УДК. 54.258.587

ОБ ОДНОЙ ПРИБЛИЖЕННОЙ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Мухамбетжанов Салтанбек Талапеденович, *директор НИИ «Математики и прикладных технологий» при Атырауском государственном университете им. Халела Досмухамедова, e-mail: mukhambetzhanov_@mail.ru*
Толеуов Тимур Жаксылыкович, *PhD докторант, Актюбинский региональный государственный университет имени Кудайберген Жубанова, e-mail:Timur_Toleuov@mail.ru*

Аннотация. Исследована приближенная математическая модель теории изотермической фильтрации. Известно, что без учета капиллярного давления модель Бакли-Леверетта является основной. Основываясь на реальных расчетах прогноза на сегодняшний день, модель во многих областях положительно зарекомендовала себя. Как правило, с вычислительной точки зрения, аппроксимационные модели требуются для аппроксимации моделей для квантования времени при создании вычислительных алгоритмов. В данной работе предлагаются методы приближенных методов, а именно метод «исчезающей вязкости».

Ключевые слова: Изотермическая фильтрация, капиллярное давление, прогнозные расчеты, аппроксимация, временная зависимость.

ON ONE APPROXIMATE MODEL OF ISOTHERMAL FILTRATION THEORY

Mukhambetzhanov Saltanbek Talapedenovich, *Director of the Research Institute "Mathematics and Applied Technologies" at Atyrau State University. Khalela Dosmukhamedova, e-mail: mukhambetzhanov_@mail.ru;*
Toleuov Timur Zhaksylykovich, *PhD doctoral candidate, Aktobe Regional State University named after Kudaibergen Zhubanov),*

Abstract. An approximate mathematical model of the theory of isothermal filtration was investigated. It is known that without taking into account the capillary pressure, the Buckley-Leverett model is the main one. Based on real forecast calculations to date, the model in many fields has positively recommended itself. As a rule, from a computational point of view, approximation models are required to approximate models for time-slicing when creating computational algorithms. In this paper, methods of approximate methods are proposed, namely, the “vanishing viscosity” method.

Keywords: Isothermal filtration, capillary pressure, forecast calculations, approximation, time slicing.

При изучении фильтрационных процессов важную роль играет математическая модель Баклея-Леверетта.

Необходимо отметить, что уравнение вида

$$U_t + (f(u))_x = 0 \tag{1}$$

Одномерное по пространственным переменным рассматривались многими авторами. Существенный вклад в нелокальную теорию задачи Коши для этого уравнения внесли

О.А.Олейник, А.Н.Тихонов, А.А.Самарский, И.М.Гельфанд. К уравнению (1) относится математическая модель Баклея-Леверетта.

В параболическом случае достаточно исследована разрешимость в работах [1-5] Антонцевым С.Н., Монаховым В.Н., Бочаровым О.Б. и их учениками. Следует отметить, что уравнения вида (1) являются простейшими математическими моделями многих природных явлений, иногда отражающими суть этих явлений. В частности, функция Леверетта определяется экспериментальным путем по материалам Керна. Такой подход не дает желаемых результатов в задачах теории фильтрации.

Подробное уточнение позволяет определить пористая среда либо гидрофильна, либо гидрофобная среда.

Известно, что если $(\varepsilon > 0)$ ε-коэффициент вязкости, то силу вязкостного трения, действующую на каждую частицу пористой среды $x(t)$ и отнесенную к единице массы, можно принять равной $\varepsilon \cdot U_{xx}$. Тогда возвращаясь к математической модели Баклея-Леверетта (далее вместо$U(t,x)$ будем записывать через $s(t,x)$-водонасыщенность)

$$s_t + s \cdot s_x = \varepsilon \cdot s_{xx} \tag{2}$$

где $F'(s) = \frac{1}{2} \cdot s$-функция Леверетта.

