ДК.624.073.02 DOI: 10.35803/1694-5298.2019.3.424-430

А. Т. МАРУФИЙ Ошский технологический университетОш, Кыргызская Республика
oshtu-marufi@rambler.ru
A. T. MARUFIY Osh Technological University Osh, Kyrgyz Republic

А. С. КАЛЫКОВ Государственный институт сейсмостойкого строительства и инженерного проектирования Бишкек, Кыргызская Республика
dzhalil_8@mail.ru
A. S. KALYKOV State Institute of Earthquake Engineering and engineering design
Bishkek, Kyrgyz Republic

ИЗГИБ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛИТЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С ОСОБЫМИ УСЛОВИЯМИ ЕЁ РАБОТЫ

BENDING OF A SUBTLE-FINISHED PLATE ON ELASTIC BASE WITH SPECIAL CONDITIONS OF ITS WORK

Бул макалада винклердик серпилгич негизде жайгашкан жарым чексиз устундун негиз менен толук эмес контактта болгондогу жана ортоңку тегиздигинде узунунан таасир эткен күчтөрдүн аракетиндеги плитанын ийилүүсүнүн аналитикалык чечилиши алынган. Аналитикалык чечилиши Фурьенин интегралдык өзгөртмөлөрүнүн жалпы чечилүү усулун колдонуу менен алынган. Ар кандай аналитикалык чечим долбоорлонуучу конструкциялардын реалдуу жумуштарга жакындаштырылган натыйжасы болуп саналат.
Өзөк сөздөр: *ийилүү, плита, серпилгичтүү негиз, толук эмес контакт, жалпыланган чечимдер, Фурьенин өзгөртмөлөрү.*

В *данной статье получено аналитическое решение задачи изгиба полубесконечной плиты на упругом винклеровском основании с учетом неполного контакта с основанием и влиянием продольных усилий, приложенных в срединной плоскости плиты. Аналитическое решение получено методом обобщенных решений с использованием интегральных преобразований Фурье. Любое аналитическое решение является результатом, приближающимся к реальным условиям работы проектируемых конструкций.*
Ключевые слова: *изгиб, плита, упругое основание, неполный контакт, обобщенные решения, преобразование Фурье.*

In this article, an analytical solution is obtained for the problem of bending a semi-infinite plate on an elastic Winkler base, taking into account incomplete contact with the base and the influence of longitudinal forces applied in the middle plane of the plate. The analytical solution is obtained by the method of generalized solutions using integral Fourier transforms. Any analytical solution is the result, approaching the actual working conditions of the designed structures.
Key words: *bending, plate, elastic foundation, incomplete contact, generalized solutions, Fourier transform.*

Введение. Среди строительных конструкций большое место занимают конструкции на деформируемом основании, проблема расчета которых имеет весьма большое практическое значение . Конструкции на деформируемом основании составляют большой удельный вес в общем объеме строительства, и всякое уточнение их расчета существенно отражается на стоимости. И одним из важнейших условий сочетания надежности и долговечности с экономичностью является повышение качества проектирования путем более широкого применения прогрессивных конструктивных решений, основанных на разработке методик расчета наиболее полно отображающих реальную работу конструкций зданий и сооружений.

Целью исследования является получение аналитических решений задачи изгиба полубесконечной плиты на упругом основании Винклера с одновременным учетом неполного контакта конструкции фундамента с основанием, и влиянием продольных усилий, приложенных в срединной плоскости плиты.

Метод исследований. Для получения аналитического решения использован метод обобщенных решений с применением интегральных преобразований Фурье [1,2].

Рассмотрим задачу изгиба полубесконечной плиты на винклеровском упругом основании при действии кроме внешней нагрузки, продольных усилий, приложенных в срединной плоскости, применяемые при изучении напряженно -деформированного состояния краевых участков плит и учета неполного контакта плиты с основанием в виде траншеи, расположенной вдоль оси *У* (рис.1) [3,4,5,6].

