ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА. МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА

УДК 519.925

ПОИСК НОВЫХ ЯВЛЕНИЙ ЧИСЛЕННЫМИ ЭКСПЕРИМЕНТАМИ С МНОГОМЕРНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Панков Павел Сергеевич, *доктор физико-математических наук, профессор, член-корр. НАН КР, Институт математики НАН КР, заведующий лабораторией вычислительной математики, Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, пр. Чуй 265а, e-mail: pps5050@mail.ru*
Тагаева Сабина Базарбаевна, *кандидат физико- математических наук, и.о.доцента, КГТУ им. И. Раззакова, Кыргызстан, 720044, г. Бишкек, пр. Ч.Айтматова 66, e-mail: tagaeva_72@mail.ru*

Аннотация. Как следствие эффекта множественности, следующие синергетические явления были обнаружены численными экспериментами. Явление странного аттрактора продемонстрировано через скатывание шарика по гладкой поверхности с тремя выступами под воздействием силы тяжести. Соответствующая система дифференциальных уравнений составлена и приближенно решена на компьютере. На компьютере было моделировано движение отталкивающихся по закону Кулона одинаковых электрических зарядов из случайного начального расположения на топологическом торе. Когда количество зарядов достаточно (больше 100) велико, их окончательное расположение образует регулярную (правильную квадратную или правильную треугольную) сетку.

Ключевые слова: эффект множественности, синергетика, явление, странный аттрактор, численный эксперимент, закон Кулона, электрические заряды.

SEARCH OF NEW PHENOMENA BY MEANS OF NUMERICAL EXPERIMENTS WITH MULTIDIMENSIONAL EQUATIONS

Pankov Pavel Sergeevich, *D.Sc. (Mathematics), Professor, corresponding member of NAS of KR, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Kyrgyz Republic, Laboratory of Computational Mathematics, Kyrgyzstan, 720071, Bishkek c., Chu av., 265a, e-mail: pps5050@mail.ru*
Tagaeva Sabina Bazarbaevna, *PhD (Mathematics), Associate Professor, Kyrgyzstan, 720044, Bishkek c., Ch. Aitmatov av., 66, I. Razzakov KSTU, e-mail: tagaeva_72@mail.ru*

Abstract. As a consequence of the effect of numerousity, the following synergetic phenomena were opened by means of numerical experiments. A strange attractor is presented as rolling of a ball along a smooth surface with three juts by gravity effect. A corresponding system of differential equations is constructed and solved approximately on a computer. Motion of equal, repelling by the Coulomb law electrical charges from a random initial distribution on a topological torus form a final regular grid was modeled by computer. When the number of charges is a square of even number then the grid is square in most of experiments; when it is a square of odd number then the grid is triangular in most of experiments.

Keywords: effect of numerousity, synergetic, phenomenon, attractor, numerical experiment, Coulomb law, electrical charges

1. Введение

При исследовании различных процессов особый интерес представляют новые явления, которые возникают или могут возникнуть в отдельных ситуациях в этих процессах. В большинстве случаев математические модели процессов, представляющих интерес для исследования, слишком сложны для того, чтобы можно было строго доказать наличие какого-либо явления, поэтому используются приближенные вычисления (численные эксперименты). В данной статье для поиска новых явлений предлагается использовать эффект «множественности».

Во втором разделе излагаются уточненные формулировки понятий «эффекта» и «явления» в математике, определения «диссипативной системы», приводится список «эффектов», в том числе эффекта «множественности».

В третьем разделе излагается компьютерная реализация явления «иргөө», как одного из следствий эффекта «множественности».

В четвертом разделе излагается компьютерное представление и реализация явления «странного аттрактора» на потенциальной поверхности.

В пятом разделе - обнаружение явления самоупорядочения большого количества отталкивающихся электрических зарядов на топологическом торе.

Цель статьи - предложить методику поиска новых явлений с помощью компьютерной реализации диссипативных систем.

