УДК: 512.15

БЕШИМОВ Р.Б., САФАРОВА Д.Т.
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент
BESHIMOV R.B., SAFAROVA D. T.
National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent
rbeshimov(c@,mail.ru safarova.dilnora87mail.ru

НЕКОТОРЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФУНКТОРА EXP_{Π}

exp_n функторунун кээ бир топологиялык касиеттери
Some topological properties of the functor exp_n

Экспоненциальные пространства были введены в работе [1]. В работах [2,3,4] изучены число Суслина, плотность, слабая плотность, ж-вес, ж-характер, наследственные свойства пространства exp_nX, $exp_ш$ X, exp_c X, exp X. *В данной работе исследовано воздействие*
конструкции exp_n *на финально компактные, счетно компактные, секвенциально компактные,*
псевдокомпактные, нульмерные пространства.
Ключевые слова: *функтор; экспоненциальное пространство; финально компактное пространство; счетно компактное пространство; нульмерное пространство.*
exp_nX,$exp_{ю}X$,exp_cX,$expX$.*суслинанын сандык эмгегинде калың, ж- салмак, ж-мүнөз,*
мурункудан келе жаткан өздүк мейкиндиги exp_n *конструкциянын таасиринде финалдык*
компактык, эсептик компактык, секвенциялдык кампактык, псевдокомпактык нөл ченемдик мейкиндиктери бул эмгекте изилденген
Урунттуу свздвр: *функтор, экспоненциалдык мейкиндик, финалдык компактык мейкиндик, эсептик компактык мейкиндик, нөл ченемдик мейкиндик*
Exponential spaces were introduced in the work [1]. In the works [2,3,4] the Suslin number, density, weak density, ж-weight, ж -character, hereditary properties of spaces exp_nX, exp_mX, exp_cX *and* exp X
are studied. In this paper, the action of the construction exp_n *is studied on finally compact, countably*
compact, sequentially compact, pseudocompact, zero-dimensional spaces.
Keywords: *functor; exponential space; finally compact space; countably compact space; zero-dimensional space.*

Для функтора *F:Comp -+Comp* через *F* обозначается функтор, ставящий в соответствие
n
пространству *X* множество всех тех элементов *a* е *F(X),* носители которых состоят не более чем из *n* точек [5].

Пусть *X* - топологическое *T*[-пространство. Множество всех непустых замкнутых подмножеств топологического пространства *X* обозначим *expX*. Семейство всех множеств вида

$$O\langle U_1,U_2,...,U_n\rangle=\left\{F:F\in\exp X, F\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_i, F\cap U_i\neq\varnothing, i=1,2,...,n\right\},$$

где U_l,U_2,...,U_n - открытые подмножества пространства *X*, порождает топологию на множестве *expX*. Эта топология называется топологией Виеториса. Множество *expX* с топологией Виеториса называется экспоненциальным пространством или гиперпространством пространства *X*.

Пусть *X* - топологическое T_x -пространство. Обозначим через exp_n *X* множество всех

непустых замкнутых подмножеств пространства X мощности, не превосходящей кардинального числа n, т.е. exp_n X = {F <$Eexг$>X: \|F\| <n\.
Положим $exp_{ш}X$ = М \|exp_nX : n = 1,2,...}, exp_cX = {F e exp X: F - *компактное подмножество X).* Ясно, что exp_n X *a* $exp_ш$ X *a* exp_c X *a* $expX$ для любого топологического пространства X .

Теорема 1 [2]. Пусть X - бесконечное ^-пространство и $U_x, U_2, ..., U_n$ - произвольные непустые открытые множества в X, то верно следующее равенство

$$\left[O\left\langle U_1, U_2, \dots, U_n\right\rangle\right]=O\left\langle [U_1], [U_2], \dots, [U_n]\right\rangle.$$

Известно, что для хаусдорфова пространства X, и натурального числа n пространство exp_n X замкнуто в пространстве *exp X*. Легко видеть, что если X есть 7J -пространство, то отображение *г.X^вхрX,* сопоставляющее точке *X<EX* одноточечное множество $i(x)$ = {У}, является вложением, т.е. рассматриваемое как отображение на множество $exp_{\}}$ X
оно, является гомеоморфизмом. Для хаусдорфова пространства X имеем цепочку вложений: *expjX* <^exp_2X ^...^$expX$. Ясно, что если $n>m$, то пространство exp_mX замкнуто в
пространстве exp_nX [5].

Пусть A- такое подмножество метрического пространства X, что из всякого бесконечного его подмножества можно выделить последовательность, сходящуюся в X. Тогда *[A]* - компакт [5].

