УДК 517.928

АСИМПТОТИКА ИНТЕГРАЛОВ СОДЕРЖАЩИЕ БОЛЬШОЙ ПАРАМЕТР В КОМПЛЕКСНЫХ ОБЛАСТЬЯХ
ЧОҢ ПАРАМЕТРИ БОЛГОН ИНТЕГРАЛДАРДЫН КОМПЛЕКСТИК ОБЛАСТАРДАГЫ АСИМПТОТИКАСЫ
ASYMPTOTICS OF INTEGRALS CONTAINING A LARGE PARAMETER IN COMPLEX DOMAINS

Матанов Ш.М.
ЖАГУ, Кыргызстан, 715600, город Жалал-Абад ул. Ленина 57
e – mail: sheralimatanov@yahoo.com.

Аннотация: В данной работе рассматриваются интегралы содержащие, большой параметр в комплексных областьях. Получены асимптотические представления по большому параметру.

Аннотация: Жумушта чоң параметри бар болгон интегралдар косплекстик области каралат. Чон параметр боюнча асимптотика алынган.

Annotation: In this paper we consider integrals containing a large parameter in complex domains. Asymptotic representations with respect to a large parameter are obtained.

Ключевые слова: Интегралы, большой параметр асимптотика, гармонические функции, линии уровня.

Ачкыч сөздөр. Интеграл, чоң параметр, асимптотика, гармоникалык функциялар, деңгээл сызыктар.

Key words: Integrals, large asymptotics, harmonic functions, level lines.

Исследование асимптотического поведения решений сингулярно возмущенных уравнений сводятся к исследованию интегралов содержащих большой параметр [1].

Также асимптотическое представление специальных функций требует рассмотрение интегралов содержащих большой параметр [2].

Следовательно исследование асимптотического поведения интегралов содержащих большой параметр является актуальной задачей.

Пусть рассматривается интеграл

$$\mathcal{I}(t,\lambda) = \int_{t_0}^{t} exp\lambda(F(t) - F(\tau))\,\varphi(\tau)\,d\tau, \tag{1}$$

где $t \in \Omega \subset \mathbb{C}$ - комплексная плоскость, Ω – односвязная область, $t_0 \in \Omega$ и её внутренняя точка λ – большой положительный параметр.

Пусть выполняются условия

U_1. $F(t), \varphi(t) \in Q(\Omega)$ – пронстранство аналитических функций в Ω.

U_2. $\forall t \in \Omega\ (F'(t) \neq 0)$

Задача. Исследовать асимптотическое поведение

$\mathcal{I}(t,\lambda)$ по λ (означает при $\lambda \to +\infty$).

Решение задачи разделим на две части:

1. Топологическая 2. Аналитическая.

В топологической части используя линии уровня функций $ReF(t)$, и $\mathcal{I}mF(t)$ определим структуру области Ω и определим пути интегрирования для интеграла $\mathcal{I}(t,\lambda)$.

Аналитическая часть содержит вычисления касающихся асимптотического поведения $\mathcal{I}(t,\lambda)$ по λ

1. Топологическая часть.

Возьмём функции $ReF(t) \equiv F_1(t_1,t_2)$, $\mathcal{I}mF(t) \equiv F_2(t_1,t_2)$.

Согласно U_1 функции $F_j(t_1,t_2)$ являются гармоническими. Если учесть U_2, то область Ω полностью покрывается сетью взаимно ортогональных линии уровней функций $F_j\ t_1,t_2$ причем через любую точку области проходит единственнная линия уровня функции $F_j(t_1,t_2)$.

Введем в рассмотрение линии уровня

$$L_j \ = \ t\epsilon\Omega\ F_j\ t_1,t_2 \ = L_j - const\ ,\ j = 1{,}2.$$

Лемма. Вдоль линии уровня (L_2) функция $F_1(t_1,t_2)$ строго монотонна, аналогично вдоль (L_1) функция $F_2\ t_1,t_2$ строго монотонна.

Доказателством Леммы можно ознакомится в [3].

Возьмем линию уровня

$$L_{01} \ = \ t\epsilon\Omega\ \ F_1\ t_1,t_2 \ = 0$$

и произвольную точку $t\epsilon\ \ L_{01}$. Существует линия уровня (L_2) проходящая через точку t.

