

БОЛОТБЕК Т., КГУСТА им. Н.Исанова, Бишкек, Кыргызская Республика,
e-mail: temir.b.amir@gmail.com

BOLOTBEK T., KSUCTA n.a. N.Isanov, Bishkek, Kyrgyz Republic.

НАСЫРЫНБЕКОВА К.У., КГУСТА им. Н.Исанова, Бишкек, Кыргызская Республика,
e-mail: nkaukhar@mail.ru

NASYRYNBEKOVA K.U., KSUCTA n.a. N.Isanov, Bishkek, Kyrgyz Republic .

ТОКТОГУЛ УУЛУ Ж., КГУСТА им. Н.Исанова, Бишкек, Кыргызская Республика
e-mail: jyldyzbek2018@mail.ru

TOKTOGUL UULU J., KSUCTA n.a. N.Isanov, Bishkek, Kyrgyz Republic .

БОЛОТБЕКОВ А.Б., КГУСТА им. Н.Исанова, Бишкек, Кыргызская Республика
e-mail: nkaukhar@mail.ru

BOLOTBEKOV A.B., KSUCTA n.a. N.Isanov, Bishkek, Kyrgyz Republic.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ПРАКТИКИ ПРИМЕНЕНИЯ СПЛОШНОЙ ФУНДАМЕНТНОЙ ПЛИТЫ НА ПОДЗЕМНЫХ УРОВНЯХ ЗДАНИЙ

THEORETICAL JUSTIFICATION OF PRACTICE IN APPLYING OF A SOLID BASE PLATE AT THE UNDERGROUND LEVELS OF BUILDINGS

Бул макалада тегиши пайдубал плитасынын туруктуу жердеги ийилүүсүн жер алдында имараттарды курууда пайдалануу максатында теориялык маселеси каралган.

***Өзөк сөздөр:** пайдубалдын тегиз плитасы, ийилүү ирмеми, бекемдиктин кыры, тирөөч дубал.*

В статье рассматривается теоретическая задача изгиба сплошной фундаментной плиты на упругом основании в целях применения на практике строительства зданий с подземными уровнями.

***Ключевые слова:** фундаментная сплошная плита, изгибающий момент, ребра жёсткости, подпорная стенка.*

The article deals with the theoretical problem of bending a solid plate on an elastic foundation to put into practice the construction of buildings with underground levels.

***Key words:** solid foundation slab, deflection, bending moment, stiffening rib, retaining wall.*

Подобная задача решалась в работах /1, 2/.

Рассмотрим прямоугольную плиту, ограниченную взаимноперпендикулярными линиями $X=\pm\alpha$ и $y=+b$ и подкрепленную ребрами жесткости. На контуре плиты должны удовлетворяться граничные условия:

$$L_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x=\pm\alpha, y) \omega(x, y) = 0, L_k (y=\pm b, x) \omega(x, y) = 0 \quad (K=1, 2) \tag{1}$$

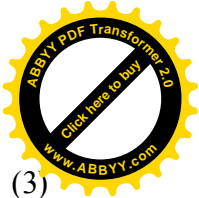
где L_1, L_2 -операторы граничных условий, которые в рассматриваемом случае имеют вид:

$$L_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \partial \frac{\partial^2}{\partial y^2} \pm K_1 \left[\frac{\partial^3}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \right] \pm \beta \frac{\partial^5}{\partial x \partial y^4} \pm K_2 \frac{\partial}{\partial x^3} \tag{2}$$

$$L_2 = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \pm \mathcal{M} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \pm K_3 \pm K_4 \partial \left(\frac{\partial^4}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right).$$

Здесь

$$G = \frac{G\alpha}{Dl}; \quad \beta = \frac{E\gamma_z l^2}{Dl^3}; \quad \mathcal{M} = \frac{E\gamma_k}{Dl}; \quad K_1 \frac{d}{2l};$$



$$K_2 = \frac{K_0 \partial^3 \ell}{12 \Phi}; K_3 = \frac{\partial}{\ell}; K_4 = \begin{cases} 0 \\ \ell^{-1} \end{cases} \quad (3)$$

(3) – физические характеристики ребра жёсткости на краях плиты, собственно при $x = \pm a$ и $y = \pm b$, где d – ширина ребра; $E \mathfrak{Z}_x$, $E \mathfrak{Z}_y$ и $G \mathfrak{Z}_d$ – жесткость ребра соответственно на изгиб относительно оси X и Z и кручение; ℓ – расстояние от центра ребра до середины плоскости плиты; K_0 – коэффициент постели основания; β – цилиндрическая жесткость плиты;

Следует отметить что граничные условия (2) совпадают с граничными условиями, когда коэффициенты

K_1, K_2, K_3, K_4 и β равны нулю.

