УДК: 517.9

ДЖУМАГУЛОВ К. Р.
КНУ им. Ж. Баласагына, Бишкек
DZHUMAGULOVK. R.
J. Balasagyn KNU., Bishkek

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ, ГДЕ ВЫРОЖДАЕТСЯ НЕКЛАССИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА

Классикалык эмес Вольтерранын үчүнчү түрдөгү теңдемеси келип чыгуучу гиперболалык операторлуу тескери маселесинин чыгарылышы

Solution of the inverse problem with a hyperbolic operator, where the non-classical Volterra equation of the third kind degenerates

В работе рассмотрена нелокально-обратная задача с гиперболическим оператором и интегральной зависимостью в неограниченной области. В определенных условиях исходное уравнение сводится к интегральным уравнениям Вольтерра третьего рода, разрешимость которых доказывается методами интегральных преобразований и методами системной регуляризации. Таким образом, сделано обобщение результатов исследований интегрального уравнения типа Вольтерра третьего рода для нелокально-обратной задачи.

Ключевые слова: *гиперболический оператор; нелокально-обратная задача; регуляризация; вырожденное уравнение; неограниченная область.*

Бул иште локалдуу эмес интегралдан коз каранды гиперболалык операторлуу тескери маселеси каралат. Белгилуу шарттарда берилген тецдеме Вольтерранын учунчу турдвгу интегралдык тецдемесине айланат. Чыгып келуучу маселенин чыгарылышы интегралдык кайтаруу жана системалык регуляризация ыкмалары аркылуу далилденет. Локалдуу эмес тескери маселесинен келип чыккан Вольтерранын учунчу турдвгу интегралдык тецдемесинин изилдввлврунун жалпы жыйынтыгы берилди.

Урунттуу свздвр: *гиперболалык оператор; локалдуу эмес тескери маселе; регуляризация; келип чыгуучу тецдеме; чектелбеген бвлум.*

In paper we consider a nonlocal inverse problem with a hyperbolic operator and an integral dependence in an unbounded domain. Under certain conditions, the original equation reduces to Volterra integral equations of the third kind, the solvability of which is proved by the methods of integral transformations and the methods of system regularization. Thus, a generalization of the results of investigations of an integral equation of Volterra type of the third kind for a nonlocal inverse problem is made.

Keywords: *a hyperbolic operator; non-local inverse problem; regularization; the degenerate equation; unbounded domain.*

Введение

Исследования ряда математических моделей и интерпретаций естественных физических явлений зачастую приводят к рассмотрению различных обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. И, конечно же, нельзя не заметить актуальность уравнений гиперболического характера, где вырождаются интегральные уравнения Вольтерра третьего рода [4,6], к которым сводятся многие задачи обратного характера [5,7,8,9]. Прикладной характер подобных обратных задач, в которых порождаются интегральные уравнения первого и третьего родов, вносит неоценимый вклад в развитие науки в целом [1,2,3,8].

В данной работе рассматривается нелокально-обратная задача, которая сводится к неклассическому интегральному уравнению Вольтерра третьего рода [6,8]. Доказательство регуляризируемости задачи будет представлено с помощью методов интегральных преобразований и регуляризации.

Пусть задано уравнение вида

$$\begin{cases} U_{tt} - a^2 U_{xx} = (Az)(t) + f(t,x,U(t,x)), \\ (Az)(t) \equiv pz + \int\limits_0^t K_1(t,s)z(s)ds + \int\limits_0^{N(t)} K_2(t,s)z(s)ds, \end{cases} \qquad (1)$$

$$U^{(i)}{}_t\big|_{t=0} = \varphi_i(x), x \in R, (i = 0,1) \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i (U_t(t,x_i) + aU_x(t,x_i)) = g(t), t \in [0,T], \qquad (3)$$

где $0 < a,\ \alpha_i = const, f, p, K_i, N, \varphi_i, g,$ - известные данные, причем

$$\begin{cases} f \in C^1(\overline{\Omega}); p(t) \in C[0,T], \Omega = [0,T] \times R, p(t) > 0, \forall t \in [0,T), p(T) = 0, \\ K_i(t,s) \in C^{0,1}(D_1), (i = 1,2), K_1(t,t) \ge \alpha > 0; K_2(t,N(t)) \equiv 0, D_1 = \{(t,s): 0 \le s \le t \le T\}, \\ \beta = \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_i \ne 0; N(0) = 0, 0 \le N(t) \le t \le T. \end{cases} \qquad (4)$$