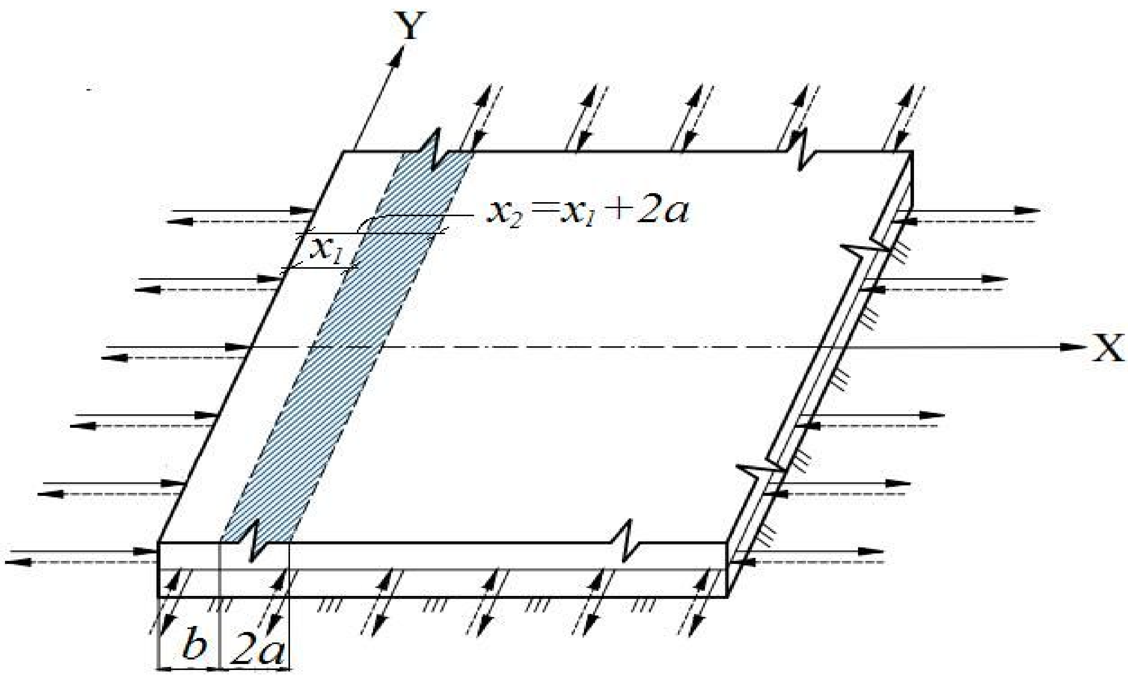

Рис. 1. Полубесконечная плита на винклеровском упругом основании при действии внешней нагрузки, продольных усилий, приложенных в срединной плоскости, и учета неполного контакта плиты с основанием в виде траншеи, расположенной вдоль оси *У* на удалении он края плиты

В работе [3] рассмотрена задача изгиба бесконечной плиты с условиями аналогичными в данной работе. В данном случае плита занимает не всю плоскость, а её половину. Для решения уравнения в этом случае воспользуемся методом [1]. Продлим плиту до бесконечной, а в уравнении кроме заданной нагрузки $q_0(x,y)$ приложим к краю плиты нагрузки $q_i(x,y)$ и дифференциальное уравнение изгиба плиты имеет вид [2,4,5,6]:

$$D\ \ W(x,y)\ K\ (x\ \ b\ \ 2a)\ \ (b\ \ x)\ W(x,y)\ \ N_x \frac{^2W(x,y)}{x^2} N_y \frac{^2W(x,y)}{y^2}$$

$$N_{xy}\frac{^2W(x,y)}{x\,y}\ \ q_0(x,y)\ \ q_1(x,y), \qquad (1)$$

здесь D − цилиндрическая жесткость плиты; K −коэффициенты постели основания; (a) функция Хевисайда, введение которой позволяет учесть отсутствие основания под частью плиты; $2a$ ширина траншеи (неполного контакта соснованием) в основании;

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ оператор Лапласа; N_x, N_y − интенсивностьсжимающих (растягивающих) усилий вдоль осей x и y, считаются положительными при растяжении; N_{xy} интенсивность касательных усилий в срединной плоскости.

В дальнейшем в связи с малой интенсивностью касательных усилий, приложенных в срединной плоскости, не снижая общности задачи, положим $N_{xy}\,0$.