2. Обзор по определениям «эффекта» и «явления»

Понятия «эффекта» и «явления» используются в различных науках. В [1, с.11-12], [8, с. 107-108], [9] они были частично формализованы для математики, с целью их более систематического поиска и использования. В данном разделе кратко излагается содержание этих работ применительно к тематике настоящей статьи.

Многие математические теоремы дают достаточные условия существования (и единственности) объекта $x \in X$, имеющего некоторое свойство B. В теории катастроф подробно рассмотрено, что может возникать при «непродолжимости решений дифференциальных уравнений». Таким образом, если у объекта нет свойства B, то у него должны быть какие-то другие свойства. Это и предложено взять за наиболее общее определение понятия «явление», обобщая подход теории катастроф.

Определение 1. «Явление» P - это свойство некоторого обособленного класса объектов из X, для которых не выполняется свойство B. Понятию «обособленный» придан более точный смысл: если класс X представляет собой множество и в нем можно ввести меру, то «явление» – это такое свойство, которое выполняется на множестве меры нуль, то есть «почти никогда».

Как основная причина «явления», предложено следующее

Определение 2. Воздействием «эффекта» E называется свойство (или ряд свойств) P некоторых объектов $x \in X$, имеющих свойство E, но такое (такие), что логическое доказательство $(E \wedge C) \Rightarrow P$ (где C – некоторое дополнительное условие) очень сложно и свойство P было первоначально обнаружено не путем логического вывода, а столкновением с парадоксами, путем эксперимента (как в физике или химии) или путем вычислительного эксперимента в математике.

По этим определениям предложена следующая методика. Если объекты, в которых возникают место различные, но однотипные неожиданные явления, имеют общее свойство E, то можно считать это свойство «эффектом».

Далее, накладывая, кроме условия E, другие дополнительные условия, можно находить другие явления для такого класса объектов.

В данной статье в качестве класса X рассматриваются многомерные эволюционные (дифференциальные и разностные) уравнения. Такой выбор класса X обусловлен еще и тем, что, если в качестве называемой переменной взято время, то «явления» можно называть «событиями». Также использовать эксперименты на компьютере, где «события» возникают в процессе вычислений.

Примеры математических и физических эффектов, которые относятся к эволюционным системам:

- уже упомянутый эффект «непродолжимости решения» – основание теории катастроф;
- эффект самоорганизации (синергетический эффект), который был декларирован давно, но первое реальное его появление, как установлено [2], было определено всего несколько сот лет назад;
- явление погранслоя в физике (нулевая скорость слоя газа или жидкости, непосредственно прилегающего к обтекаемому телу) (Прандтль), его математическое объяснение обнаружило «эффект сингулярного воздействия малого параметра», который, в свою очередь, послужил причиной многих известных явлений;
- обнаруженный в Кыргызстане эффект аналитичности для дифференциальных и интегральных уравнений;
- обнаруженный в Кыргызстане «эффект множественности» – возникновение новых явлений самоупорядочивания, когда количество компонент больше 100-150.

Было введено

Определение 3. Диссипативная система – это такая полностью ограниченная (компактная) система, имеющая достаточно большое количество возможных состояний и переходов между ними, что энтропия входящей энергии (вводится ограниченно по мощности, но неограниченно по времени) значительно меньше энтропии выходящей энергии. Таким образом, внутренняя энтропия уменьшается, что эквивалентно возникновению упорядоченности.

3. Моделирование явления «иргөө»

Данное слово в кыргызском языке обозначает «дискретная оптимизация при помощи синергетики», а также следующее явление.

Если поместить в вибрирующий цилиндр большое количество (абсолютно твердых) шаров различных размеров, сделанных из одного материала, то через некоторое время самый большой шар окажется наверху посередине.

Видно, что данное явление является слишком сложным для того, чтобы можно было обосновать математически, но его можно подтвердить численными экспериментами. В связи с этим были сделаны следующие построения [2].

Пусть даны (большое) число $n \in N$ и (малые) числа (радиусы) $r_1 \le r_2 \le \ldots < r_n \in R_+$.

