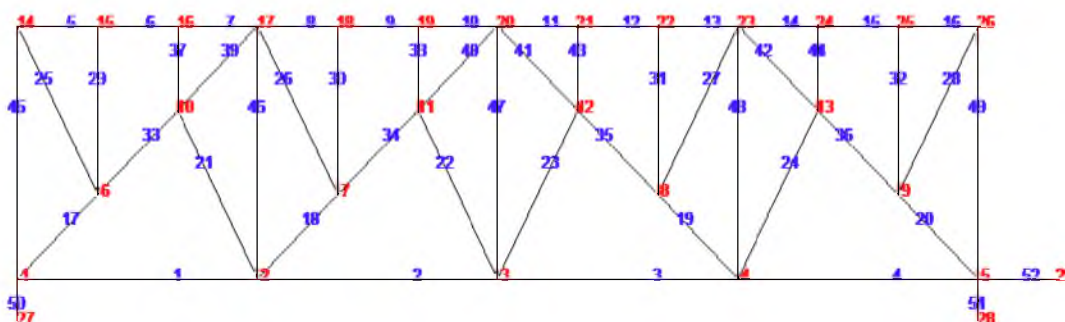


Рис. 2. Нумерация стержней и узлов, $n=2$

Получено следующее выражение для прогиба фермы:

$$EP\Delta = (Aa^3 + Bc^3 + Ch^3) / (2h^2),$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$.

Коэффициенты в этом выражении найдены методом индукции. С помощью оператора `rgf_findrecur` из специализированного пакета `genfunc` получены линейные однородные уравнения пятого и третьего порядков:

$$A_n = 5A_{n-1} - 10A_{n-2} + 10A_{n-3} - 5A_{n-4} + A_{n-5}$$

$$B_n = 3B_{n-1} - 3B_{n-2} + B_{n-3}$$

$$C_n = 3C_{n-1} - 3C_{n-2} + C_{n-3}$$

Решение этих уравнений дает оператор `rsolve`:

$$A = (15n^4 + 7n^2) / 2, \quad B = 9n^2, \quad C = 9n^2 - 12n + 11.$$

Таким образом найдена простая аналитическая зависимость прогиба от числа панелей и размеров фермы. Эту зависимость можно использовать как оценочную.

На рисунке 3 приведены зависимости безразмерного прогиба $\Delta' = \Delta EF / (P_s L)$, $P_s = P(6n - 1)$ при длине пролета $L = 100$ м. Длина панели a зависит от пролета: $a = L / (6n)$. В начале графика прогиб резко падает (соответствующая длина панели нереально велика), затем почти незаметно растет, приближаясь к наклонной асимптоте, тангенс угла которой можно найти с помощью предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n = 3h / (2L)$.

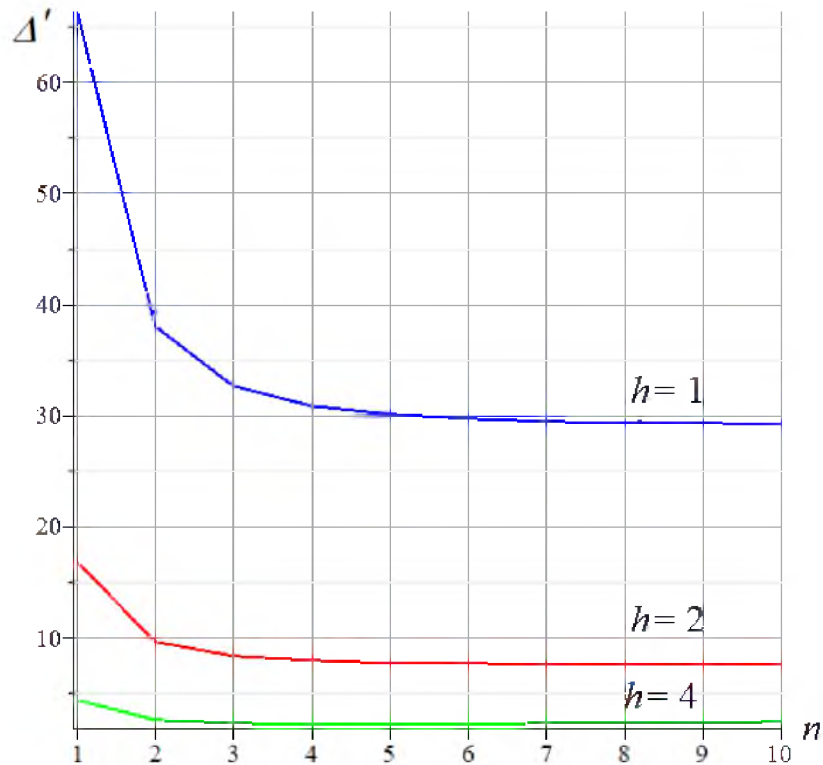


Рис. 3. Зависимость прогиба от числа панелей, высота h в метрах

Экстремальная (минимум) точка находится около значений $n = 3 \dots 7$. Точное решение задачи о минимуме прогиба в системе Maple получить не удастся.