K_1 – коэффициент, учитывающий эксцентричность приложения поперечной силы, возникающей на краю плиты; K_2 и K_3 – коэффициенты, учитывающие момент и усилие от опора грунта основания под ребром жесткости; K_4 – коэффициент, учитывающий влияние изгибающего момента M_y , возникающего на краю плиты; β – коэффициент, учитывающий положение центра тяжести ребра жёсткости относительно срединной плоскости плиты.

Применяя метод обобщенных решений [2], выражение прогиба плиты получим из решения дифференциальных уравнений:

$$\nabla \nabla W(x, y) = q_0(x, y) + \sum_{k=5}^8 q_k(\pm b, x), \quad (4)$$

где $q_0(x, y)$ – заданная нагрузка, действующая на плиту;

$q_k(x, y)$ – дополнительные нагрузки, которые записываются в форме операторов от обобщенных функций с неизвестной плотностью:

$$q_k(\pm a, y) = L_k(\pm a, y) [A_k(y) \delta(x \pm a)], \quad (K=1, 2, 3, 4); \quad (5)$$

$q_k(\pm b, X)$ при $K=5, 6, 7, 8$ получается из (5) заменой $a \rightarrow b$ и $X \leftrightarrow Y$, где L_k – операторы, сопряженные с операторами граничных условий (2).

Решая уравнение (4) с помощью двумерного преобразования Фурье, получим выражение прогиба плиты:

$$W(x, y) = W_B(x, y) + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^8 \iint_{-\infty}^{\infty} [(\zeta^2 + \eta^2)^2 + 1]^{-1} Q_k(\zeta, \eta) e^{-i\zeta x - i\eta y} d\zeta d\eta \quad (6)$$

где трансформанты Фурье дополнительных нагрузок в рассматриваемом случае имеют вид:

$$Q_1^{+\alpha}(\xi, \eta) = A_1(\xi) \{ (\xi^2 + \eta^2 v) - i\zeta [K_1^{+\alpha}(\xi^2 + (2-v)\eta^2) - G^{+\alpha}\eta^2 + \beta^{+\alpha}\eta^4 + K_7^{+\alpha}] \} e^{i\xi a}, \quad (7)$$

$$Q_2^{+\alpha}(\xi, \eta) = A_2(\zeta) \{ i\zeta (\zeta^2 + (2-v)\eta^2) - \mathcal{M}^{+\alpha}(\xi^2 \eta^4 - K_3^{+\alpha} + K_1^{+\alpha}(v\xi^2 \eta^2 + \eta^4)) \} e^{i\xi a},$$

$Q_3^{-\alpha}(\xi, \eta)$ и $Q_4^{-\alpha}(\xi, \eta)$ получается соответственно из (7) заменой $+\alpha \rightarrow -\alpha$ и знака на противоположный перед всеми коэффициентами, а остальные трансформанты получается из указанных заменой $a \rightarrow b$ и $\xi \leftrightarrow \eta$.

Удовлетворяя граничным условиям (1), в которые представляем выражение для прогиба (6), получим систему из восьми интегральных уравнений Фредгольма 2-го относительно неизвестных функций $A_k(\lambda)$:

$$\sum_{k=1}^4 A_k(\lambda) \varphi_{4k}(\lambda_1 \pm a_1 a) + \frac{1}{2} \sum_{k=5}^8 \int_{-\infty}^{\infty} A_k(\xi) K_{1K-4}(\xi \lambda_1 b_1 \pm a) \alpha \xi = f_1(\pm a, \lambda), \quad (8)$$

$$\sum_{k=1}^4 A_k(\lambda) \varphi_{6k}(\lambda_1 \pm a_1 a) + \frac{1}{2} \sum_{k=5}^8 \int_{-\infty}^{\infty} A_k(\xi) K_{2K-4}(\xi \lambda_1 b \pm a) \alpha \xi = f_1(\pm a, \lambda).$$

Остальные четыре уравнения получаются из (8) заменой $a \rightarrow b$ $\xi \rightarrow \eta$ и $K = 1, 2, 3, 4 \leftrightarrow K = 5, 6, 7, 8$.