Перейдя к безразмерным координатам $x_1\; x\,l^{1}$, $y_1\; y\,l^{1}$, $a_1 a\,l^{1}$ и к новым функциям, получим $q_1(x,y)\; q(x,y)\,K^{1}$; $l\;\frac{D^{1/4}}{K^{1/4}}$. Опуская индекс 1, получим следующее уравнение относительно прогиба плиты:

$$(x\;b\quad 2a)\;(b\;x)\;2\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,{}_1\;2\;\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,{}_2\,W(x,y)\;q_0(x,y)\;q_K(x,y), \qquad (2)$$

где $_1\;2\frac{N_x l^2}{D}$; $_2\;2\frac{N_y l^2}{D}$; $W(x,y)$ функция прогиба; $q_0(x, y)$ заданная нагрузка; $q_K(x, y)$ дополнительная функция, определяемая следующим выражением, которая учитывает разрывы функции $W(x,y)$ и её производных.

$$q_\kappa\;x,y\quad L_\kappa\;x,y\quad A_\kappa(y)\;x,\quad (K\;1,2), \qquad (3)$$

здесь L_K операторы, сопряженные операторам граничных условий, которые имеют вид:

$$L_1(x,y)\quad\frac{\partial^2}{\partial x^2}\quad\frac{\partial^2}{\partial y^2};\;L_2(x,y)\quad\frac{\partial^3}{\partial x^3}\quad(2\quad)\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2}, \qquad (4)$$

(x) дельта функция; $A_K(y)$ неизвестные функции.

Если на плиту действует вертикальная нагрузка, то на дополненной части плиты можно всегда считать нагрузку симметричную заданной относительно оси $У$. В этом случае достаточно в правой части уравнения (2) приложить одну функцию $(K\;1)$. Для определенности рассмотримвертикальную нагрузку $q_0(x,y)$, тогда прогиб плиты определяется из решения дифференциального уравнения:

$$2\quad\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,{}_1\;2\;\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,{}_2\quad(x\;b\;2a)\;(b\;x)\;W(x,y)\;q_0(x,y)\;q_1(x,y). \qquad (5)$$

Решая уравнение (5) с помощью двумерного преобразования Фурье, получим выражения вида [1,2,3]:

$$2\quad 2\;{}_2\quad 2\;{}_1\;{}^2\;2\;{}_2\quad 2\quad 1\,W(,)\frac{2}{}\int_0\int_0 W(x,y)\;(x\;b\;2a)\;(b\;x)\cos\;x\cos\;ydxdy$$

$$q_0(,)\quad\frac{2}{}\int_0\int_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\quad\frac{\partial^2}{\partial y^2}A_1(y)\,(x)\cos\;x\cos\;ydxdy. \qquad (6)$$

Рассмотрим двойные интегралы, входящие в (6) и, учитывая свойства функции Хевисайда (x), и дельта функции Дирака (x), преобразуем их к виду:

$$2 \; \_ \; W(x,y)\;(x\;b\;2a)\;(b\;x)\cos\;x\cos\;ydxdy$$

0 0

$$\sqrt{\tfrac{2}{}}\int_0 W(x,\;)\;(x\;b\;2a)\;(b\;x)\cos\;xdx \quad \sqrt{\tfrac{2}{}}\int_0 W(x,\;)\cos\;xdx \quad \sqrt{\tfrac{2}{}}\int_0^b W(x,\;)\cos\;xdx$$

$$\sqrt{\tfrac{2}{}}\int_0 W(x,\;)\cos\;xdx \quad \sqrt{\tfrac{2}{}}\int_0^b W(x,\;)\cos\;xdx \quad \sqrt{\tfrac{2}{}}\int_0 W(x,\;)\cos\;xdx$$

$$\sqrt{\tfrac{2}{}}\int_0 W(x,\;)\cos\;xdx \quad \sqrt{\tfrac{2}{}}\int_0^b W\;(x,\;)\cos\;xdx; \qquad (7)$$

$$\frac{2}{}\int_0\int_0 \frac{^2}{x^2}\;\frac{^2}{y^2}\;A_1(y)(x)\cos\;x\cos\;ydxdy\;A_1(\;)^{22}. \qquad (8)$$

Подставляя (7) и (8) в (6), получим:

$$^2\;\;^2\;^2\;2_1\;\;^2\;\;2_2\,W(,)\;\;\frac{2}{}\int_0 W(x,\;)\cos\;xdx\;q_0(\,,\,)\;A_1(\;)\;\;^2\;\;^2. \qquad (9)$$

Отсюда определим трансформанту Фурье функции прогибов (6):

$$W(,)\;\;\sqrt{\tfrac{2}{}}\int_b^{b\;2a} W(x,\;)\cos\;xdx\;E(\,,\,)\;\;{}^{q}{}_{0}\;\;(,)\;A_1()\;\;^2\;\;^2, \qquad (10)$$

где $E(,)\;\;\dfrac{1}{^2\;\;^2\;^2\;2_1\;\;^2 2_2\;\;^2\;\;1}$.