Таким образом, (1)-(3) называется нелокально-обратной задачей, где искомыми функциями являются

$$\Psi = (U,z) \in W_C(\Omega) = \{(U,z): U \in C^{2,2}(\Omega), z \in C[0,T]\}, \|\Psi\|_{W_C} = \|U\|_{C^{2,2}(\overline{\Omega})} + \|z\|_{C[0,T]}.$$

I. Для исследования разрешимости задачи (1)-(3), то есть для нахождения неизвестных функций *(U, z)*, необходимо редуцировать исходную задачу к интегральным уравнениям, и получить систему, содержащую искомые функции *(U,z)*. С этой целью, введем вспомогательную функцию $V(t,x)$ [8], то есть

$$U_t + aU_x = V(t,x), \ \forall (t,x) \in \overline{\Omega}. \qquad (5)$$

Тогда в соответствии с (5) выразим функцию U, и, следовательно, получим

$$U = \varphi_0(x - at) + \int\limits_0^t V\big(\tau, x - a(t-\tau)\big) d\tau \equiv (BV)(t,x). \qquad (6)$$

Чтобы проверить выполнимость тождества, достаточно продифференцировать (6) по переменным t *и* X соответственно,

$$\begin{cases} U_t = \varphi_{0l} \cdot (-a) + V(t,x) + \int\limits_0^t \big[V_{l_1}(\tau, x - a(t-\tau))(-a)\big] d\tau, \\ U_x = \varphi_{0l} + \int\limits_0^t V_{l_1}(\tau, x - a(t-\tau)) d\tau, (l = x - at, l_1 = x - a(t-\tau)), \end{cases} \qquad (7)$$

и подставляя (7) в (5), легко видеть, что тождество верно, поэтому, учитывая (5), (6) из уравнения (1) следует:

$$V_t(t,x) - aV_x(t,x) = (Az)(t) + f(t,x,(BV)(t,x)), \qquad (8)$$

$$V\big|_{t=0} = \varphi_1(x) + a\varphi_{0x}(x) \equiv \varphi_2(x), \quad \forall x \in R. \qquad (9)$$

Уравнение (8) с учетом (9) представляет собой задачу Коши, и, следовательно, интегрируя (8) с условием (9), получим

$$V(t,x) = \varphi_2(x + at) + \int\limits_0^t [(Az)(\tau) + f(\tau, x + a(t-\tau), \varphi_0(x + \\ + a(t-\tau) - a\tau) + \int\limits_0^\tau V(\tau', x + a(t-\tau) - a(\tau - \tau')) d\tau'] d\tau. \qquad (10)$$

Искомыми функциями уравнения (10) является пара функций *(V,z)*. Поэтому для нахождения функции *z(t)*, с учетом условий (3), (5) и (10), а также, требуя $X = X_i$, имеем

$$g(t)=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i V(t,x_i)=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\left\{\varphi_2(x_i+at)+\int_0^t (Az)(\tau)d\tau\right\}+\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\{\int_0^t[f(\tau,x_i+a(t-$$
$$-\tau),\varphi_0(x_i+a(t-\tau)-a\tau)+\int_0^{\tau}V(\tau',x_i+a(t-\tau)-a(\tau-\tau'))d\tau']d\tau\}, \tag{11}$$

и, далее

$$\int_0^t (Az)(\tau)d\tau=\beta^{-1}\{g(t)-\sum_{i=1}^{3}\alpha_i[\varphi_2(x_i+at)+\int_0^t[f(\tau,x_i+a(t-\tau),\varphi_0(x_i+a(t-\tau)-a\tau)+$$
$$+\int_0^{\tau}V(\tau',x_i+a(t-\tau)-a(\tau-\tau'))d\tau']d\tau]\}\equiv(B_1V)(t). \tag{12}$$

Подставив (12) в уравнение (10), получим

$$V(t,x)=\varphi_2(x+at)+B_1V(t,x)+\int_0^t[f(\tau,x+a(t-\tau),\varphi_0(x+a(t-\tau)-a\tau)+$$
$$+\int_0^{\tau}V(\tau',x+a(t-\tau)-a(\tau-\tau'))d\tau']d\tau\equiv(B_2V)(t,x). \tag{13}$$

Уравнение (13) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода по переменной Ге[0,Г].

