УДК: 519.635

БЕЙШЕКЕЕВ Ж.Ж., БЕЙШЕБАЕВА Ж.К., АЛТЫБАЕВ Н.Ы.
КНУ им. Ж. Баласагына, Бишкек
BEISHEKEEV J.J., BEISHEBAEVA J.K., ALTYBAEV N.I.
J. Balasagyn KNU, Bishkek

ЭНТРОПИЙНЫЙ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДЛЯ РАВНОВЕСНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Экономикалык башкаруу көйгөйлөрдү тең салмактуулук изилдөөдө энтропия Ыкмалары

Entropy research methods for equilibrium management in economic problems

В этой работе рассматривается применение энтропийного метода исследования для равновесного управления в экономических задачах. Показано, что энтропийный метод пригоден только для цепи с конечным числом состояний.

Ключевые слова: *равновесие в распределении ресурсов; энтропия для изучения динамики экономических задач; Марковский процесс-математический термин; стохастическая модель.*

Бул иште экономикалык башкаруу көйгөйлөрү тең салмактуулук изилдөөдө энтропия ыкмалары каралат. Бул метод сандын акыркы абалына ылайыктуу.

Урунттуу свздвр: *тең салмактуулук; ресурстардын таралышы; энтропия экономиканын кыймылдуу эсебинде колдонуу; Марковтук процесс; математикалык термин; тепкичтүү модел.*

In this paper the application of entropic research methods for equilibrium control in economic problems is considered that the for chains with a finite number of states.

Keywords: *equilibria; entropy; Markov process; stationary process; stochastic model.*

Введение. Многие свойства и закономерности, присущие физическим макросистемам, обнаруживаются в сложных системах совершенно иной природы. Среди них, прежде всего, следует указать системы обмена или распределения экономических ресурсов. Обычно такой обмен осуществляется между экономическими ячейками и в зависимости от степени централизации, принятой в данной экономической системе. Однако как бы не была высока степень централизации, экономическая система обмена столь сложна, что неуправляемые факторы в ней всегда остаются. В системе экономического обмена существуют два существенно отличающихся друг от друга уровня: уровень стохастических межэлементных взаимодействий и уровень детерминированных характеристик - таким образом, поведение экономической системы в целом дает основания использовать макросистемную модель. Мы изучаем эти равновесные экономические процессы, происходящие в системах экономического обмена, при помощи энтропийного метода. Изучение производится только для устойчивых экономических задач. Закономерности, присущие равновесным состояниям в системах экономического обмена, во многом аналогичны тем, которые имеют место в физических системах. Хотя эти аналогии не привели к появлению новых моделей экономического обмена, но они способствовали упорядочению и формализации качественных идей и понятий. В настоящей работе потребление связано с передвижением элементов системы в некотором абстрактном пространстве. Естественно, что такие передвижения сопровождаются постоянным взаимодействием элементов, приводящим к случайным перераспределениям ресурсов между ними. Механизм такого взаимодействия можно описать, используя предположение о существовании небольших промежутков времени, в течение которых не происходит ни одного взаимодействия. Тогда траектории движения элементов системы можно разделить на группы в зависимости от «направления» и величины потребляемых при этом ресурсов. Такие группы назовем «коммуникациями». Если начальный и конечный моменты указанного выше промежутка рассматриваемого пространства разбить на пронумерованные небольшие объемы, то направление этих коммуникаций определяется парой индексов (j, i), первый из которых (j) будет указывать на номер «объема» в начальный момент времени, а второй (i) – в конечный. Заметим, что ресурсы, потребляемые элементами, и сами элементы могу иметь совершенно разную природу. Так, в физической системе – газе такими элементами являются атомы или молекулы, а ресурсом – энергия рассматриваемой системы. В системе передачи информации элементы – это коды различных символов, имеющие различные длины, а ресурс – общая длина передаваемого сообщения. В экономической системе при решении транспортных задач элементами являются количества некоторого продукта, а ресурсом – стоимость его доставки от пунктов производства до пунктов потребления. Ниже понятие «ресурса» связано с наличием некоторого множества коммуникаций, соединяющих элементы системы, и с характеристиками этих коммуникаций.

Энтропийные понятия коммуникационной системы

Рассмотрим некоторую систему, состоящую из достаточно большого числа однотипных компонент. Имея в виду многочисленность этих компонент, будем впредь называть их частицами. Очевидно, что для получения хотя бы минимальной информации об изучаемой системе, необходимо, прежде всего, научиться отличать друг от друга ее компоненты, состоящие из частиц. Пусть за каждой частицей можно закрепить один или несколько детерминированных признаков, по каждому из которых все множество частиц можно разбить на непересекающиеся группы.