Применив к (10) двумерное cos-преобразование Фурье, получим выражение для функции прогибов $W(x,y)$ [1,5,6]:

$$W(x,y)\;\;\frac{2}{}\int_b^{b\;2a} W(x,\;)\cos\;xdx\;E(\,,\,)\,q_0(\,,\,)\;A_1(\;)\;\;^2\;\;^2; \qquad (11)$$

или

$$W(x,y)\;\;\frac{2}{}\int_b^{b\;2a} W(t,\;)\int_0 K(x,\;,t)\cos\;yd\,dt\;\;\frac{1}{^2}\int_0 A_1(\;)\,_0(\,,x)\cos\;yd\;\;W(x,y). \; (12)$$

Ядро этого интегрального уравнения $K(x,\;,t)$, также определяется по формулам:

$$K(x,y,t)\;\;\frac{4}{^2}\int_0\int_0 E(\,,\,)\cos\;x\cos\;y\cos\;td\,d\;\;\;\frac{2}{}\int_0 K(x,\;,t)\cos\;yd\;, \qquad (13)$$

где $K(x,\;,t)\;\;\dfrac{2}{}\displaystyle\int_0 E(\,,\,)\cos\;x\cos\;td\;\;\dfrac{1}{\sqrt{^4\;\;1}}\;e^{A(U)}\;\;B\cos(U)B\;\;A\sin(U)B$

$$e^{A}\;(B\cos\;B\;\;A\sin\;B)\;. \qquad (14)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$U\;\;x\;\;t\,;x\;\;t\,;A\;\;\sqrt{\frac{\sqrt{^4 1\;\;^2}}{2}}\;;B\;\;\sqrt{\frac{\sqrt{^4\;\;1\;\;^2}}{2}}.$$

Правой частью уравнения (12) является функция прогибов бесконечной плиты при полном контакте с основанием. Применив к этому интегральному уравнению (12) cos-преобразование Фурье по координате y, получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно трансформанты функции прогибов плиты:

$$W(x,y) \int_{b}^{2a} W(t,\ )K(x,\ ,t)\,dt \; W(x,\ ) \; \frac{1}{2} A_1(\ )_0(\ ,x)\cos\ yd\ , \qquad (15)$$

где $_0(\ ,x)\ M_2(\ ,x)\ \ ^2 M_0(\ ,x)$;

$M_0 \quad (\ ,x) \quad \frac{e^{xA}}{2\sqrt[4]{\ \ 1}}(B\cos Bx\ \ A\sin Bx)$

здесь (16)

$$M_2(\ ,x)\frac{}{2}e^{xA}(B\cos Bx\ A\sin Bx)$$

Неизвестную функцию $A_1(\ )$ найдем из граничных условий. Для этого сначала преобразуем (15), с учетом ядра интегрального уравнения (12) при $x\ b$ (рис.1)

$$W(x,\ )\ W(x,\ )\ C_1(\ ,b,a)\ \ _1(\ ,x)\ C_2(\ ,b,a)\ \ _2(\ ,x)\ \ \frac{1}{2}\ A_1(\ )\ _0(\ ,x), \qquad (17)$$

где $C_i(\ ,b,a)\ \frac{1}{\sqrt{\ ^4\ \ 1}}\int_b^{b\ a} W(t,\ )_i(\ ,t)dt$. (18)

$_i(\ ,x)$ выражается в явном виде [6].