На набор центров шаров $\{(x_k, y_k, z_k): k=1..n\} \subset R^3$ наложены ограничения

$r_k \le z_k$, $x_k^2 + y_k^2 \le (1 - r_k)^2$ для всех k;

$$(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2 + (z_k - z_j)^2 \ge (r_j + r_k)^2 \ (k \ne j). \quad (1)$$

Далее, на каждом шаге производился «подъем» шаров на некоторую высоту (имитация вибрации), а потом случайные «спуски» шаров с сохранением соотношения (1).

Многократно проведенные расчеты с различными случайными исходными данными подтвердили следующую гипотезу.

Гипотеза. При $n > 100$ с вероятностью единица существует такое число $M \in N$, что после M шагов центр шара с максимальным радиусом будет удовлетворять условиям:

$x_n^2 + y_n^2 \le r_n^2$; над этим шаром нет других шаров.

4. Компьютерное и реальное моделирование явления странного аттрактора многомерной системой дифференциальных уравнений

Известно понятие странного аттрактора - притягивающее множество неустойчивых траекторий в фазовом пространстве открытой системы, которая оперирует вдали от термодинамического равновесия.

Первым примером явился аттрактор Лоренца, описываемый системой уравнений

$x'(t)=10(y(t)-x(t));\ y'(t)=x(t)(28-z(t))-y(t);\ z'(t)=x(t)y(t)-8/3\cdot z(t)$ (2)

(третий порядок).

Для его реализации требуется химическая смесь трех компонент.

Для реализации других видов странных аттракторов в литературе также предлагались сложные технические устройства.

Мы поставили задачу построить странный аттрактор на потенциальной поверхности [4], [14].

Движение точки $(w(t))$ под действием силы (F), зависящей только от положения точки, по второму закону Ньютона выражается векторным уравнением

$$w''(t) = F(w(t)),$$

с начальными условиями

$w(0)=w_0,\ w'(0)=v_0.$

Выбирая малый шаг $h>0$, получаем расчетные формулы

$v_{k+1}\sim := v_k+hF(w_k),\ w_{k+1}\sim := w_k+h(v_k+v_{k+1}\sim)/2;$

$v_{k+1} := v_k+h(F(w_k)+F(w_{k+1}\sim))/2,\ w_{k+1} := w_k+h(v_k+v_{k+1}\sim)/2,\ k=0,1,2,\ldots$ (3)

Была выбрана поверхность с самой низкой точкой в центре и тремя выступами. Получена следующая система двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$x''(t) = Z_x'(x(t),y(t))/\left(\left(Z_x'(x(t),y(t))\right)^2 + (Z_x'(x(t),y(t))^2 + 1\right), \quad (4)$$

$$y''(t) = Z_y'(x(t),y(t))/\left(\left(Z_x'(x(t),y(t))\right)^2 + (Z_x'(x(t),y(t))^2 + 1\right),$$

где $$Z(x,y) = \sum_{j=1}^{3}\left(\left(x-\cos\left(\frac{2\pi}{3}j-\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 + \left(y-\sin\left(\frac{2\pi}{3}j-\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 + 0.01\right)^{-1} + x^2 + y^2.$$

(общий порядок - четвертый).

