УДК 62-50

РОБАСТНОСТЬ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ: АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД

ИНТЕРВАЛДЫК ДИНАМИКАЛЫК СИСТЕМАЛАРДЫН РОБАСТТУУЛУГУ: АЛГЕБРАЛЫК МЕТОДУ

Оморов Роман Оморович, *д.т.н., проф., член-корр. НАН КР, г.н.с. Института физики им. акад. Ж. Жеенбаева НАН КР, 720071, г.Бишкек, пр. Чуй, 265а, e-mail: romano_ip@list.ru*

Аннотация: Рассматривается алгебраический метод исследований робастной устойчивости непрерывных и дискретных интервальных динамических систем. Как известно, основоположником алгебраического направления исследований робастности интервальных систем является российский советский ученый В.Л. Харитонов. В работах В.Л. Харитонова 1978 года решены вопросы об устойчивости семейства полиномов непрерывного времени с интервальными коэффициентами. Им было установлено, что для устойчивости интервального полинома необходимо и достаточно устойчивость лишь четырех угловых полиномов семейства, которые теперь носят название полиномов Харитонова. В настоящее время получены много новых результатов в теории робастной устойчивости, это прежде всего реберная теорема и дискретные аналоги и варианты теорем Харитонова. Советскими и российскими учеными - Я.З. Цыпкиным, Б.Т. Поляком, Ю.И. Неймарком разработаны частотные критерии робастной устойчивости типа Михайлова, Найквиста, D –разбиения. В данной работе представлены оригинальные результаты, полученные автором для непрерывных и дискретных линейных интервальных динамических систем, названные *Алгебраическим методом робастной устойчивости*. Приведены основные результаты рассматриваемого метода для интервальных систем как в непрерывном, так и в дискретном времени. Сформулированы соответствующие теоремы, доказанные в работах автора, указанных в списке литературы. Для дискретных систем получен дискретный аналог теоремы Харитонова. Достоверность результатов метода апробирована на известных контрпримерах к известной теореме Биаласа и других исследователей проблем робастной устойчивости интервальных систем.

Ключевые слова: интервальная динамическая система, робастная устойчивость, интервальный характеристический полином, угловые полиномы Харитонова, интервальная матрица, сепаратные угловые коэффициенты, многогранник матриц, дискретный аналог теорем Харитонова, точка и интервал перемежаемости, контрпримеры к теореме Биаласа.

ROBUSTNESS OF THE INTERVAL DINAMIC SYSTEMS: ALGEBRAIC METHOD

Omorov Roman, *Doctor of Engineering, Chief Researcher the Instiute of Physics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, 720071, Kyrgyzstan, Bishkek, Chui av., 265a, e-mail: romano_ip@list.ru*

Abstract: The algebraic method of researches of robust stability of continuous and discrete interval dynamic systems is considered. It is known that a founder of the algebraic direction of researches of robustness of interval systems is the Russian Soviet scientist V.L. Kharitonov. In V.L. Kharitonov's works of 1978 issues of stability of family of polynoms of continuous time with interval coefficients are resolved. To them it was established that it is necessary and sufficiently for stability of an interval polynom also enough stability of only four angular polynoms of family which carry the name of polynoms of Kharitonov now. Now many new results in the theory of robust stability are received, it is first of all the costal theorem and discrete analogs and versions of theorems of Kharitonov. The Soviet and Russian scientists - Ya.Z. Tsypkin, B.T. Polyak, Yu.I. Neymark developed frequency criteria of robust stability like Mikhaylov, Nyquist, by D – splittings. In this work the original results received by the author for continuous and discrete linear interval dynamic systems, called the *Algebraic method of robust stability* are presented. The main results of the considered method for interval systems both in continuous, and are given in discrete time. The corresponding theorems proved in the works of the author specified in the list of references are formulated. For discrete systems the discrete analog of the theorem of Kharitonov is received. The reliability of results of a method is approved on the known counterexamples to the known theorem of Bialas and other researchers of problems of robust stability of interval systems.

Keywords: the interval dynamic system, robust stability, interval characteristic polynom, angular polynoms of Kharitonov, interval matrix, separate slopes, polyhedron of matrixes, discrete analog of theorems of Kharitonov, point and interval of variabless, counterexamples to Bialas's theorem.