Входящие в эту систему φ_{jk} определяются в явном виде [2]

Ядра системы интегральных уравнений (8) имеют вид:

$$\begin{aligned} K_{11}(\xi_1 \lambda_1 b_1 \pm a) &= (C_1 - iC_7 + C_8^{\pm\alpha} + C_9^{\pm\alpha}) f_0(\xi_1 \lambda); \\ K_{12}(\xi_1 \lambda_1 b_1 \pm a) &= (iC_{10} - C_{11}^{\pm\alpha} + C_{12} + C_{13}) f_0(\xi_1 \lambda); \\ K_{21}(\xi_1 \lambda_1 b_1 \pm a) &= (iC_{14} + C_{15} + C_{16}^{\pm\alpha} + iC_{17}^{\pm\alpha}) f_0(\xi_1 \lambda); \\ K_{22}(\xi, \lambda, \beta, \pm a) &= (C_{18} + C_{19} + C_{20}^{\pm\alpha} + iC_{21}^{\pm\alpha}) f_0(\xi, \lambda); \end{aligned} \quad (9)$$

C_i, C_j – также выражаются в явном виде.

Правые части системы интегральных уравнений (8) зависят от вида приложенной



нагрузки $q_0(x, y)$, например:

А) для силы $P = I$, приложенной к плите в точке с координатами (X_0, Y_0) :

$$f_0(\pm\alpha, \lambda) = L^{i\lambda y_0} t_5(\lambda, X_0, \pm\alpha), f_2(\pm\alpha, \lambda) = -L^{i\lambda y_0} (\lambda_1 X_1 \pm \alpha) \quad (10)$$

где $t(\lambda_1 X_1, j) = E(AC_j - BS_j) P_4 (j = \pm\alpha)$;

$$\begin{aligned} t_2(\lambda_1 X_1, j) &= E_j(BS_j + AS_j) P_1; \quad t_3(\lambda_1 X_1, j) = \pm E_j S_j (2\pi)^{-1} \\ t_4(\lambda_1 X_1, j) &= \pm E_j C_j (2\pi)^{-1}; \quad E_j = L^{-(\pm\alpha - X)A} \quad C_j = \cos B(\pm\alpha x); \\ S_j &= \sin B(\pm\alpha - x), \quad j = \pm\alpha \quad P_1 = (2\pi\sqrt{\lambda^4 + 1})^{-1}; \\ t_5(\lambda_1 X_0 \pm \alpha) &= t_1(\lambda_1 X_0 \pm \alpha) - (1 - \nu) \lambda^2 t_2(\lambda_1 X_0 \pm \alpha) \mp \\ \mp K_1^{\pm\alpha} [t_4(\lambda_1 X_0 \pm \alpha) + (1 - \nu) \lambda^2 t_2(\lambda_1 X_0 \pm \alpha)] \pm G t_3^{\pm\alpha}(\lambda_1 X_0 \pm \alpha); \\ t_6(\lambda_1 X_0 \pm \alpha) &= t_4(\lambda_1 X_0 \pm \alpha) + (1 - \\ \nu) \lambda^2 t_3(\lambda_1 X_0 \pm \alpha) \mp M_1^{\pm\alpha} t_2(\lambda_1 X_0 \pm \alpha) \pm M_2^{\pm\alpha} [t_4(\lambda_1 X_0 \pm \alpha) - \lambda^2 t_2(\lambda_1 X_0 \pm \alpha)] \end{aligned} \quad (11)$$

Для равномерно распределенной нагрузки с интенсивностью $q_0(x, y)$ действующей по площадке размеров размером $2a_0 \times 2b_0$ в точке $2b_0(X_0, Y_0)$.