Лемма 1. При условиях (3), (4) и (12) уравнение (13) разрешимо в $C^{1,1}$ (Q), причем

$$\|V\|_{C^{1,1}(\bar{\Omega})}\le C_0. \tag{14}$$

Тогда на основе (14) и (6) имеет место *u*\\ 2,2 - <C, *(0<C = constJ = 0A).*
| c (п) ‾ 1, V ' , , /

П. Следующим шагом является поиск функции *z(t)*, для нахождения которой удобно правую часть уравнения (12) обозначить через *F(t*\ также следует учесть, что

^(0) = O, *г (t)* б *C* [0,7 J. (15)

Следовательно, получим

t
j(Az)(z)dz = F(t), (16)
0

продифференцировав равенство (16) по переменной *t*, и придавая значение оператору *Az* из условия задачи (1), запишем

$$\begin{cases} p(t)z(t)+\int_0^t K_1(t,s)z(s)ds+\int_0^{N(t)}K_2(t,s)z(s)ds=F'(t),\\ z\big|_{t=0}=F'(0)p^{-1}(0)=q_0=const, \end{cases} \tag{17}$$

или интегрируя по частям левую часть уравнения (17), имеем

$$\begin{cases} p(t)\theta'(t)+K_0(t)\theta(t)=F_0(t)+(G\theta)(t),\\ \int_0^t z(s)ds=\theta(t),\\ \theta(0)=0;\ z(t)=\theta'(t);\ |\theta'|=|z|\le r,\ \forall t\in[0,T],\\ (G\theta)(t)\equiv\int_0^t K_{1s}(t,s)\theta(s)ds+\int_0^{N(t)}K_{2s}(t,s)\theta(s)ds,\\ F_0(t)\equiv F'(t);\ K_0(t)\equiv K_1(t,t)\ge\alpha>0. \end{cases} \tag{18}$$

Для доказательства регуляризируемости данной системы (18) вC[0,Г], представляющей собой неклассическое интегральное уравнение типа Вольтерра третьего рода, необходимо ввести возмущенную систему[7]:

$$\begin{cases} (\varepsilon+p(t))\theta_\varepsilon{}'(t)+K_0(t)\theta_\varepsilon(t)\equiv(G\theta_\varepsilon)(t)+F_0(t), \\ \delta z_\delta(t)+\int\limits_0^t z_\delta(s)ds=\theta_\varepsilon(t)+\delta z(0),\left(\theta_\varepsilon(0)=0\right), \end{cases} \tag{19}$$

где e, S - малые параметры. Систему (19) преобразуем к виду

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon(t)=\int\limits_0^t W(t,s,\varepsilon)\dfrac{1}{\varepsilon+p(s)}\left\{G\theta_\varepsilon(s)+F_0(s)\right\}ds\equiv(P\theta)(t), \\ z_\delta(t)=-\dfrac{1}{\delta^2}\int\limits_0^t W_0(t,s,\delta)\cdot[\theta_\varepsilon(s)-\theta_\varepsilon(t)]ds+\dfrac{1}{\delta}W_0(t,0,\delta)\theta_\varepsilon(t)+W_0(t,0,\delta)z(0), \end{cases} \tag{20}$$

где имеют место ограничения

$$\begin{cases} W\equiv e^{-\int\limits_s^t\frac{K_0(\tau)d\tau}{\varepsilon+p(\tau)}};\left|W(t,s,\varepsilon)\right|\le e^{-\int\limits_s^t\frac{\alpha d\tau}{\varepsilon+p(\tau)}}, \\ W_0\equiv e^{-\frac{1}{\delta}(t-s)},(s\le t). \end{cases} \tag{21}$$

Оценим первое уравнение системы (20)