Если из каждого открытого покрытия пространства X можно выделить счетное подпокрытие, то пространство X называется финально компактным.

Топологическое пространство X называется линделёфовым пространством, или пространством со свойством Линделёфа, если X регулярно и из каждого открытого покрытия этого пространства можно выбрать счетное подпокрытие [6].

Известно, что каждое замкнутое подпространство линделёфова пространства является линделёфовым пространством.

Теорема 2. Пространство X финально компактно тогда и только тогда, когда пространство exp_n X финально компактно.

Доказательство. Необходимость. Пусть *ju* = \|*o(lJ",U*$_2$,...,*U"):a* e^} - произвольное открытое покрытие пространства exp_n X. Пусть /$л_x$ =*iU", U*$_2$,...,*U", a* <*EA*\| след семейство /*u* в X. Покажем, что система < \|*jU"* : *a* e *A* > есть покрытое пространство X.

Докажем от противного, что существует элемент x, e X \ *U*™ '■ *i* = \\,2,...,*n*\. Тогда
aeA
{x_1}£exp_nX\{*Ош",u*$_2$,...,*u"):a<EAУ* Отсюда следует, что \|x_x^$Gexp_nX$ но
{*x,*} *i* \|*o*(Ц^a,$U^a{}_2$,...,$U^a{}_n$ *): a* e *A*}. Получили противоречие. Значит, система *IQU? : a* e *A* \
есть покрытое пространство X.

Так как X есть финально компактное пространство, то существует такое счетное покрытое /u_2 = что ju_2 покрывает пространство X. Рассмотрим
всевозможные открытые множества *Ош^,* $U^s{}_2$,...,$U^s{}_k$V где *SGS,* \|*S*\| = $^_0$. Покажем, что \|*Ош",* U_2,...,U^S*A: s* e *S*\ есть покрытие пространства exp_n X.

Предположим противное, что существует точка <*$G*$exp_nX$*j{o(u°,* U_2,...,$U^s{}_k$*) : n* eiv}.
SGS

Предположим, что $Ф$ = {x_1,x_2,...,$x_к$), $к$<n. Так как система *JU*$_2$ покрытие пространства X, то существуют множества *U**,$U^s{}_2$,...,$U^s{}_k$ такие, что x_t е£//, i = *1,2,...,к,* что *ФеO(y{,u'*$_2$,...,*u'Л.* Получим противоречие.
Значит,

$\pounds i_3=\{0(U^*,U_2,...,U^s_n):seS, neN\backslash,$ p| = $\hat{}_0$ является покрытием пространства exp_nX и пространство exp_n X финально компактно.

Достаточность. Известно [6], что свойства счетной компактности, финальной компактности и, следовательно, компактности наследуются при переходе к замкнутому подпространству. Так как пространство X замкнуто в exp_n X. Отсюда вытекает, что пространство X финально компактно. Теорема 2 доказана.

Топологическое пространство X называется счетно компактным, если каждое бесконечное подмножество пространства X имеет в X предельную точку [6].

Теорема 3 [6]. Для любого хаусдорфова пространства X следующие условия равносильны:

1) Пространство X счетно компактно;
2) Любое локально конечное семейство непустых множеств в X конечно;

3^ Каждое локально конечное семейство одноточечных подмножеств пространства конечно;

4) Каждое бесконечное подмножество пространства X имеем в X предельную точку;
5) Любое счетное бесконечное подмножество пространства X имеем в X предельную точку;

Теорема 4. Хаусдорфово пространство X счетно компактно тогда и только тогда, когда пространство exp X счетно компактно.

Доказательство. Необходимость. Пусть $M = \{F_a\text{: } a\ eA\}$, $\backslash A\backslash >$К$_0$бесконечное подмножество в exp_nX, т.е. $F_a = ix'',x_2,\dots,x_k\backslash$, $\kappa<n$, $OC<EA$. Рассмотрим след множество F_a в X_s, $s<n$. Рассмотрим множество $M_t =\backslash x''$: $a\ eA\hat{}$, $г = 1,2,...,n$. Так как X - счетно компактное пространство, то множество M_t, $i = \backslash,2,...,n$ имеет предельные точки $x°$, $x_2,...,x°_n$ в X. Тогда F_0 ={xj°, $x^{(}{}_2,...,x^{(}Л$ предельная точка множества M.

Действительно, пусть $OU_1,U_2,\dots,U\backslash$ - произвольная окрестность точки F_0. Предположим, что д^ eU_1,x_2 $eU_2,...,x_n$ e[/$_л$. Так как X - счетно компактное пространство, то U_1 содержит бесконечно много точек множества M_1. Аналогично, U_2 содержит бесконечно много точек множества $M_2,\dots,U_n$ содержит бесконечно много точек множества M_n. Значит, множество $0\{U_1,U_2,...,U\backslash$ содержит бесконечно много точек множества exp_n X.