$$f_1(\pm\alpha, \lambda) = L^{i\lambda y_0} t_{11}(\lambda_1 X_0 \pm \alpha), \quad f_2(\pm\alpha, \lambda) = L^{i\lambda y_0} t_{12}(\lambda_1 X_0 \pm \alpha), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} t_7(\lambda_1 X_1 \pm \alpha) &= \pm (E_{j1} S_{j1} - E_{j2} S_{j2}) \pi^{-1}, \quad P_2 = (\sqrt{\lambda^4 + 1})^{-1}; \\ t_8(\lambda_1 X_1 \pm \alpha) &= \pm (E_{j1} C_{j1} - \lambda^2 S_{j1}) - E_{j2} (C_{j2} + \lambda^2 S_{j2}) \pi^{-1}; \\ t_9(\lambda_1 X_1 \pm \alpha) &= \pm [E_{j1} (AC_{j1} - BS_{j1}) - E_{j2} (AC_{j1} + BS_{j1})] P_2; \\ t_{10}(\lambda_1 X_1 \pm \alpha) &= \pm [E_{j1} (BC_{j1} - AS_{j1}) - E_{j2} (BC_{j2} + AS_{j2})] P_2; \\ E_{j1} &= L^{-(\pm\alpha \pm a_0 \pm X_0)A}, \quad C_{j1} = \cos B/a \pm a_0 \pm X_0, \quad S_{j1} = \sin B/a \pm a_0 \pm X_0, \quad j = \pm\alpha; \\ E_{j2} &= L^{-(\pm\alpha \pm a_0 \pm X_0)A}, \quad C_{j2} = \cos B/a \pm a_0 \pm X_0, \quad S_{j2} = \sin B/a \pm a_0 \pm X_0, \quad j = \pm\alpha; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} t_{11}(\lambda_1 X_0 \pm \alpha) &= \lambda^{-1} \sin \lambda b_0 \{t_7(\lambda_1 X_1 \pm \alpha) + \nu \lambda^2 t_8(\lambda_1 X_0 \pm \alpha) \pm K_1^{\pm\alpha} [\\ \lambda_1 X_0 \pm \alpha] + (1 - \nu) \lambda^2 t_{10}(\lambda_1 X_0 \pm \alpha)\} \pm G_1^{\pm\alpha} t_{10}(\lambda_1 X_0 \pm \alpha); \\ t_{12}(\lambda_1 X_0 \pm \alpha) &= \lambda^{-1} \sin \lambda b_0 \{t_9(\lambda_1 X_0 \pm \alpha) \pm (1 - \nu) \lambda^2 t_{10}(\lambda_1 X_0 \pm \alpha) \pm \\ \pm M_1^{\pm\alpha} t_8(\lambda_1 X_0 \pm \alpha) \pm M_2^{\pm\alpha} t_7(\lambda_1 X_0 \pm \alpha)\}. \end{aligned}$$

Отделяя действительные и мнимые части в системе интегральных уравнений (8), получим систему из 16-ти интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода, которая затем решается методом замены интегральных уравнений конечной системой линейных алгебраических уравнений /4/.

Таким образом, исходя из выражения (6), запишем выражения прогиба и изгибающего момента

$$\begin{aligned} w(x, y) &= w_\infty(x, y) + \sum_{k=1}^4 \int_0^\infty B_{ik}(\eta_1 y) \varphi_{ok}^p(\eta_1 x_1 \pm \alpha) d\eta + \sum_{k=5}^8 \int_0^\infty B_{ik-4}(\xi_1 x) \varphi_{ok-4}^p(\xi_1 y \pm B) d\xi; \\ M_x(x, y) &= M_{x\infty}(x, y) + \sum_{k=1}^4 \int_0^\infty B_{ik}(\eta_1 y) \varphi_{4k}^p(\eta_1 x_1 \pm \alpha) d\eta + \sum_{k=5}^8 \int_0^\infty B_{ik-4}(\xi_1 x) \varphi_{Bk-4}^p(\xi_1 y_1 \pm b) d\xi; \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} B_{1k}(\eta, y) &= A_{1k}(\eta) \cos \eta y + A_{2k}(\eta) \sin \eta y_1 (k = 1, 2, 3, 4), \\ B_{1k}(\xi_1 x) &= A_{1k}(\xi) \cos \xi_1 x + A_{2k}(\xi) \sin \xi_1 x, (k = 5, 6, 7, 8), \\ A_k &= A_{1k} + i A_{2k} \end{aligned}$$

В полученных выражениях (14) выделены слагаемые, соответствующие усилиям в бесконечной плите, в остальные слагаемые представляют собой обобщенные решения дифференциального уравнения равновесия плиты.