Пусть, например, компоненты системы определены в некотором конечном пространстве и принадлежат множеству системы. Разделим это множество на более мелкие частицы, пронумеруем их и укажем характерные координаты. Тогда принадлежность частиц той или иной части пространства служит одним из отличительных признаков. Назовем этот признак пространственным распределением частиц. Другими отличительными признаками частиц могут быть их химический состав, вес, форма, заряд и тому подобные. Группы, образованные одним, например, r– м признаком, назовем группами r–го признака. Признак может быть химическим составом вещества, или пространственным координатным распределением частиц. В экономике он может определяться продолжительностью производственного цикла; в физике – длиной свободного пробега и скоростью молекул, временем релаксации. Заметим, что введенные выше первые два признака могут быть совершенно разной природы и примерно соответствуютначальным и конечным состояниям статистического равновесия.

В общем же случае, в передвижениях могут участвовать все частицы. Пусть данные передвижения осуществляются по специальным каналам связи групп первого и второго признака (коммуникациям). Предположим, что каждому каналу связи можно поставить в соответствие определенную величину, называемую характеристикой канала. Характеристиками могут быть, например, длина канала или время, затрачиваемое на его преодоление. Отметим, что каналы связи, так же как и частицы, могут быть интерпретированы как элементы коммуникационных систем. Тогда характеристика канала связи будет его отличительным признаком. Разница же между каналами и частицами заключается в том, что частицы «выбирают» каналы связи, а не наоборот. Естественно, что вместе с «выбором» канала частица «выбирает» и его характеристику. Поэтому сумму характеристик каналов, поставленных в соответствие каждой частице, можно рассматривать как некоторый ресурс, потребляемый частицами. Таким образом, характеристика канала становится и характеристикой частицы. Будем называть эту характеристику третьим отличительным признаком частиц.

В экономике при решении транспортной задачи частицами являются некоторые доли распределяемого продукта. Первым отличительным признаком этих частиц или начальным состоянием системы является принадлежность этого продукта тому или иному пункту производства, вторым отличительным признаком или конечным состоянием – его распределение по пунктам потребления. Коммуникациями будут являться маршруты перевозок между этими пунктами, а их характеристиками – стоимость перевозок.

В замкнутой механической системе заданные точки можно рассматривать как множество частиц, для которых отличительным признаком служит их распределение в 2s–мерном пространстве. Рассматривая такие распределения в начале и конце описанного выше промежутка времени, вновь получаем понятия начального и конечного состояния или распределения. Коммуникациями при этом будут группы траектории, начало и конец которых находится в полученных ранее объемах с одинаковыми номерами.

Рисунок 1. На рисунке 1 изображены двенадцать ячеек, заполненных газом, отделенных перегородками, при открытии которых посредством диффузионного процесса возникает равновесие. Газовому равновесию адиабатического состояния соответствует максимум энтропии. В данном случае энтропия может иметь не одно, а несколько состояний. Равновесие, которому соответствует наибольший максимум энтропии, называется абсолютно устойчивым (стабильным). Закон возрастания энтропии выполняется только для большего промежутка времени.

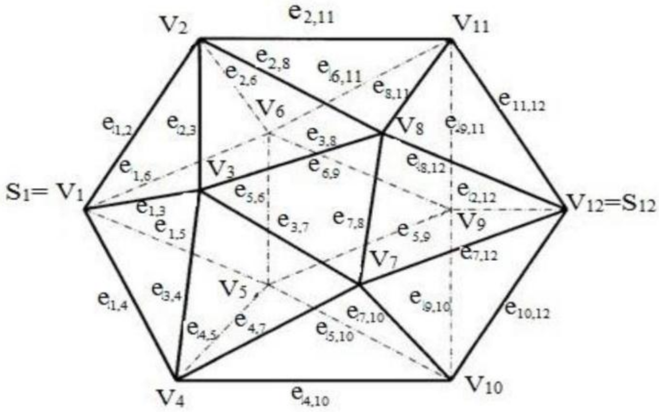

Рис.2. Пример коммуникационной системы.

На рисунке 2 изображен возможный пример симметричной коммуникационной системы. Эта коммуникационная система имеет двенадцать вершин для размещения обменивающихся ресурсов, где газовые ячейки обмениваются друг с другом посредством диффузии как показано в рисунке 1. [4]. В этой работе для исследования представлена модель сетевого потока в симметричном графовом соединении. Для данной модели разработана программа [5]. В этой работе рассматривается применение вариационных методов в устойчивой экономической коммуникационной задаче. Данная программа динамична и изменяется в сочетании с вариационными принципами, проходя максимум и минимум.