Уравнение вида (2) была исследована Бочаровым О.Б. Но при прогнозных расчетах не дали желаемых результатов. Представленный метод при $\varepsilon \to 0$ называется методом «исчезающей вязкости». Учитывая, что $s_t = (\varepsilon \cdot s_x - \frac{s^2}{2})_x$ введем потенциал $U(x,t)$, определяемый равенством

$$dU = sdx + (\varepsilon \cdot s_x - \frac{s^2}{2})_x dt$$

В этом случае $U_x = s, U_t = \varepsilon \cdot s_x - \frac{s^2}{2} = \varepsilon \cdot U_{xx} - \frac{U^2x}{2}$, т.е. функция $U(x,t)$удовлетворяет уравнению

$$U_t + \frac{1}{2} \cdot U_x^2 = \varepsilon \cdot U_{xx} \tag{3}$$

Сделаем в (3) замену$U = -2\varepsilon \cdot lnz$.
Тогда

$$U_t = -2\varepsilon \cdot \frac{z_t}{z},$$

$$U_x = -2\varepsilon \cdot \frac{z_x}{z},$$

$$U_{xx} = -2\varepsilon \cdot \frac{z_{xx}}{z} + 2\varepsilon \cdot \frac{z_x^2}{z^2},$$

Уравнение (3) примет вид

$$-2\varepsilon \cdot \frac{z_t}{z} + 2\varepsilon^2 \cdot \frac{z_x^2}{z^2} = -2\varepsilon^2 \cdot \frac{z_{xx}}{z} + 2\varepsilon^2 \cdot \frac{z_x^2}{z^2}$$

т.е. получено уравнение теплопроводности относительно $z(t,x)$:

$$z_t = \varepsilon \cdot z_{xx} \tag{4}$$

Приведенный метод часто называет преобразованием Флорина-Хопфа-Коула. Из сделанных замен следует, что решение уравнения (2) имеет вид:

$$s = U_x = -2\varepsilon \cdot \frac{z_x}{z}$$

где $z(t,x)$ есть решение (4).

Предположим теперь, что через нагнетательную скважину распространяется волна вида:

$$s(x,t) = s_- + \frac{s_+ - s_-}{2} \cdot \left(1 + sign(x - \omega t)\right) = \begin{cases} s_-, npu\ s < \omega t \\ s_+, npu\ s > \omega t \end{cases} \quad (5)$$

где $\omega = const$. Предположим, что существует обобщенное решение уравнения вида (1) в смысле выполнения интегрального тождества. Для этого необходимо и достаточно, чтобы на линии разрыва $x = \omega t$ было выполнено условие

$$\omega = \frac{dx}{dt} = \frac{F(s_+) - F(s_-)}{s_+ - s_-} \quad (6)$$

Идея метода «исчезающей вязкости» в данном случае заключается, что данное решение (разрывное) вида (5) допустимо. Т.е. при $x \neq \omega t$ решений $S^\varepsilon(x,t)$ уравнения

$$s_t^\varepsilon + (F(s^\varepsilon))_x = \varepsilon \cdot s_{xx}^\varepsilon \quad (7)$$

при $\varepsilon \to 0$ получается как поточечный предел.

Ниже предлагаемый метод И.М.Гельфандом имеет желаемый результат в прикладных задачах.

Учитывая структуру решения $s(x,t)$, будем искать решение уравнения (7) в виде:

$$s^\varepsilon(x,t) = U(\xi),\ \xi = \frac{x - \omega t}{\varepsilon} \quad (8)$$

Подставляя решение такого вида в (7), получаем, что функция $U(\xi)$ является решением уравнения

$$-\omega \cdot v' + \left(F(v)\right)' = v'' \quad (9)$$

При $x \neq \omega t$ функция $s^\varepsilon = v\left(\frac{x - \omega t}{\varepsilon}\right)$ поточечно аппроксимирует при $\varepsilon \to 0$ функцию $s(x,t)$ вида (5) тогда и только тогда, когда функция $v(\xi)$ удовлетворяет граничным условиям:

$$s(-n,t) = s_-\ ,\ s(n,t) = s_+ \quad (10)$$

где n - достаточное большое расстояние от скважины.

Следует отметить, что $v(\xi)$ не является единственным решением, т.е. могут быть $\tilde{v} = v(\xi - \xi_0)$, при любом $\xi_0 \in R$.