Предположим, что плита свободно лежит на упругом основании, тогда на краю при $x\ 0$ следует удовлетворить граничным условиям:

$$M_x(0,y)\ \ 0;\ N_x(0,y)\ \ 0\,. \qquad (19)$$

Второе условие удовлетворяется автоматически, первое после cos-преобразования Фурье по переменной $У$, примет вид:

$$\frac{d^2W(x,\ )}{dx^2}\ \ ^2\ W(x,\ )\Big|_{X\ 0}\ 0\,. \qquad (20)$$

Подставив (17) в (20) и произведя необходимые преобразования, определим функцию $A_1(\ )$:

$$A_1()\ 2\ \ M(0,)(1\ )\ \ ^2 C_1(\ ,b,a)\ C_2(\ ,b,a)\ \ ^1(\ )\,, \qquad (21)$$

где $(\ )\ \ \frac{}{2}B\,2(1\ \ ^2\ )\frac{1(1\ )^4}{\sqrt{\ \ ^4 1}}$. (22)

Значение функции $M_x(0,\ )$ зависит от приложенной к плите нагрузки (сосредоточенная сила, приложенная в центре плиты, произвольная нагрузка) приведены в [3].

Приведем уравнение (15), (17) к каноническому виду интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Подставив (18) в (21), получим:

$$A_1()2M\ (x,\ )\ \frac{(1\ )^2}{\sqrt[4]{\ \ 1}}\int_0 W(t,\ )_1(\ ,t)\ \frac{1}{\sqrt{\ ^4\ 1}}\int_0 W(t,\ )_2(\ ,t)dt\ \ ^1(\ ).(23)$$

$$A_1^{M_x(x,\ )}(\ )\ \ 2\frac{}{(\ )}\ \int_0 W(t,\ )\frac{(1)\ \ ^2{}_1(\ ,t)\ \ _2(\ ,t)}{(\ )\sqrt{\ ^4 1}}dt\ . \qquad (24)$$

Теперь подставим (24) в (15), в результате получим:

$$W\ \ (x,\ )\int_b^{2a} W(t,\ )K(x,\ ,t)\,dt\ \ W(x,\ )$$

$$\frac{_0(\ ,x)}{2} \quad 2\frac{^{M}{}_{x}\ (x,}{} \quad \int_b^{b\ 2a} W(t,\ )\frac{1 \quad ^2 \quad _1 \quad ,t(\ ,t)_2}{\sqrt{(\ )^4}\quad 1} dt \quad ;(25)$$

или

$$W(x,\ ) \quad \int_b^{b\ 2a} W(t,\ )\ K(x,\ ,t)\ \frac{1 \quad ^2{}_1\ ,t \quad _2\ ,t \quad _0\ ,x}{\sqrt{\ ^4\quad 1}}\ dt$$

$$W(x,\ ) \quad \frac{M_x \quad x\ ,0,x}{} \quad ; \qquad (26)$$

или

$$W(x,\ )\ \int_b^{b\ 2a} W(t,\ )\,K_1(x,\ ,t)\,dt\ \ W_1(x,\ ). \qquad (27)$$

где ядро интегрального уравнения $K_1(x,\ ,t)$ может определяться как сумма ядра $K(x,\ ,t)$ интегрального уравнения бесконечной плиты и функции учитывающей влияние компенсирующей (обобщённой) функции:

$$K_1(x,\ ,t) \quad K(x,\ ,t)\frac{1 \quad ^2{}_1\ ,t \quad _2\ ,t \quad _0\ ,x}{\sqrt{\ ^4\quad 1}}, \qquad (28)$$

а правая часть интегрального уравнения представляет собой функцию прогиба бесконечной плиты при полном контакте с основанием.

$$W_1(x,\ )\ \ W(x,\ ) \quad \frac{M_x(x,\ )_0\ (\ ,x)}{}. \qquad (29)$$

Применив обратное преобразование по переменной к выражению (27), получим выражения прогибов в полубесконечной плите на упругом основании с учетом неполного контакта с основанием и продольных усилий, приложенных в срединной плоскости плиты:

$$W(x,\ )\ \ \int_0 W(x,\ )\cos\ yd\ ; \qquad (30)$$

$$W(x,y) \quad \frac{2}{}\int_0\int_0 E(\ ,\ )\cos\ x\cos\ y \quad \sqrt{\frac{2}{}}\int_b^{b\ 2a} W(t,\ )\cos\ tdtd\ d\ \ W(x,y)$$