Известно, что детерминированные коммуникационные системы рассматриваются как предельный частный случай стохастических систем. Поэтому в настоящей работе

будут рассматриваться более общие стохастические коммуникационные системы. Если определим для каждого промежуточного состояния специальную характеристику, связанную с вероятностью его реализации, и аналогичную, в некотором смысле, энтропии физической системы. Тогда одним из свойств замкнутой физической системы является достижение ею со временем устойчивого состояния, соответствующего максимальному значению ее энтропии. Это свойство подтверждено экспериментально и сформулировано в виде закона физики.

Настоящая работа посвящена изучению промежуточных состояний стохастических коммуникационных систем, обладающих аналогичным свойством.

Следует отметить, что введенное здесь понятие коммуникационной системы является абстрактным. И только в том случае, если элементам системы придать соответствующий смысл и учесть естественные ограничения, налагаемые на начальное, конечное и промежуточные состояния, тогда рассматриваемые модели приобретают реальный смысл ***модели стохастических коммуникационных систем.***

Пусть работа коммуникационной системы состоит в перемещении частиц из п групп начального состояния (будем их в дальнейшем их называть истоками) в m групп конечного состояния (стоков). Построенные модели должны определять промежуточные состояния, т.е. потоки *Xц,1 = \,. . . , m ; j = l,. . .,n* из истоков в стоки. Очевидно, что возможности определения ^-зависят от имеющейся информации и именно по этому признаку модели систем могут быть классифицированы.

Другой пример можно получить, если совмещенные попарно истоки и стоки разместить равномерно по окружности, а в качестве значения характеристики коммуникации принять геометрическое расстояние между элементами системы. Потоки *хц,* соответствующие этой модели, определяются формулами (2.32),(2.33). **Алгоритмы определения потоков в коммуникационных системах**

Моделирование стохастических коммуникационных систем сводится, как уже знаем, в конечном счете, к условной максимизации функции, зависящей от потоков $^{x}ij\backslash^{x}ijk)$. Когда управляем распределением продуктов и распределением труда, пусть управляющий орган точно указывает, какое количество каждого продукта и каждого вида труда должен получить или отдать каждый экономический объект. Также управляющий орган устанавливает цены на все продукты и на все виды труда, а экономические объекты сами выбирают себе желаемые наборы продуктов в пределах получаемого ими дохода.

Итак, условимся, что каждый объект имеет возможность сам, пользуясь своей системой предпочтений, выбирать нужные ему продукты и вид труда. Однако при этом далеко не любые цены гарантируют удовлетворение спроса по всем видам продуктов; более того, заранее не ясно, существует ли вообще набор цен на все продукты, обеспечивающий удовлетворение спроса по всем продуктам.

Целью настоящей работы является построение одной экономико-математической модели, которая показывает принципиальную возможность реализации такого способа распределения продуктов. Именно в рамках этой модели будет доказано существование цен, обеспечивающих удовлетворение спроса всех объектов на все продукты, а также доказан тот факт, что получаемое при этом распределение продуктов является в определенном смысле «удовлетворительным» с точки зрения самих объектов.

Чтобы создать модель распределения продуктов, рассмотрим экономическую систему, состоящую из экономических объектов Pi, P2,.,P_m; эти объекты могут обмениваться продуктами Gi, G_2,… G„ . Состояние объекта Pi (i = 1,2, m) будем характеризовать вектором x; ={ξц, ξi2,…, ξin}, положительные компоненты которого указывают количества тех продуктов, которые объект P; отдает другим объектам, а отрицательные — количества тех продуктов, которые объект P; получает в обмен на отдаваемые продукты. Эти векторы x; не могут быть произвольными и должны принадлежать соответствующему «технологическому множеству» X;, являющемуся характеристикой объекта Pi

x;eXi (i=l, 2,...,m) (1)

Условия (1) представляют собой совокупность локальных ограничений. Для того чтобы обмен был возможен, должны быть выполнены также балансовые соотношения; именно суммарное отдаваемое всеми объектами количество продукта*G*/(j=l, 2,..., п) должно быть не меньше суммарного получаемого всеми объектами количества этого продукта. С учетом договоренности о знаках компонент векторов x;балансовые соотношения записываются в виде

YtLi^ij > 0 (j= 1, 2,…, п)

или, в векторной форме,

Y^iL\Xi > O (2)

Соотношения (2) есть глобальные ограничения в данной модели.