Введение. Работа В.Л. Харитонова [9] вызвала огромный интерес к проблеме исследований робастности интервальных динамических систем [1-8, 11, 13, 15, 16]. В современной теории интервальных динамических систем существуют два альтернативных направления [1, 2, 6-8]:
- алгебраическое или Харитоновское направление;
- частотное или направление Цыпкина – Поляка.

В настоящей работе рассматривается *алгебраический метод* исследования робастности как непрерывных, так и дискретных интервальных динамических систем, основы которой заложены в работах [3, 4, 15, 16].

Постановка задачи. Рассматриваются линейные динамические системы порядка n, непрерывная

$$\dot{x} = Ax, x(t_0) = x_0, \qquad (1)$$

и, дискретная

$$x(m+1) = Ax(m),\ m = 1,2,3,\ldots, \qquad (2)$$

где $x = x(t) \in R^n$, x(m) - вектора состояния, $A \in R^{nxn}$ - интервальная матрица с элементами $a_{ij}, i, j = \overline{1,n},$ представляющие интервальные величины $a_{ij} \in [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$ с угловыми значениями $\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}, \underline{a}_{ij} \leq \overline{a}_{ij}$.

Требуется определить условия робастной устойчивости систем (1) и (2).

I. Непрерывные системы

Основные результаты. В основополагающей для рассматриваемого метода работах [3, 15] получены результаты в виде строго доказанных теоремы 1 и леммы к ней о робастной устойчивости систем (1) по условиям гурвицевести четырех угловых полиномов Харитонова, составленным по последовательным сепаратным угловым коэффициентам $b_i, (\underline{b}_i, \overline{b}_i, i = \overline{1,n})$ характеристических полиномов системы (1):

$$f(\lambda) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \ldots + b_n = 0\,. \qquad (3)$$

Приведем эти теорему 1 и лемму.

Теорема 1. Для того чтобы положение равновесия x=0 системы (1) было асимптотически устойчиво при всех $A \in D$ или, чтобы интервальная матрица А была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы были гурвицевы все четыре угловые полиномы Харитонова, составленные по последовательным сепаратным угловым коэффициентам $b_i, (\underline{b}_i, \overline{b}_i, i = \overline{1,n})$ характеристических полиномов (3) системы (1).

Данная теорема доказана на основе следующей леммы.

Лемма. Сепаратные угловые коэффициенты $b_i, (\underline{b}_i, \overline{b}_i, i = \overline{1,n})$ образуются как соответствующие коэффициенты полиномов (3), либо при угловых значениях элементов $a_{ij}, i, j = \overline{1,n}$, матрицы А, либо при нулевых значениях некоторых элементов (если интервал принадлежности включает нуль).

Как нетрудно видеть из леммы, для нахождения коэффициентов $b_i, (\underline{b}_i, \overline{b}_i, i = \overline{1,n})$, в общем случае необходимо применение оптимизационных методов нелинейного программирования.

К теореме 1, доказательство которой приведено в приложениях работ [3, 15], необходимо сделать следующее уточняющее замечание.

Замечание. Из основного аргумента доказательства теоремы 1, связанного с наличием четырех угловых полиномов Харитонова следует, что при отсутствии полного множества (набора) из четырех угловых полиномов условия теоремы 1 необходимы, но могут быть недостаточны для устойчивости системы (1).

Случай соответствующий приведенному *замечанию* может возникнуть тогда, когда сепаратные угловые коэффициенты полиномов (3) взаимосвязаны и в итоге сужают набор угловых коэффициентов до количества менее четырех.

Справедливость доказанной теоремы 1 подтверждается аннулированием известных контрпримеров к теореме Биаласа [13].

Так, теорема 1 апробирована на различных контрпримерах теоремы Биаласа, в частности из работы [11], где рассматривается матрица

$$A = \Omega_r = \begin{bmatrix} -0.5-r & -12.06 & -0.06 \\ -0.25 & 0 & 1 \\ 0.25 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где $r \in [0,1]$, для которого подтверждена справедливость теоремы 1.

Но в случае матрицы $A = \Omega_r$ из [11] можно наглядно рассмотреть справедливость приведенного выше замечания к теореме 1.