Согласно леммы вдоль линии уровня (L_2) функция $F_1(t_1,t_2)$ строго монотонна, причем $F_1\ t_1,t_2 \ = 0$.

Тогда, в силу произвольности точки t, область Ω линией (L_{01}) разделяются на части Ω_1,Ω_2.

Справедливы соотношения

$$\forall\ t\ \epsilon\ \Omega_1(F_1(t_1,t_2) \le 0\ \vee\ F_1\ (t_1,t_2) \ge 0),$$

причем равенство имеет место только на (L_{01}).

Для определенности возьмём

$$\forall\ t\ \epsilon\ \Omega_1(F_1(t_1,t_2) \le 0). \tag{2}$$

Тогда

$$\forall\ t\ \epsilon\ \Omega_2(F_1(t_1,t_2) \ge 0). \tag{3}$$

Для исследования асимптотического поведения интеграла (1) выберем пути интегрирования.

Рассмотрим следующие случаи:

1. $t\ \epsilon\ \ L_{01}$ 2. $t\ \epsilon\ \Omega_1$ 3. $t\ \epsilon\ \Omega_2$.

Если $t\ \epsilon\ (L_{01})$, то путь состоит из части (L_{01}) соединяющего точки t и $t\ \epsilon\ (\Omega_1 U \Omega_2)$.

Так как $F_j(t_1,t_2)$ гармонические функции, линии уровня являются аналитическими кривыми.

Следовательно уравнения линии уровней можно предствить параметрически в виде $t = t\ \ s$, где s – длина дуги линии уровней.

Уравнение линии уровней функций $F_j\ \ t_1,t_2$ можно представить также в другом виде.

Согласно условия U_1

$$\forall t\ \epsilon\ \Omega((\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial \mathrm{t}_1} \neq 0\ \wedge\ \frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial \mathrm{t}_2} \neq 0) \wedge (\frac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial \mathrm{t}_2} \neq 0 \vee \frac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial \mathrm{t}_1} \neq 0)$$

Возьмём

$$\forall t\ \epsilon\ \Omega\ \ \frac{\partial F_1}{\partial t_2} \neq 0\ \ . \tag{4}$$

Тогда

$$\forall t\ \epsilon\ \Omega\ \ \frac{\partial F_2}{\partial t_1} \neq 0\ \ . \tag{5}$$

Введем в рассмотрение линию уровня

$$F_1\ \ t_1,t_2 \ = L_1. \tag{6}$$

Учитывая (4) из (6) определяем однозначную, безконечно дифференцируемую функцию

$$t_2 = \varphi_{11}(t_1) \tag{7}$$

с областью определения $\lambda_1 < t_1 < \lambda_2$.

Функция (7) является уравнением линии уровня (L_1).

Аналогично, из уравнения

$$F_2\ \ t_1,t_2 \ = L_2$$

с учетом (5) определим функцию

$$t_1 = \varphi_{21}\ \ t_2\ \ ,\ \ \beta_1 < t_2 < \beta_2,$$

которая является уравнением линии уровня (L_2).

2. Аналитическая часть

1. $t\epsilon\ L_{01}$. С учетом выбранного пути интегрирование интеграл (1) представим в виде

$$\mathcal{J}_1(t,\varepsilon)= \int_0^s exp\lambda i(F_{21}\ s\ - F_{21}(s))\,\varphi_1(s)ds, \qquad (8)$$

где

$$F_{21}\ s\ \equiv F_2\ t_1\ s\ ,t_2\ s\ \ , \qquad \varphi_1(s) \equiv \varphi(t_1\ s\ + it_2(s))\cdot t'(s).$$

Отметим, что функции $F_{21}\ s\ ,\varphi_1(s)$ бесконечно дифференцируемы и ограничены для конечных значений s.