Интегрируя (9), получаем

$$v' = -\omega \cdot v + \Phi(v) + C = \widetilde{\Phi}(v) + C,\ C = const \quad (11)$$

Следуя методу И.М.Гельфанда, чтобы автономное уравнение (11) с гладкой правой частью $\widetilde{\Phi}(v) + C$ имело решение, которое стремится к константам s_- при $n \to -\infty$ и s_+ при $n \to +\infty$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

а) s_- и s_+ - особые точки исходного уравнения, т.е. обращают в нуль правую часть уравнения (11):

$$\widetilde{\Phi}(s_-) + C = \widetilde{\Phi}(s_+) + C = 0,$$

т.е. в результате имеем $\widetilde{\Phi}(s_-) = \widetilde{\Phi}(s_+) = -C$.

б) другой вариант между s_- и s_+ нет других особых точек и правая часть (11) на указанном промежутке:

1) положительна при $s_- < s_+$ решение при этом возрастает, т.е.

$$\tilde{\Phi}(v) - \tilde{\Phi}(s_-) > 0,\ \forall v \in (s_-, s_+) \qquad (12)$$

2) отрицательна при $s_- > s_+$, т.е. решение убывает:

$$\tilde{\Phi}(v) - \tilde{\Phi}(s_+) < 0,\ \forall v \in (s_+, s_-) \qquad (13)$$

При выполнении указанных условий интересующие нас решения уравнения (9) задается формулой

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\tilde{\Phi}(v) - \tilde{\Phi}(s_-)} = \xi - \xi_0$$

где

$$s_0 = \frac{s_+ + s_-}{2}$$

-точка расположения скважин.

Приведенные условия (12) - (13) и являются аналитической записью условия допустимости.

Варьируя s_-,s_+, а также $F(s)$, можно строить различные сходящиеся последовательности допустимых обобщенных решений. При этом считать допустимыми и любые поточечные пределы допустимых решений.

В результате получаем, что у решения $s(x,t)$ возможен скачок от s_- к s_+ (в направлении возрастания x). Т.е. на самом деле этот скачок происходит при переходе от водной фазе к нефтяной. При этом выполняются условия допустимого разрыва:

1) при$s_- < s_+$ график функции $F(s)$ на отрезке $[s_+, s_-]$ должен быть расположен ниже хорды с концами $(s_-, F(s_-))$ и $(s_+, F(s_+))$;

2) в случае $s_- > s_+$ график функции $F(s)$ на отрезке $[s_+, s_-]$ должен быть расположен не выше хорды с концами $(s_-, F(s_-))$ и $(s_+, F(s_+))$.

Полученные условия дают возможность регулировать фильтрационные процессы в прискважинной зоне пласта. Условия допустимости разрыва, полученные методом «исчезающей вязкости» прекрасно согласуются с прогнозными расчетами. Действительно, свойство выпуклости функции $F(s)$ в математической модели Баклея-Лаверетта (вверх) вниз по определению означает, что любая хорда, соединяющая точки по прямой линии показывает достоверность самой математической модели Баклея-Лаверетта.

Литература

1. АнтонцевС.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей, Новосибирск: Наука, 1983.
2. Богаров О.Б.Монахов В.Н. Краевые задачи неизотермической двухфазной фильтрации в пористых средах //Динамика сплошной среды: Сб.науч.тр. /АН СССР Сиб.отд-ние. Ин-т гидродинамики, 1988 вып.86. С.47-69.
3. Чарный И.А. Подземная гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1963.
4. Монахов В.Н. Автомодельные решения тепловой двухфазной фильтрации //ПМТФ, 1999. Т.40, №3.
5. Осокин А.Е. Обоснование одного приближенного метода в двухфазной неизотермической фильтрации //Динамика сплошной среды. Сб.науч.тр. /АН СССР. Сиб.отд-ние Ин-т гидродинамики. 1998. Вып.113. С.114-117.

6. Горицкий А.Ю., Кружков С.Н., Чечкин Г.А. Уравнения с частными производными первого порядка. М.: Изд-во центра прикладных исследований при механико-математическом фак-те МГУ, 1999, 96 стр.