Функции φ_{jk}^p получаются в явном виде:

$$\begin{aligned} \varphi_{j1}^p(\eta_1 x_1 \pm a) &= \varphi_{j1}^0(\eta_1 x_1 + a) - K_1^{+a} \varphi_{j2}^c(\eta_1 x_1 + a) - \sigma_1^{+a} \varphi_{j2}(\eta_1 x_1 + a); \\ \varphi_{j2}^p(\eta_1 x_1 + a) &= -\varphi_{j2}^c(\eta_1 x_1 + a) - M_1^{+a} \varphi_{j2}^3(\eta_1 x_1 + a) - \mu_1^{+a} \varphi_{j3}(\eta_1 x_1 + a); \\ \varphi_{j3}^p(\eta_1 x_1 + a) &= \varphi_{j3}^c(\eta_1 x_1 + a) - K_1^{-a} \varphi_{j2}^c(\eta_1 x_1 - a) + G_1^{+a} \varphi_{j3}^3(\eta_1 x_1 - a); \\ \varphi_{j4}^p(\eta_1 x_1 - a) &= -\varphi_{j4}^c(\eta_1 x_1 - a) - \mu_1^{-a} \varphi_{j2}^3(\eta_1 x_1 - a) + M_1^{+a} \varphi_{j3}^3(\eta_1 x_1 - a); \end{aligned}$$

$$(j=0,4,5,6,7)$$

где

$$\varphi_{\sigma 1}^c(\eta_1 x_1 + \alpha) = -E\{[A - (1 - \nu)\eta^2 B]C_1 - [B + (1 - \nu)\eta^2 A]S_1\}P_1,$$

$$\varphi_{\sigma 2}^c(\eta_1 x_1 + \alpha) = -E_1[C_1 + (1 + \nu)\eta^2 S_1](2\pi)^{-1},$$

$$\varphi_{\sigma 1}^3(\eta_1 x_1 + \alpha) = -E_1(BC_1 + AS_1)P_1\varphi_{\sigma 2}^3 = -E_1S_1(2\pi)^{-1},$$

$$\varphi_{\sigma 2}^c(\eta_1 x_1 + \alpha) = -E_1[(A\eta^2 + B)S_1 - (A - B\eta^2)C_1]P_1,$$

$$E_1 = e^{-|\alpha-x|A}, C_1 = \cos B|\alpha-x|, S_1 = \sin B|\alpha-x|,$$

$$P_1 = (2\pi)\sqrt{\eta^2 + 1}^{-1} \text{ и т. д.}$$

В качестве примера рассмотрен изгиб квадратной железобетонной плиты толщиной 1,0 м с приведенными размерами подкрепленной по контуру ребрами жесткости одинакового сечения $d \times h = 0.4 \times 4.0$ (м) и лежащей на основании Винклера с коэффициентом постели $K_0 = 5000$ кН/м³. Модуль упругости ж/б плиты и ребер жесткостей принят равным $E = 2 \times 10^7$ кН/м² при коэффициенте Пуассона $\nu = 0,1666$.

На рис. 2 показаны эпюры прогиба и изгибающих моментов в сечении плиты по оси X при нагружении ее в центре сосредоточенной силой $P=1$. Из рис. 2 видно, что прогиб в плите изменяется равномерно, а изгибающий момент поменял знак на краю.

Рассмотрим изгиб аналогической плиты при граничных условиях (2), в случае, когда коэффициенты K_1, K_2, K_3, K_4 и b равны нулю, т.е. при граничных, приведенных в /3/. В этом случае, по сравнению с результатами, показанными на рис. 1, прогиб в плите под силой незначительно увеличился от 1292 до 0,1284 т.е. в 1,006 раза, отрицательный изгибающий момент на краю плиты уменьшился от 0,01447 до 0,00937, т.е. в 1,54 раза.

Таким образом, полученные результаты подтверждают влияние ребер жесткости на изгиб прямоугольных плит и необходимость учета их совместной работы, а учет дополнительных усилий, возникающих в месте контакта ребра с плитой приводит к получению более достоверных результатов.