Действительно, в данном случае последовательные сепаратные угловые коэффициенты образуют неполное множество угловых коэффициентов, поскольку

$$\begin{gathered} b_1 = -\sum_{i=1}^{3} a_{ij} = 1.5 + r = b_2 = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ii}a_{jj} - \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}a_{ji}, \\ b_3 = \sum_{i,j,k=1}^{3} a_{ij}a_{jk}a_{kj} - \sum_{i,j,k=1}^{3} a_{ij}a_{jk}a_{ki} - a_{11}a_{22}a_{33} = 4r + 2.06, \end{gathered} \quad (5)$$

отсюда сепаратные угловые коэффициенты:

$\underline{b}_1 = 1.5; \overline{b}_1 = 2.5; \underline{b}_2 = 1.5, \overline{b}_2 = 2{,}5; \underline{b}_3 = 2.06, \overline{b}_3 = 6.06.$

Соответственно, угловых полиномов Харитонова в данном случае будет только два

$$f_1(\lambda) = \lambda^3 + 1.5\lambda^2 + 1.5\lambda + 2.06 = f_2(\lambda),$$
$$f_3(\lambda) = \lambda^3 + 2.5\lambda^2 + 2.5\lambda + 4.06 = f_4(\lambda), \qquad (6)$$

т.е. полного набора 4-х угловых полиномов, указанных в работах [3, 15] не будет.

Поэтому, по угловым полиномам (6) система (1) будет всюду при $r \in [0,1]$ устойчива, хотя известно, что при $r \in [0.5 - \sqrt{0.06},\ 0.5 + \sqrt{0.06}]$ эта система неустойчива.

Теорема 1 и лемма позволяют решить задачу о реберной гипотезе для многогранников матриц [1].

Известно [1], что многогранником матриц называется множество

$$P = \left\{ P_s = \sum_{i=1}^{m} s_i P_i : s_i \geq 0, i = \overline{1,m}, \sum_{i=1}^{m} s_i = 1 \right\}, \qquad (7)$$

где $P_i, i = \overline{1,m}$ - постоянные матрицы.

В работе [1] сформулирована гипотеза об условиях устойчивости многогранника P (7) в следующем виде:

Гипотеза. Многогранник P устойчив тогда и только тогда, когда ребра P устойчивы, т.е. матрица

$$sP_i + (1-s)P_j, \qquad (8)$$

устойчива при любых $i, j = \overline{1,m}, s \in [0,1]$.

Но в работе [12] на контрпримерах показано, что данная гипотеза неверна для строго гурвицева случая.

Противоречия в реберной гипотезе разрешены на основе следующей реберной теоремы 2, доказанной в работах [3, 15].

Теорема 2. Для устойчивости многогранника матриц P необходимо и достаточно, чтобы выпуклые ребра P были устойчивы, т.е. матрица

$$s_1 P_i + s_2 P_j, \qquad (9)$$

устойчива при любых $i, j = \overline{1,m}, s_1 \in [-1.0], s_2 \in [0,1]$.

В данном случае многогранник матриц P представлен в виде:

$$P = \left\{ P_s = P_{s1} + P_{s2} : P_{s1} = \sum_{i=1}^{m} s_{1i} P_i, \quad P_{s2} = \sum_{i=1}^{m} s_{2i} P_i : s_{1i} + s_{2i} = s_i \geq 0, i = \overline{1,m}, \sum_{1}^{m} s_i = 1 \right\}. \qquad (10)$$

Справедливость теоремы 2 также подтверждается аннулированием всех известных контрпримеров из работы [12].

II. Дискретные системы

Как известно, публикация работы [9] дала импульс для поиска многими исследователями дискретных аналогов теорем Харитонова [1, 4, 5, 7, 9, 15]. Так в работе [1] указано, что «дискретный вариант харитоновского условия четырех многочленов отсутствует». Но здесь же отмечается, что в настоящее время получены [14] дискретные аналоги слабой и сильной теорем Харитонова. Но эти аналоги теорем Харитонова имеют определенные ограничения, накладываемые на интервальные области коэффициентов [1] . Эти ограничения были сняты в работах [4, 5, 16] , где получены аналоги теорем Харитонова с использованием теоремы Шура [10]. Также в [4, 5, 16] сформулированы теоремы, являющиеся дискретными аналогами результатов работы [9] по интервальным матрицам и многогранникам матриц.

Далее, рассматривается обобщение результатов, полученных в работе [4, 16] с учетом выводов приведенных выше для непрерывных систем.