$$\frac{2}{}\int_0\int_0 E,A_1 \quad ^{22}\ \cos\ x\cos\ yd\,d\ . \qquad (31)$$

Дифференцируя выражение (31), можно определить изгибающие моменты и поперечные силы в полубесконечной плите:

$$M_x(x,y) \quad \frac{2}{}\int_0\int_0 E(,) \quad ^2 \quad ^2\cos\ x\cos\ y \quad \sqrt{\frac{2}{}}\int_b^{b\ 2a} W(t,\ )\cos\ xdtd\ d\ \ M_x(x,y)$$

$$E \quad \int_0\int_0$$

$$M\quad (x,y) \quad \frac{2}{}\int_0\int_0 E(\ ,\ ) \quad ^2 \quad ^2\cos\ x\cos\ y \quad \sqrt{\frac{2}{}}\int_b^{b\ 2a} W(t,\ )\cos\ tdtd\ d\ \ M\quad (x,y)$$

$$\frac{2}{}\int_0\int_0 E\quad ,A_1 \quad ^2 \quad ^{22}_2 \quad \cos\ x\cos\ yd\ d\ ;$$

(32)

$$Q_x(x,y) \frac{2}{\ } \int_0 \int_0 E(,)^3 \; 2^2 \cos x \cos y \sqrt{\frac{2}{\ }} \int_b^{b} {}^{2a} W(t,) \cos dtd\, d \; Q_x(x,y)$$

$$\frac{2}{\ } \int_0 \int_0 E\ , A_1 \ {}^2 \ {}^2 \ {}^3 2 \ \ {}^2 \cos x \cos yd\, d \quad ;$$

$$Q_y(x,y) \frac{2}{\ } \int_0 \int_0 E(,)^3 2 \ {}^2 \cos x \cos y \sqrt{\frac{2}{\ }} \int_b^{b} {}^{2a} W(t,) \cos tdtd\, d \; Q_y(x,y)$$

$$\frac{2}{\ } \int_0 \int_0 E\ , A_1 \ {}^2 \ {}^2 \ {}^3 2 \ \ {}^2 \cos x \cos yd\, d \quad .$$

В полученных выражениях для прогибов, изгибающих моментов и приведенных поперечных сил $W(x,y)$, $M_x(x,y)$, $M_y(x,y)$, $Q_x(x,y)$, $Q_y(x,y)$ представляют собой прогибы, изгибающие моменты и приведенные поперечные силы в бесконечной плите при полном контакте с основанием.

Вывод: Итак, получено аналитическое решение задачи изгиба полубесконечной плиты на упругом основании Винклера с одновременным учетом неполного контакта конструкции фундамента с основанием, и влиянием продольных усилий, приложенных в срединной плоскости плиты.

Список литературы

1. Травуш В.И. Метод обобщенных решений в задачах изгиба плит на линейно-деформируемом основании [Текст] / В.И. Травуш // Строительная механика и расчет сооружений. – 1982. –№1.– 24-28 с.
2. Маруфий А.Т. Изгиб полубесконечной плиты лежащей на упругом основании Винклера с учетом влияния продольных усилий [Текст] / А.Т. Маруфий, А.Т. Турганбаев // Научный вестник ФерГУ.−1996.–№1.– 70-73 с.
3. Маруфий А.Т. Изгиб бесконечной плиты, лежащей на винклеровском упругом основании с учетом влияния продольных усилий и неполного контакта с основанием [Текст] /А.Т. Маруфий, Э.С. Рысбекова // Вестник КГУСТА. –2015. –№2.− 66-70 с.
4. Маруфий А.Т. Расчет краевых участков плит лежащих на упругом основании при отсутствии основания на части плиты [Текст] / А.Т. Маруфий //Научный вестник ФерГУ.−1996. − №1.– 65-69 с.
5. Маруфий А.Т. Расчет плит на упругом основании при отсутствии основания под частью плиты [Текст]/ А.Т. Маруфий //Основания, фундаменты и механика грунтов. - М.:-1999.–№4.– 27-31 с.
6. Маруфий А.Т. Изгиб бесконечной плиты, лежащей на винклеровском основании с учетом поперечной и продольной нагрузок [Текст] / А.Т. Маруфий, А.Т. Турганбаев // Научный вестник ФерГУ.−1996.–№3. –51-53 с.