$$\begin{cases} \left|\theta_\varepsilon(t)\right|\le\int\limits_0^t e^{-\int\limits_s^t\frac{\alpha d\tau}{\varepsilon+p(\tau)}}\dfrac{1}{\varepsilon+p(s)}\left\{M_0+M_1\int\limits_0^t\left|\theta_\varepsilon(s')\right|ds'+M_2\left\|N(t)\right\|_C\left\|\theta_\varepsilon(t)\right\|_C\right\}ds\le \\ \le\dfrac{1}{\alpha}\int\limits_0^t e^{-\int\limits_s^t\frac{\alpha d\tau}{\varepsilon+p(\tau)}}d\left(-\int\limits_s^t\dfrac{\alpha d\tau}{\varepsilon+p(\tau)}\right)\times\left\{M_0+(M_1T+M_2\left\|N(t)\right\|_C)\left\|\theta_\varepsilon(t)\right\|_C\right\}= \\ =\dfrac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\int\limits_s^t\frac{\alpha d\tau}{\varepsilon+p(\tau)}}\right)\left\{M_0+(M_1T+M_2\left\|N(t)\right\|_C)\left\|\theta_\varepsilon(t)\right\|_C\right\}\le\gamma_0+h\left\|\theta_\varepsilon(t)\right\|_C, \\ M_0=\sup\limits_{[0,T]}\left|F_0(t)\right|,M_1=\sup\limits_{D_1}\left|K_{1s}(t,s)\right|,M_2=\sup\limits_{D_1}\left|K_{2s}(t,s)\right|,\gamma_0=\dfrac{1}{\alpha}M_0 \\ h=\dfrac{1}{\alpha}\left(M_1T+M_2\left\|N(t)\right\|_C\right)<1, \end{cases} \tag{22}$$

и с учетом оценки (22) в смысле нормы $C\,[0,T$j, получим

$$\begin{cases} \left\|\theta_\varepsilon(t)\right\|_C\le(1-h)^{-1}\gamma_0, \\ \left\|z_\delta(t)\right\|\le L_{\theta_\varepsilon}\left(1+e^{-1}\right)+\left|q_0\right|\le 2L_{\theta_\varepsilon}+\left|q_0\right|\equiv N_0=const, \\ \left|\theta_\varepsilon(t)-\theta_\varepsilon(s)\right|\le L_{\theta_\varepsilon}\left|t-s\right|,\left(0<L_{\theta_\varepsilon}=const\right). \end{cases} \tag{23}$$

Лемма 2. При выполнении условий (15), (23) система (20) разрешима вC[0,Г], причем

$$(\theta_\varepsilon(t);z_\delta(t))\xrightarrow[\varepsilon\to0(\delta\to0)]{}(\theta(t);z(t)),\forall t\in[0,T].\ (*)$$

Доказательство. В самом деле, допуская

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon(t)=\theta(t)+\xi_\varepsilon(t), \\ z_\delta(t)=z(t)+\eta_\delta(t),\forall t\in[0,T), \end{cases} \tag{24}$$

относительно остаточных функций 4(0и ***rj*$_s$*{t)*** на основе (21), получим

$$
\begin{cases}
\xi_\varepsilon(t) = \int\limits_0^t W(t,s,\varepsilon)\dfrac{1}{\varepsilon + p(s)}\left\{(G[\theta+\xi_\varepsilon])(s) - (G\theta)(s) - \varepsilon\theta_s(s)\right\}ds \equiv (Q\xi_\varepsilon)(t), \\
\eta_\delta(t) = -\dfrac{1}{\delta^2}\int\limits_0^t W_0(t,s,\delta)\{\theta_\varepsilon(s) - \theta(s)\}ds + \dfrac{1}{\delta}\{\theta_\varepsilon(t) - \theta(t)\} + \Delta(\delta,z), \\
\Delta(\delta,z) = -\dfrac{1}{\delta}\int\limits_0^t W_0(t,s,\varepsilon)\{z(t) - z(s)\}ds - W_0(t,0,\delta)(z(t) - z(0)).
\end{cases} \tag{25}
$$

Оценивая исходную систему (25), имеем

$$
\begin{cases}
|\xi_\varepsilon(t)| \le \dfrac{1}{\alpha}\left(M_1T + M_2\|N_0(t)\|_C\right)\|\xi_\varepsilon(t)\|_C + \dfrac{1}{\alpha}r\varepsilon, \\
|\eta_\delta(t)| \le \dfrac{1}{\delta^2}\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\delta}(t-s)}|\theta_\varepsilon(s) - \theta(s)|ds + \dfrac{1}{\delta}|\theta_\varepsilon(t) - \theta(t)| + |\Delta(\delta,z)|, \left(|z| \le r, \forall t \in C[0,T]\right),
\end{cases} \tag{26}
$$