Для приближенного решения системы (4) по формулам метода ломаных Эйлера с уточнением (3) была составлена следующая программа на языке pascal

```
PROGRAM sab_att;
uses crt, graph;
var x,y,xn,yn,vx,vy,vxn,vyn,dx,dy,dxy2,ht,z,ffx,ffy: double;
var xn1,yn1,vxn1,vyn1,ffx1,ffy1: double;
i,j,nxy,it,nt,np,ihand,n_time,ik: longint;
var drv, mode,f,n,xg,yg,zg: integer;
xf,yf:array[1..3] of double;
xfg,yfg:array[1..3] of integer;
procedure grad(var fx,fy,xx,yy:double);
var fxx, fyy, fxy, a: double;
begin  fxx:=0.; fyy:=0.; a:=1.0;
for j:=1 to 3 do begin
dxy2:=sqr(xx-xf[j])+sqr(yy-yf[j])+0.01;
fxx:=fxx+2.0*(xx-xf[j])/sqr(dxy2);
fyy:=fyy+2.0*(yy-yf[j])/sqr(dxy2) end;
fxx:=fxx-2.0*a*xx; fyy:=fyy-2.0*a*yy;
fxy:=sqr(fxx)+sqr(fyy)+1.0;
fxx:=fxx/fxy; fyy:=fyy/fxy;
fx:=fxx; fy:=fyy; end;
begin {main}
drv:=0; mode:=VgaHi; InitGraph(drv,mode,'c:\tp\bgi');
randomize;
SetTextStyle(0,0,2);
```

```
OutTextXY(30,20,'Pankov, Tagaeva, 2018. Strange attractor');
z:=300.; zg:=round(z)+30;
xf[1]:=–1.0; yf[1]:=0.0; xf[2]:=1.0/2.0; yf[2]:=sqrt(3.0)/2.0;
xf[3]:=1.0/2.0; yf[3]:=-sqrt(3.0)/2.0;
for j:=1 to 3 do begin xfg[j]:=round(z*xf[j]); yfg[j]:=round(z*yf[j]);
Setcolor(green); circle(xfg[j]+zg,yfg[j]+zg,8); end;
x:=0.3; y:=0.1; vx:=0.; vy:=0.; ht:=0.1; nt:=400;
  for it:=0 to nt do
       begin {it}  grad(ffx,ffy,x,y);
vxn1:=vx+ffx*ht; vyn1:=vy+ffy*ht;
 xn1:=x+(vx+vxn1)*ht/2.0; yn1:=y+(vy+vyn1)*ht/2.0;
  grad(ffx1,ffy1,xn1,yn1);
vxn:=vx+(ffx+ffx1)*ht/2.0; vyn:=vy+(ffy+ffy1)*ht/2.0;
 xn:=x+(vx+vxn)*ht/2.0; yn:=y+(vy+vyn)*ht/2.0;
 xg:=round(z*xn); yg:=round(z*yn);
Setcolor(white); circle(xg+zg,yg+zg,2+(it div 100)); delay(50);
x:=xn; y:=yn; vx:=vxn; vy:=vyn; end {it}; end.
```

Все результаты численных экспериментов с различными близкими начальными условиями дали хаотическое движение в ограниченной области.

Примечание. Применение формул Рунге-Кутта дало бы более точные результаты, но формулы (3) оказались достаточными для получения качественного результата. Также, данную компьютерную программу можно рассматривать саму по себе, как странный аттрактор, независимо от (4).

Данную систему оказалось возможным реализовать механически согласно следующей инструкции.

1) Вырезать из тонкого железного листа правильный шестиугольник диаметром 60 см. занумеруем его вершины 1-2-3-4-5-6, а центр - 0.

2) Расположить шестиугольник горизонтально и согнуть его так, чтобы отрезки 1-0, 3-0, 5-0 имели большой наклон вниз к точке 0, а отрезки 2-0, 4-0, 6-0 имели небольшой наклон вниз к точке 0.

3) Пустить стальной шарик из точки 2. он должен покатиться к точке 0, потом подняться немного по направлению к точке 5, потом скатиться (неопределенно) на отрезок 6-0 или на отрезок 4-0, по этому отрезку скатиться к точке 0, подняться и т.д.

Авторы благодарят мастера Нуралы Ниязбекова за изготовление модели.

5. Явление самоупорядочивания при движении электрических зарядов

Эффект множественности применен для поиска упорядоченности при движении дискретных электрических зарядов в вязкой среде [5], [6], [7], [12], [13]. Для удобства программирования и представления результатов был выбран топологический тор - квадрат со склеенными противоположными сторонами.