Набор векторов {x;, *X2,..., x_m},* удовлетворяющих условиям (1) и (2), будем называть *допустимым состоянием* всей системы.

Пусть теперь каждый объект P; имеет некоторую функцию полезности fi(x;). Если выбрать некоторое произвольное допустимое состояние *{x\, x\,..., x^},* то может оказаться, что найдется другое допустимое состояние {дг^,*x\, ...,Xm},* при котором функции полезности части объектов окажутся больше, чем в первом состоянии, а у всех остальных элементов они не уменьшатся. Естественно считать, что в этом случае допустимое состояние *{x\, x\,..., x^}* заведомо является неудовлетворительным.

Будем говорить, что допустимое состояние системы *{x_{lt} x_2,* ..., £т} является *оптимальным* состоянием, если в любом другом допустимом состоянии {x;*, X2,..., x_m}* имеет место одна из двух ситуаций: либо

а) для всех i

fi(xi) = *fi(x~i)* (i=1, 2,…, m), т. е. значения всех функций полезности не изменились, либо

б) найдется такой объект P;, что fi(xi) <fi(£ i),

т. е. при переходе из состояния *{$x_{lt}x_2$, …,x_m}* в любое другое допустимое состояние хотя бы у одного объекта значение его функции полезности уменьшится.

Очевидно, если система находится в состоянии оптимальном, то тем самым заведомо исключается возможность «улучшить» состояния одних объектов, не «ухудшая» состояния других объектов.

Будем считать, что целью управляющего органа является обеспечение оптимального состояния экономической системы.

Пусть для реализации этой цели управляющий орган производит распределение продуктов следующим образом: он назначает цены — вектор p= *{π\, π, π_m}* - на каждый продукт и покупает по этим ценам у объектов все те продукты, которые объекты «захотят» продать; одновременно каждый объект на вырученные деньги покупает у управляющего органа по тем же ценам продукты по своему усмотрению. Описанная ситуация с математической точки зрения означает, что состояние x; каждого объекта Рдолжно быть решением следующей задачи:

При условии fi(xi)=max,

(p, Xi) > 0, x;бX; , (3)

Первое ограничение в этой задаче носит название бюджетного ограничения; оно говорит о том, что суммарная стоимость купленных объектом продуктов не может быть больше стоимости проданных им продуктов.

Обозначим через x;(p) решение задачи (3). Очевидно, если цены p назначены произвольно, то, как правило, состояния x(p), (i=l,2, m) объектов не будут удовлетворять балансовым ограничениям

X^1^i(p) >0 (4)

Но это будет означать, что описанную выше процедуру распределения продуктов управляющий орган реализовать не сможет. Поэтому для обоснования принципиальной возможности указанного способа распределения продуктов необходимо доказать, что (в некоторых достаточно естественных предположениях) найдется вектор цен *) *p,* обеспечивающий выполнение балансовых соотношений (4). Установлено, что состояние всей системы при векторе цен *p* является оптимальным. Эти два математических результата можно рассматривать как теоретическое обоснование возможности распределения продуктов путем установления цен на них и свободной их продажи.

Равновесие в модели распределения продуктов и свойства состояний равновесия

Будем говорить, что в системе существует равновесие,

Если найдется такой вектор *p,* что ^^(p) > 0,*гдеx(p)*

есть решение задачи (3) при p= ₌ . Собственно равновесием будем называть совокупность векторов

$p, x_1(p), x_2(p), ..., x_m(p)$.

Для управления рассматриваемой системой необходимо знать еще как находить вектор p. Мы этой задачей заниматься не будем. Заметим, однако, что уже предложен ряд алгоритмов нахождения вектора p. Использование термина «равновесие» здесь может быть оправдано следующими соображениями. Если установлен вектор цен *p,* то для каждого объекта *P,*{вектор $x_t(p)$ при наличии бюджетного ограничения является наиболее выгодным с точки зрения его функции полезности. С другой стороны, состояние равновесия всей системы является оптимальным состоянием, так что управляющий орган достигает в этом состоянии своей цели. Таким образом, как отдельные объекты, так и управляющий орган оказываются «заинтересованными» в реализации состояния равновесия и будут стремиться к его реализации. Для существования равновесия в рассматриваемой модели распределения продуктов должны выполняться следующие три предположения:

1. Технологические множества *Xi(i=1,* 2, …, m)- выпуклые, замкнутые, ограниченные множества в n-мерном пространстве.