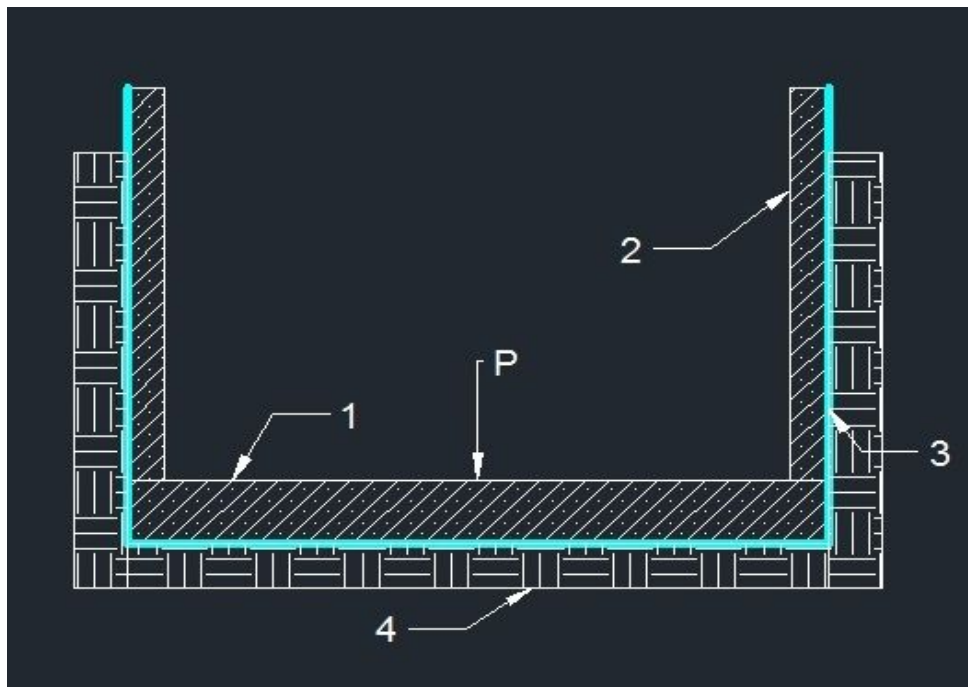


Рис. 1. Общий вид сплошной фундаментной плиты
1 – фундаментная сплошная плита; 2 – подпорная стенка; 3 – гидроизоляция; 4 – грунт основания

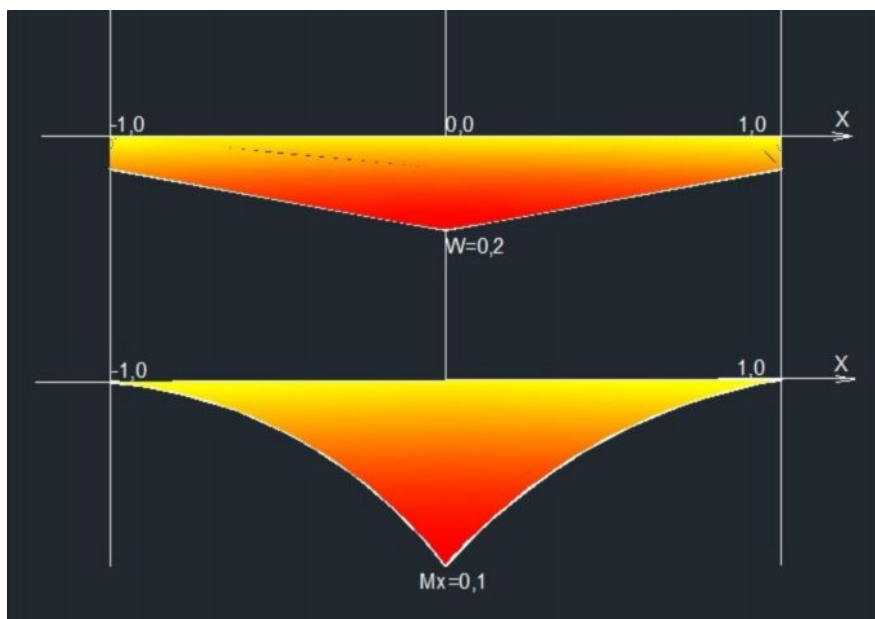


Рис. 2. Эпюры прогибов и изгибающих моментов в сечении сплошной плиты

Список литературы

1. Маруфий А.Т. Изгиб прямоугольной плиты, подкрепленной по контуру ребрами жесткости и лажащей на упругом основании [Текст] / А.Т.Маруфий // Сейсмостойкое строительство в Кыргызстане. Сборник научных трудов. - Бишкек: ФПИ, 1988, С.47-54.
- 2.Травуш В.И. Изгиб подкрепленных ребрами полосы и прямоугольной плиты, лежающих на упругом основании [Текст] / В.И.Травуш. – М.: Строиздат, 1976. – 199 с.
- 3.Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки [Текст] / С.П. Тимошенко , Войнойский-Кригер С. –М.: Физматгиз, 1963. - 636 с.
4. Контрович Л.В. Приближенные методы высшего анализа / [Текст] / Л.В. Контрович, В.И. Крылов. – М.:-Л.: Гостехиздат, 1952. - 695 с.