Основные результаты. Для дискретных систем, используя z - преобразование, получаем интервальный характеристический полином

$$f(z) = \det(zI - A) = \sum_{i=0}^{n} b_i z^{n-i}, \quad b_i \in [\underline{b}_i, \bar{b}_i], \underline{b}_i \le \bar{b}_i. \tag{11}$$

Для определения условий устойчивости воспользуемся теоремой Шура [10], т.е. условиями вида

$$|b_0| > |b_n|, \tag{12}$$

для последовательности полиномов, определяемых рекуррентными соотношениями

$$f_i(z) = \left[b_0 f(z) - b_n f(1/z) z^n\right] / z, \dots, f_{i+1}(z) = \left[b_{0,i} f_i(z) - b_{n,i} f_i(1/z) z^{n-1}\right] / z, \tag{13}$$

где $b_{0,i}, b_{n,i}$ - соответственно старший и младший коэффициенты i-го ($i = \overline{1, n-2}$ полинома $fi(z)$.

Определение. Точками перемежаемости для коэффициентов b_i, $i = \overline{0, n}$ будем называть – точки на действительной оси, в которых происходят переходы корней полинома (11), через единичную окружность на плоскости корней, а *интервалами перемежаемости* – соответственно интервалы, в которых корни находятся либо внутри, либо вне единичного круга (рис.1).

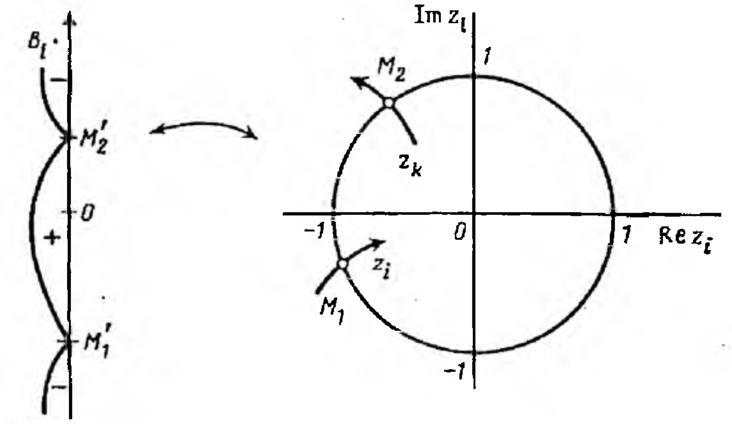

Рис. 1. Точки (M_1', M_2') и интервалы перемежаемости $(-\infty, M_1')^-$, $(M_1', M_2')^+$, $(M_2', +\infty)^-$ — для коэффициента b_i

В работах [4, 16] сформулированы основные результаты по определению условий робастной устойчивости дискретных интервальных систем в виде соответствующих теорем 1-6. При этом следует отметить, что, как указано выше на с.3, для случая непрерывных систем [3, 15], справедливость *теоремы 5* имеет ограничение обусловленное *Замечанием* к теореме 1 работ [3, 15], т.е. *теорема 5* верна при полном наборе из 4-х различных полиномов Харитонова.

Справедливость результатов [4, 5, 16] относительно аналога сильной теоремы Харитонова продемонстрированы на известных контрпримерах из [1] и др.

Таким образом, алгоритм определения робастной устойчивости дискретных интервальных динамических_систем будет следующим.

1. Пользуясь формулами леммы к теореме 1 [3, 15], оптимизацией по элементам $a_{ij} \in \left[\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}\right]$, $i, j = \overline{1, n}$, интервальной матрицы А, находятся сепаратные угловые коэффициенты $b_i \in \left[\underline{b}_i, \bar{b}_i\right]$, $i = \overline{0, n}$, интервального характеристического полинома (11).

2. Определяются четыре полинома Харитонова, соответствующие интервальному полиному (11)

$$f_1(z):\{\underline{b}_0,\underline{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3,\underline{b}_4\ldots,\},\ f_2(z):\{\underline{b}_0,\bar{b}_1,\bar{b}_2,\underline{b}_3,\underline{b}_4\ldots,\};$$

$$f_3(z):\{\bar{b}_0,\underline{b}_1,\underline{b}_2,\bar{b}_3,\underline{b}_4\ldots,\},\ f_4(z):\{\bar{b}_0,\bar{b}_1,\underline{b}_2,\underline{b}_3,\bar{b}_4\ldots,\};$$

3. Составляются n неравенств вида (П.2), указанных в Приложении работы [4].