Из (8) проведя интегрирование по частьям получаем

$$\mathcal{J}_1\ t,\lambda\ = O\ \lambda^{-1}\ ,\ t\,\epsilon\,(L_{01}). \qquad (9)$$

2. $t\ \epsilon\ \Omega_1$. Для этого случая интеграл (1) можно представить в виде

$$\mathcal{J}\ t,\varepsilon\ = \int_0^s exp\lambda(F\ t(\sigma)\ \ - iF_{21}(s))\,\varphi_1\ s\ ds + \int_0^\tau exp\lambda(F\ t\ \sigma\ \ - \qquad -F(\tau(\sigma)))\,\varphi_2(\sigma)d\sigma, \qquad (10)$$

где $t\ \sigma\ = t_1\ \sigma\ + it_2\ \sigma\ ,\ \sigma$ – длина дуги (L_2) считываемый от точки t до t; $\varphi_2\ \sigma\ = \varphi\ t\ \sigma\ \ \cdot t'\ \sigma\ ;$

$$F\ t\ \sigma\ \ = F_1\ t_1\ \sigma\ ,t_2\ \sigma\ \ + iL_2 \equiv F_1\ t_1\ \sigma\ ,t_2\ \sigma\ \ + iF_{21}\ s\ .$$

Введя обозначение $F_1(t_1\ \sigma\ ,t_2\ \sigma\ ) \equiv F_{11}(\sigma)$ из (10) имеем

$$\mathcal{J}\ t,\lambda\ = exp\frac{F_{11}\ \sigma}{\varepsilon}\ \int_0^s exp\lambda i(F_{21}\ s\ - F_{21}(s))\,\varphi_1\ s\ ds\ +$$

$$+\int_0^\tau exp\lambda(F_{11}\ \sigma\ -F_{11}(\sigma))\,\varphi_2\ \sigma\ d\sigma =$$

$$\mathcal{J}_1\ t,\lambda\ exp\lambda\,F_{11}\ \sigma\ + \int_0^\tau exp\lambda(F_{11}\ \sigma\ - \ \ -F_{11}(\sigma))\ \varphi_2\ \sigma\ d\sigma,$$

или

$$\mathcal{J}\ t,\lambda\ = \mathcal{J}_1\ t,\lambda\ exp\lambda\,F_{11}\ \sigma\ + \int_0^\tau exp\lambda(F_{11}\ \sigma\ - F_{11}(\sigma))\,\varphi_2(\sigma)d\sigma. \qquad (11)$$

При исследовании асимптотического поведения (11) по λ учтем Лемму. Интеграл (11) проинтегрировав по частьям получим

$$\mathcal{J}\ t,\lambda\ = \mathcal{J}_1\ t,\lambda\ exp\lambda(F_{11}(\sigma)) + O(\lambda^{-1}). \qquad (12)$$

Из (12) для значений t находящихся достаточно далека от линии L_{01} получим

$$\mathcal{J}\ t,\lambda\ = O\ \lambda^{-1}\ .$$

3. Пусть $t\epsilon\Omega_2$. В рассматриваемом случае интеграл (1) можно представить в виде (11), причем $(F_{11}(\sigma) > 0)$

Из (11), для точек t расположенных на линиях уровней L_1 $(L_1 \geq -\lambda^{-1}ln\lambda^{-1}$ получим

$$\mathcal{J}(t,\lambda) \to \infty \text{ по } \lambda.$$

При этом надо учесть, что интеграл в (11) имеет порядок λ^{-1}

На основе проведенных вычислений можно сделать следующие выводы:

1. Асимтотическое поведение интегралов вида (1) характеризуются линиями уровней гормонических функций $ReF\ t\ $;
2. Для значений t, для которых $ReF\ t\ \ \leq 0$ интеграл (1) имеет порядок λ^{-1}.
3. Если $ReF\ t\ \ << 0$ то интеграл (1) неограничена.

Список использованной литературы:

1. Алыбаев К.С. Метод линии уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости [Текст] К.С.Алыбаев // Вестник Кыргызского государственного университета. – серия 3, Выпуск 6. –Бишкек, 2001.
2. Копсон Э. Асимптотические разложения [Текст] – С.190-200 /Э.Копсон. – Москва: Мир, 1966.-160с
3. Федорюк М.В. Метод перевала [Текст] /М.В.Федорюк. –Москва: Наука, 1977, -368с