Достаточность. Известно [6], что каждое замкнутое подпространство счетно компактного пространства счетно компактно. Так как пространство X замкнуто в exp_n X. Отсюда вытекает, что пространство X счетно компактно. Теорема 4 доказана.

Топологическое пространство X называется секвенциально компактным, если каждая последовательность точек в X содержит сходящуюся подпоследовательность [6].

Сопоставляя каждой точке $(x_0,...,x_{n\_1})(\pounds X^n$ точку $\{x_0,...,x_{n\_1}\}eexp_nX$, где X есть $T_г$ пространство получим непрерывное сюръективное отображение:

$ж_{nX}$ $=ж_n$: X'' —>exp_n X. **Теорема 5.** Хаусдорфово пространство X секвенциально компактно тогда и только тогда, когда пространство exp X секвенциально компактно.

Доказательство. Необходимость. Пусть X секвенциально компактное хаусдорфово пространство. Произведение любого счетного семейства секвенциально компактных пространств является секвенциально компактным пространством [6]. Значит, пространство

X''также секвенциально компактное пространство. Если / : X — »У - непрерывное отображение секвенциально компактного пространства X на топологическое пространство Y, то Y секвенциально компактно [6]. Пространство exp X можно представить как непрерывный образ пространства X'' при непрерывном отображении. Из этого вытекает, что пространство exp X тоже является секвенциально компактным пространством.

Достаточность. Известно [6], что каждое замкнутое подпространство секвенциально компактного пространства секвенциально компактно. Так как пространство X замкнуто в exp X. Отсюда вытекает, что пространство X секвенциально компактно. Теорема 5 доказана.

Топологическое пространство X называется [6] псевдокомпактным, если X -тихоновское пространство и каждая непрерывная вещественная функция на *X* ограничена.

Теорема 6. Для произвольного тихоновского пространства *X* следующие условия равносильны [6]:

1)Пространство *X* псевдокомпактно;

2)Для каждой убывающей последовательности *W₁nW₂n...* непустых

Со открытых множеств в *X* пересечение **Г1[^]** не пусто;

3)Для каждого счетного центрированного семейства **(НУ°**1 открытых

СО множеств в *X* пересечение **0[^]** не пусто.

Теорема 7. Тихоновское пространство *X* псевдокомпактно тогда и только тогда, когда пространство *exp X* псевдокомпактно.

Jr n

Доказательство. Необходимость. Пусть *X* - бесконечное тихоновское псевдокомпактное пространство. Рассмотрим в *exp X* счетное центрированное семейство

\i = {0{U",U"...,U^n_k):n^N} открытых множеств. Пусть ц; = *{u" ,U"2...,Uk : neN}* след семейство */u* в *X*.

ill 9 9 9 7 7 7 9 9 9

Пусть *0(17] ,U2...,Un) <E\X, 0(17] ,U2...,Uk) <E\X*, где *U1,U2...,Un,U1 ,U2...,Uk* e *[ir* Покажем, что для любого открытого множества *U/,i =],2,...,n* существует хотя бы одно множество *U-,j = J,...,k*, что *Ut ^Uj Ф0* для всех *i = l,...,n,j =J,...,k.*

Из центрированности системы ц имеем, что существует элемент

n

F^O{U\,U^1 2...,U^1 n)^0{U],U^2 2...,U^2 k). Тогда *F a* Ut//, *F*nC// *Ф 0, i = l,...,n* и

i=l

F ^\\U^2, F Г)17^2 Ф0, j = 1,...,к. Пусть x произвольная точка множества *F*. Тогда из

3=1

n к

F **cz U C**// и *F* ***a*** ***u**^2* имеем, что существуют множества **£**// и *U^2*, такие, что *x* e *U\, x* e *U^2* . Значит, *U' гли^2* *0.

1 J

Таким образом, для каждого we *N* система *\i1* разлагается центрированными подсистемами **V,** = *{u"^1,n1eN},* ***v**2=\(**J**^n 2^2 ,n2&N},…,vk* = ***IJ**^n k^k ,nk&N}* в пространстве *X*. Так как пространство *X* псевдокомпактно, то имеем

n§Uj^1~\,n1eN*O, **nfo],*n2*e^O** п||[/;*],^e^0. Из

каждого множества выберем по точке *X}* e n{ *U"^1 \щ* e *N* *Ф 0,*

*X2GC\ Ku"^2^,n2eN*0,...,xken§U"k^k~\,nkeN*0 F = {Xl,x2,...,xk},k<n.*

Fer^lol U"^1 \,\U2^2

nj,n2,...,nk ELN\. Из теоремы 1 следует, что

F E:Г

^O^^1 ,U^n 2^2 ,...,Щ^к)~\: щ,n2,...,nк&}^. Значит, мы получили, что *expn X* есть псевдокомпактное пространство. Достаточность. Пусть *JU = {Vl:IGN}* счетное центрированное семейство открытых подмножеств в *X*. Покажем, что

ПИ*^0 не пусто.