На топологическом торе в вязкой среде случайным образом располагаются одноименные электрические заряды. После этого они начинают отталкиваться по закону Кулона, пока не почти остановятся.

Тогда движение N зарядов описывается системой N двумерных дифференциальных уравнений. Вследствие вязкости были взяты уравнения первого порядка. Их особенностью является то, что правые части разрывны, но решения - непрерывные и гладкие. Для учета особенностей топологии учитывается отталкивание каждого заряда только от близких зарядов.

Была составлена следующая программа на языке *pascal* с графической демонстрацией начального и конечного расположения зарядов (в тексте $N=256$).

```
program sab_3; uses crt, graph;
var hxy,vx,vy,dx,dy,dxy,dxy1,hxy1,z,z2,xj,yj,dxy2,dxyd: double;
i,j,nxy,it,nt,np,ihand,n_time,ik: longint;
var drv, mode,f,n: integer; x,y:array[1..300] of double;
xn,yn:array[1..300] of integer;
begin {main} drv:=0; mode:=VgaHi; InitGraph(drv,mode,'c:\tp\bgi');
randomize; SetTextStyle(0,0,2);
OutTextXY(30,20,'Pankov, Tagaeva, 2018. Repelling 256 electrical charges on torus');
OutTextXY(100,40,'(Wait a little)'); z:=700.; z2:=z/2.0;
np:=10; {nt:=500*n_time;} hxy:=1.0; hxy1:=hxy; nt:=1000; nxy:=256;
for ik:=1 to nxy do begin  x[ik]:=z*random; y[ik]:=z*random;
xn[ik]:=round(x[ik]); yn[ik]:=round(y[ik]);
Setcolor(green); circle(xn[ik]+80,yn[ik]+70,2); end;
  for it:=0 to nt do begin {it} if it>np then hxy:=2.0*hxy1; if it>2*np then hxy:=4.0*hxy1;
       for i:=1 to nxy do begin {i=ix} vx:=0.; vy:=0.; for j:=1 to nxy do
begin if j<>i then begin
xj:=x[j]; if xj>x[i]+z2 then xj:=xj-z; if xj<x[i]-z2 then xj:=xj+z;
yj:=y[j]; if yj>y[i]+z2 then yj:=yj-z; if yj<y[i]-z2 then yj:=yj+z;
dxy2:=sqr(x[i]-xj)+sqr(y[i]-yj)+1.;
dxy1:=z/(dxy2*sqrt(dxy2)); if dxy1<sqr(z)/nxy*0.5 then begin
dx:=(x[i]-xj)*dxy1; dy:=(y[i]-yj)*dxy1; vx:=vx+dx; vy:=vy+dy; end; end; end;
 x[i]:=x[i]+vx*hxy; if x[i]>z then x[i]:=x[i]-z; if x[i]<0. then x[i]:=x[i]+z;
 y[i]:=y[i]+vy*hxy; if y[i]>z then y[i]:=y[i]-z; if y[i]<0. then y[i]:=y[i]+z; end {i=ix};
for ik:=1 to nxy do begin xn[ik]:=round(x[ik]); yn[ik]:=round(y[ik]) end; end {it};
Setcolor(white);
repeat for ik:=1 to nxy do begin circle(xn[ik]+80,yn[ik]+70,8);
circle(xn[ik]+80,yn[ik]+70,6); circle(xn[ik]+80,yn[ik]+70,4);
circle(xn[ik]+80,yn[ik]+70,2) end;
delay(100); until keypressed; end.
```

Результаты численных экспериментов. Для $N=10, 20, 30, \ldots$ получающиеся равновесные расположения были разнообразными и не имели никаких общих закономерностей, заряды располагались треугольниками, четырехугольниками, пятиугольниками …. Начиная с $N=100$, уже стали появляться регулярные области, а после $N=200$ выявилась закономер-ность, в особенности для количеств зарядов - квадратов чисел. Так, для $N=256$ в большин-стве попыток (поскольку исходные данные случайны), образуется правильная квадратная сетка, а для $N=289$ - правильная треугольная сетка. Такая же закономерность появилась и для других квадратных чисел [3].