2. Обозначим через P множество векторов p_i таких, что

Yl}=1^n*j* = 1,^{77}/ > 0 (/ = 1, 2, ...,п);это множество называется

симплексом в пространстве E^n. Для любого вектора p£ *P* каждом технологическом множеств е X_t(*i* = 1, 2, ...,т)найдется такой вектор д^что

(M*)>0.

3. Функции полезности/j (Xj)- строго вогнутые непрерывные на *Xi(i* = 1, 2, ...,т)функции.

Далее мы вновь будем через ^обозначать вектор цен равновесия, а через *Xi(p)* - состояние объекта *pt* в равновесии; напомним, что каждый из векторов *Xip* (i=1, 2, m) является решением задачи

/i(x)=max, *(p,Xi) ≥0; XiϵXi.* (5)

Сделаем следующие предположения относительно равновесия ***p****,* $x_1(p), x_2(p)$,

4^0. У любого объекта P_t найдется состояние *x^eX^*такое что

fi(Xi)>fi(Xi(p)). (6)

Ясно, что вектор x_t не может удовлетворять бюджетному ограничению задачи (5), иначе вектор #i(p) не мог бы быть решением этой задачи.

Так что (*p,* £[)<(); (7)

Поэтому предположение 40 можно проинтерпретировать так: если бы объекту не надо было «платить» за получаемые продукты, то он мог бы повысить свою функцию полезности.

Еще из предположения 40 легко следует, что если некоторый вектор x_t принадлежит множеству X и, кроме того,

$(p, x_t) > 0$ (8)

то *fi*(*xd'^fi*(*Xi*(*p*))- (9)

Из (8) и (9) немедленно следует равенство

(*p,* АГ[(p)) = 0 (10)

говорящее о том, что если выполнено предположение 40, то бюджетное ограничение задачи (5) выполняется как равенство.

Итак, если все технологические множества X_t *(i=1,2, ... ,m) - выпуклые множества, а все функции полезности* /(***$_4$)- *вогнутые функции, и в модели распределения продуктов существует равновесие p ,* $x_г(p)$, ..., $x_m(p)$*, удовлетворяющее предположению* 40*, то состояние {*$x_г(p), x_2(p)$*,* ■■■*,* $x_m(p)$*} является оптимальным.*

Список цитируемых источников

1. Больцман Л. Второй закон механической теории тепла // Больцман Л. Статьи и речи. М: Наука, 1970.

2. Бейшекеев.Ж.Ж. Структурное программирование и численные методы на языка паскал 6. Изд. КНУ. Бишкек. 2004 г.
3. Бейшекеев.Ж.Ж. Динамические программирования с учетом симплекс-метода. Вестник КНУ им. Ж. Баласагына 2006г. Естественно-технические науки. с. 48.
4. Бейшекеев.Ж.Ж. Программирование образов методом Монте-Карло. КГПУ им. Арабаева. Материалы конференции 2003 г. с.106-114.
5. Бейшекеев. Ж. Ж. Жусупбаев. А. Теория графов в энергетических задачах. Труды ИВМи МГ СО РАН Выпуск 8. Новосибирск 2008. с.175.
6 Бейшекеев Ж. Ж. Сруктуробразование молекул в графах. // Наука и новые технологии. - Бишкек.: 2009. №2. с.225-260.
7. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. Изд. Мир, Москва 1978.
8. Бейшекеев. Ж. Ж. Приложения химических графов в энергетических системах. / /Наука и новые технологии. - Бишкек.: 2009. №1. с.3-8.
9. Пригожин И. Порядок из хаоса: Новый диалог человека с природой. М.: Прогресс, 1986.
10. Тутов Л.А., Рогожникова В.Н. Экономика и математика: возможности и границы взаимодействия // Философия хозяйства. 2015. № 6.
11. Худокормов А.Г. Экономическая теория: Новейшие течения Запада: учеб. пособие. М.: ИНФРА-М, 2009.
12. Шаститко АЕ. Новая институциональная экономическая теория. М.: Экономический факультет МГУ, ТЕИС, 2010
13. Кемени Джон Джорж и др. Конечные цепи Маркова. Изд. «Наука», Москва 1970.

14. Ю.М. Ермольев, А. И. Ястремский. Стохастические модели и методы в экономическом планировании. Изд. «Наука», Москва, 1979 г.
15. В.С.Михалевич А.И. Кукса. Методы последовательной оптимизации. Изд. «Наука», Москва, 1983.

Рецензенты: Жусупбаев А.Ж. *- доктор физико-математических наук, профессор НАН КР*
Абдыров Т.Ш. *- доктор экономических наук, профессор КНУ им. Ж. Баласагына*