4.Относительно каждого коэффициента $b_i, i=\overline{0,n}$, считая остальные коэффициенты фиксированными, последовательно находятся точки перемежаемости для всех четырех полиномов Харитонова и по всем n неравенствам (см. п.3), начиная с меньших порядков.

5. Если все точки перемежаемости по всем коэффициентам $b_i, i=\overline{0,n}$, не принадле- жат заданным интервалам, то исходный полином (система) устойчив, в противном случае – неустойчив.

В **заключении** к данной работе рассмотрим некоторые сравнительные характеристики изложенных здесь результатов и известных результатов, полученных в работах широко известных авторов алгебраического направления проблемы робастной устойчивости [1, 2, 7, 8, 11-14].

В работах [1, 7] представлены обзоры и постановки задач робастной устойчивости, которые были вызваны известной работой В.Л.Харитонова [9].

В работе Б.Т.Поляка, П.С.Щербакова [8] предложено понятие сверхустойчивости линейных систем управления. При этом сверхустойчивые системы обладают свойствами выпуклости, допускающими простые решения многих классических задач теории управления, в частности, задачи робастной стабилизации при матричной неопределенности. Но существенным ограничением таких систем является практическая узость их класса, определяемого условиями наличия доминирующих диагональных элементов матрицы системы с отрицательными величинами. В данной работе рассматриваются матрицы общего вида.

В работе В.М.Кунцевича [2] получены интересные результаты по робастной устойчивости для линейных дискретных систем. При этом матрица системы задается в классе сопровождающих характеристический полином системы, т.е. в Фробениусовой форме, что также сужает класс рассматриваемых реальных систем.

В работах B.R.Barmish и др. [11,12] предложены контрпримеры к теореме Биаласа [13], которые аннулированы в работах [3, 15].

В работах M.Mansour и др. [14] получены дискретные аналоги слабой и сильной теорем Харитонова [9], которые имеют ограничения, накладываемые на интервальные области коэффициентов или применяется [1, 4, 5, 16] непростая процедура проектирования корней полиномов на отрезок [-1, 1].

Список литературы

1. Джури Э.И. Робастность дискретных систем //Автоматика и телемеханика. 1990. №5. - С.4-28.
2. Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. – Киев: Наук. думка, 2006. – 264 с.
3. Оморов Р.О. Робастность интервальных динамических систем. I.Робастность непрерывных линейных интервальных динамических систем//Теория и системы управления. 1995. №1. - С.22-27.
4. Оморов Р.О. Робастность интервальных динамических систем. II.Робастность дискретных линейных интервальных динамических систем//Теория и системы управления. 1995. №3. - С.3-7.
5. Оморов Р.О. О дискретном аналоге теоремы Харитонова //Наука и новые технологии, 2002, №3. - С. 5-10.
6. Оморов Р.О. Робастная устойчивость интервальных динамических систем. – Бишкек: Илим, 2018. – 104 с.

7. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Робастная устойчивость линейных систем// Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. Т.32. - М.: ВИНИТИ, 1991. – С. 3-31.

8. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Сверхустойчивые линейные системы управления. I. Анализ // Автоматика и телемеханика. 2002. № 8. - С. 37-53.

9. Харитонов В.Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1978. Т.14. № 11. - С. 2086-2088.

10. Цыпкин Я.З. Теория импульсных систем. – М.: Физматгиз, 1958. – 724 с.

11. Barmish B.R., Hollot C.V. Counter-example to a recent result on the stability by S. Bialas // Int. J. Control. 1984. V.39. №5. – P. 1103-1104.

12. Barmish B.R., Fu M., Saleh S.// Stability of a polytope of matrices:. Counterexamples // IEEE Trans. Automatic. Control. 1988. V.AC-33. №6. – P. 569-572.

13. Bialas S. A necessary and sufficient condition for stability of internal matrices// Int. J. Control 1983. V.37.№4.- P. 717-722.

14. Kraus F.J., Anderson B.D.O., Jury E.I., Mansour M. On the robustness of low order Shur polynomials // IEEE Trans. Circ. Systems. 1988. – V. CAS-35, N5.

15. Omorov R.O. Robustness of Interval Dynamic Systems. I. Robustness in Continuous Linear Interval Dynamic Systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. 1996. T. 34. No 3. – P. 69-74.

16. Omorov R.O. Robustness of Interval Dynamic Systems. II. Robustness of Discrete Linear Interval Dynamical Systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. 1996. T. 34. No 4. – P. 1-5.