Аналитические обзоры некоторых простых решений для плоских ферм, полученные аналогичным методом в системе символьной математики Maple [38, 39] с помощью метода индукции, содержатся в работах [40, 41].

Литература

1. Кирсанов М. Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.

2. Тиньков Д.В. Расчет прогиба плоской арочной фермы с крестообразной решеткой // Постулат. 2017. № 12 (26). С. 74.
3. Кунов И.М. О жесткости арочной фермы треугольного очертания в зависимости от перераспределения площадей стержней и числа панелей // Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 253-256.
4. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5 (274). С. 9-14.
5. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44-55.
6. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 1. С. 64-70.
7. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 7-11.
8. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3 (31). С. 42-48.
9. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. № 9. С. 8-10.
10. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета деформаций арочной фермы с произвольным числом панелей // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2018. № 4 (67). С. 86-94.
11. Компанец К. А Расчет смещения подвижной опоры плоской арочной раскосой фермы при нагрузке в середине пролета // Молодежь и наука. 2017. №4. С.108.
12. Савиных А. С. Анализ прогиба арочной раскосой фермы, нагруженной по верхнему поясу // Строительство и архитектура. 2017. Том 5. Выпуск 3 (6). С. 12-17.
13. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С.12-33.
14. Кирсанов М.Н. Учет строительного подъема в аналитическом расчете пространственной балочной фермы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2014. Т. 4. № 2 (20). С. 36-39.
15. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник Московского энергетического института. 2012. № 5. С. 5-8.
16. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. № 5 (116). С. 579-586.
17. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 5 (238). С. 11-15.
18. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 5 (268). С. 19-22.
19. Кирсанов М.Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 6 (24). С. 28-34.
20. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2016. № 1 (41). С. 93-100.
21. Кирсанов М.Н. Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. № 3 (242). С. 48-51.
22. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 1. С. 49-53.

23. Леонов П.Г., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в системе Maple // В сборнике: Информатизация инженерного образования ИНФОРИНО-2014 Труды международной научно-методической конференции. 2014. С. 239-242.
24. Kirsanov M., Komerzan E., Sviridenko O. Analytical calculation of the deflection of an externally statically indeterminate lattice truss// MATEC Web of Conferences, vol. 265, 0527 (2019) <https://doi.org/10.1051/mateconf/201926505027>
25. Kirsanov M.N. A precise solution of the task of a bend in a lattice girder with a random number of panels // Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. № 1 (37). С. 92-99.
26. Кирсанов М.Н. Зависимость прогиба плоской решетчатой фермы от числа панелей // Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 10. С. 24-27.
27. Кирсанов М.Н., Хроматов В.Е. Моделирование деформаций плоской фермы треугольного очертания // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 6 (275). С. 24-28.
28. Кирсанов М.Н., Москвин В.Г. Деформации плоской фермы с усиленной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2018. № 4 (279). С. 10-14.
29. Кирсанов М.Н. Индуктивный вывод формул для деформаций плоской решетчатой фермы // Строительство и реконструкция. 2017. № 2 (70). С. 17-22.
30. Тиньков Д.В. Индуктивный вывод формулы для горизонтального перемещения башенной конструкции// Международный научный семинар "Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии" -GRACOS-17. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2017. С. 249-254.
31. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Analytical calculation and analysis of planar springel truss // Строительная механика и конструкции. 2018. № 2 (17). С. 72-79.
32. Кирсанов М.Н. Аналитический метод расчета прогиба плоской фермы со сложной решеткой шпренгельного типа // Транспортное строительство. 2017. № 5. С. 11-13.
33. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в шпренгельной ферме с произвольным числом панелей // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 2. С. 90-95.
34. Гавриленко А.Б., Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка жесткости шпренгельной фермы // Строительство и реконструкция. 2018. 2(76). С. 11-17.
35. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1. № 14. С. 27-30.
36. Кирсанов М.Н. Формула для прогиба и анализ кинематической изменяемости решетчатой фермы // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 2. № 15. С. 5-10.
37. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы с декоративной решеткой // Строительство: наука и образование. 2019. Т. 9. Вып. 1. Ст. 1. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2019.1.1
38. Голоскоков Д. П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.
39. Матросов А. В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. СПб: БХВ-Петербург, 2001. 528 с.
40. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. № 12. С. 28.
41. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73. doi: 10.5862/MSE.57.6