Теперь возникает задача реализации аналогичного явления.

6. Выводы

В статье представлены три результата, полученных численными экспериментами. Первый из них подтвердил известное явление, которое раньше не исследовалось; второй был реализован в металле; для третьего требуется построить реализацию.

Из полученных результатов следует, что на основе эффекта множественности, в рамках Определения 3 диссипативной системы, а также компьютерными экспериментами в других вполне ограниченных (компактных) пространствах со многими компонентами можно производить поиск новых явлений. После обнаружения явлений можно попытаться их реализовать, используя технические возможности КГТУ.

Список литературы:

1. Кененбаева Г.М. Теория и методика поиска новых эффектов и явлений в теории возмущенных дифференциальных и разностных уравнений. – Бишкек: Илим, 2012. - 204 с.

2. Панков П.С., Кененбаева Г.М. Иргөө кубулушу диссипациялык системалардын биринчи мисалы катарында жана аны компьютерде ишке ашыруу // Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын Кабарлары, 2012, № 3. – 105-108 б.

3. Панков П.С., Тагаева С.Б. Явление самоупорядочения большого количества отталкивающихся электрических зарядов на топологическом торе // Вестник Института математики НАН КР, 2018, № 1. - С.12-18.

4. Панков П.С., Тагаева С.Б. Компьютерное и реальное моделирование явления странного аттрактора системой дифференциальных уравнений // Вестник Института математики НАН КР, 2018, № 1. - С.18-24.

5. Тагаева С.Б. Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, описывающих отталкивание частиц // Вестник ЖАГУ, 2016, № 1(32). – С.78-82.

6. Тагаева С.Б. Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, описывающих отталкивание частиц с различными зарядами // Естественные и математические науки в современном мире / Сб. статей по материалам XLIX междунар. научно-практ. конф. № 12 (47). Новосибирск: Изд. АНС «СибАК», 2016. – С. 85-91.

7. Тагаева С.Б. Система обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, описывающих отталкивание частиц на окружности // Естественные и математические науки в современном мире / Сб. статей по материалам XLIX междунар. научно-практ. конф. № 12 (47). Новосибирск: Изд. АНС «СибАК», 2016. – С. 91-95.

8. Kenenbaeva G.M., Tagaeva S. Survey of effects and phenomena in some branches of mathematics // Proceedings of V Congress of the Turkic World Mathematicians. – Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2014. – Pp. 107-111.

9. Kenenbaeva G. On mathematical effects // Abstracts of the VI Congress of the Turkic World Mathematical Society. – Astana: L.N.Gumilyov Eurasian National University, 2017. - P. 320.

10. Pankov P. S., Kenenbaeva G. M. Hypothesis on effect of "numerosity" and other effects in mathematics // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана, 2017, № 5. - С. 60-62.

11. Pankov P., Kenenbaeva G. Effect of "numerosity" and other effects in mathematics // Abstracts of the Third International Scientific Conference "Actual problems of the theory of control, topology and operator equations" / Ed. by Academician A.Borubaev. - Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2017. – P. 87.

12. Pankov P., Tagaeva S. Mathematical modeling of distribution of discrete electrical charges // Abstracts of the V International Scientific Conference "Asymptotical, Topological and Computer Methods in Mathematics" devoted to the 85 anniversary of Academician M. Imanaliev / Ed. by Academician A.Borubaev. - Bishkek, 2016. – P. 58.

13. Tagaeva S.B. Existence and stabilization of solution of system of differential equations describing arrangement of many discrete electrical charges on a segment //Интернет-журнал ВАК КР, 2017, № 1. - 6 с.

14. Tagaeva S. Example of trifurcation of distribution of repelling electrical charges // Abstracts of the Third International Scientific Conference "Actual problems of the theory of control, topology and operator equations" / Ed. by Academician A.Borubaev. - Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2017. – P. 89.