г=1

Сначала покажем, что /4 *={o(Vj): IGN* центрированная система открытых множеств в *expnX.* Пусть *0{y^),0(y2}* - непустые открытые подмножества в *expnX.* Из центрированности системы имеем, что *УXГЛУ2=УФ0* непустое. Тогда Действительно, пусть *FeO(V).* Тогда *F^V = VX^V2*. Отсюда имеем, *F*eO(^), *FGO\V2)* и получим *F& O(V^jслO(y2)* . Из произвольности множества *FGO(V)* имеем, что *0(V^<^0(y^r\0(V2^.*

Значит, система //, = $\{o(V_t\}$: /' e N\ - центрированная. Так как exp_n X-псевдокомпактное,
CO CO CO
то ПГ^(^)1 $^{ф\ 0}$. Мы покажем, что П[^]$^{ф\ 0}$ не пусто. Пусть F е ПГ^(^)1 . Тогда в силу
/=i **/=i** **/=i**
теоремы 1 имеем, что Г^(^)1 $^{=}$ ^([^]) для каждого /eiV. Отсюда имеем, что
со
пространство X псевдокомпактное. Теорема 7 доказана.

Топологическое пространство X называется нульмерным, если X - непустое T, - пространство, обладающее базой из открыто-замкнутых множеств [6].

Для любого подмножества A a X граница множества A a X определяется следующим образом: $FrA = [A]\backslash IntA$.

Теорема 8. Пусть X бесконечное ^-пространство. Тогда пространство X нульмерно тогда и только тогда, когда $expX$ нульмерно.

Доказательство. Пусть система \i = $\{U_a$:a&$A]$ есть база состоящая из открыто-замкнутых подмножеств в X. Покажем, что система (J,; =$\{0(U_1,U_2...,U_n)$: U_t G\XJGN$\}$ есть открыто-замкнутая база в $expX$. Из теоремы 1 имеем, что \o(JJ$_x$, U_2, ... ,U,,)\ $^{=}$ 0\[Ui], [U_2], ■■■ '[^и]). Известно, что для открыто-замкнутых подмножеств [/cl имеем, что $[U] = U$. Отсюда вытекает, что
\o(U_y, U_2, ... ,U,,)\ $^{=}$ $^{<}$^([^i]> [^2]' ••• '[^я]/ $^{=}$ 0(Un U_2, ■■■ ,U,,)- Значит, \i_1 есть открыто-замкнутая база в exp X, т.е. пространство exp X нульмерно.

Обратно, пусть пространство $expX$ нульмерно. Известно, что нульмерность наследует любое подмножеству, тогда имеем, что пространство X нульмерно. Теорема 8 доказана.

Так как нульмерность наследуется любому подмножеству, то имеем.

Следствие 1. Бесконечное T, -пространство X нульмерно тогда и только тогда, когда одно (равносильно все) из пространств exp_nX, $exp_{ш}X$, exp_cX нульмерно.

Список цитируемых источников

1. Vietoris A., Bereiche zweiter Ordnung // Monatsh, for math. und phys. 1922. - (32). - p. 258-280.

2. Michael. E. Topologies on spaces of supsets // Trans. Amer. Math. Soc. - 1951. - № 1 (71). - p. 152-172.

3. Fedorchuk V.V., Todorcevic S. Cellularity of covariant functors //Topology and its applications. - 1997. -№ 1 (76). - p. 125-150.

4. Beshimov R.B. On some cardinal invariants of hyperspaces // Mathematychni Studii. - 2005. № 2 (24). p. 197-202.

5. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. Москва: Физматлит. 2006. - с.332

6. Энгелькинг Р. Общая топология. Москва: Мир, 1986. - с.752

7. Федорчук В.В. Бесконечномерные бикомпакты // Известия АН СССР, сер. матем. - 1978. - (42). - с. 1162-1178.

Рецензенты: Заитов АА. - *доктор физико-математических наук* НУУ им. Мирзо Улугбека ***Канетов Б.Э.*** - *доктор физико-математических наук, профессор КНУ им. Ж.Баласагына*