следовательно,

$$
\begin{cases}
\|\xi_\varepsilon(t)\|_C \le (1-h)^{-1}\dfrac{1}{\alpha}r\varepsilon = N_1\varepsilon, (N_1 = \dfrac{1}{\alpha}r(1-h)^{-1}), \\
\|\eta_\varepsilon(t)\|_C \le 2N_1\dfrac{1}{\delta}\varepsilon + \|\Delta(\delta,z)\|_C, \\
\|\Delta(\delta,z)\|_C \le 4\left[\|z\|_C e^{-\frac{1}{\delta^{1-\beta}}} + \omega_z(\delta^\beta)\right] = N_2(\delta), \left(0 < \beta < 1; 0 < L_z; \dfrac{\varepsilon}{\delta} \xrightarrow[\delta\to 0(\varepsilon\to 0)]{} 0\right),
\end{cases} \tag{27}
$$

где $G>_2(5$) = sup |z(T)-z(s)| - модуль непрерывности. Тогда, учитывая условия (24) и |г-ф<у (27), Следует

$$
\begin{cases}
\|\theta_\varepsilon(t) - \theta(t)\|_C \le N_1\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \\
\|z_\delta(t) - z(t)\|_C \le 2N_1\dfrac{1}{\delta}\varepsilon + \|\Delta(\delta,z)\|_C \xrightarrow[\delta\to 0(\varepsilon\to 0)]{} 0, \\
\|z(t)\|_C \le 2\left[2N_1\dfrac{1}{\delta}\varepsilon + N_0 + 4\omega_z(\delta^\beta)\right] \le r, \\
0 < \delta \le \delta_0 = (\ln 8)^{-\frac{1}{1-\beta}} < 1,
\end{cases} \tag{28}
$$

то есть

$$
\begin{cases}
\xi_\varepsilon(t) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \forall t \in C[0,T], \\
\eta_\delta(t) \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0, \forall t \in C[0,T].
\end{cases} \tag{29}
$$

А это означает, что имеет место условие (*). Лемма 2 доказана.

Теорема 1. При выполнении условий лемм 1 и 2, обратная задача (1)-(3) регуляризируема в W_c (Q), при этом

$$
\|\Psi\|_{W_C} = \|U\|_{C^{2,2}(\bar{\Omega})} + \|z\|_{C[0,T]}, \|\Psi\|_{W_C} \le C_*, \left(C_1 + r = C_*\right).
$$

Заключение

В данной работе исследована нелокально-обратная задача в неограниченной области с интегральной зависимостью $\mathit{в}W_C(Q)$. При определенных условиях с помощью модифицированного метода вспомогательной функции исходная задача сводится к системе интегральных уравнений, где содержатся уравнения Вольтерра третьего рода. Для доказательства достаточной разрешимости изучаемой задачи применен метод системной регуляризации интегральных уравнений третьего рода [8].

Список цитируемых источников

1. Аниконов Д.С. К вопросу о единственности решения обратных задач для уравнений математической физики // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т. 15, №1 – с.3-9.
2. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. – Новосибирск: Наука, 1999. – с.193
3. Бухгейм А.Л. Уравнение Вольтерра и обратные задачи. - Новосибирск: Наука, 1983. - с. 207
4. Магницкий Н.А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего рода // ЖВМ и МФ. – 1979. - Т.19, №4. – с. 970-989.
5. Нахушев А.М. Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральных уравнений Вольтерра третьего рода // дифференциальные уравнения. – Т.10, №1, 1974. - с. 100-111.
6. Омуров Т.Д. Методы регуляризации интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода. - Бишкек: Илим, 2003. - с.162
7. Омуров Т.Д., Алыбаев А.М., Джумагулов К.Р. Обратно-нелокальная задача в неограниченной области, где вырождается неклассическое интегральное уравнение Вольтерра третьего рода //Наука, техника и образование. - №1(31)., 2017. с.10-15
8. Омуров Т.Д., Рыспаев А.О., Омуров М.Т. Обратные задачи в приложениях математической физики. - КНУ им. Ж. Баласагына. – Б.: 2014. – с.192
9. Омуров Т.Д., Джумагулов К.Р., Омуров М.Т. Регуляризация обратных задач, где вырождается уравнение Вольтерра первого рода с особым решением // Естественные и математические науки в современном мире: сб. ст. по матер. XLII междунар. науч.-практ. конф. №5(40). - Новосибирск: СибАК, 2016. - с. 98-110.
10. Треногин В.А. Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1980. – с.496.

Рецензенты: Мукамбаев Н.Ж. *– кандидат физико-математических наук, профессор МАУПФиБ*

Урманбетов Б.М. *– кандидат физико-математических наук, доцент АУЦА*