УДК 517.9

КАКИШОВ Ж.К., КНУ им. Ж.Баласагына, Бишкек, Кыргызская Республика.
e-mail: binassi@mail.ru,
KAKISHOV ZH.K., KNU them. J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyz Republic.

САДЫКОВА Б.А., КНУ им. Ж.Баласагына, Бишкек, Кыргызская Республика,
e-mail: binassi@mail.ru,
SADYKOVA B.A., KNU them. J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyz Republic.

КАЗАКОВА Ж.У., КНУ им. Ж.Баласагына, Бишкек, Кыргызская Республика,
e-mail: Janat.kazakova @mail.ru
KAZAKOVA ZH.U., KNU them. J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyz Republic .

КАКИШОВ Ж.К., КНУ им. Ж.Баласагына, Бишкек, Кыргызская Республика.
e-mail: binassi@mail.ru,
KAKISHOV ZH.K., KNU them. J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyz Republic.

САДЫКОВА Б.А., КНУ им. Ж.Баласагына, Бишкек, Кыргызская Республика,
e-mail: binassi@mail.ru,
SADYKOVA B.A., KNU them. J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyz Republic.

КАЗАКОВА Ж.У., КНУ им. Ж.Баласагына, Бишкек, Кыргызская Республика,
e-mail: Janat.kazakova @mail.ru
KAZAKOVA ZH.U., KNU them. J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyz Republic .

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

ASYMPTOTIC SOLVING OF BOUNDARY EQUATION FOR SINGULAR PERTURBED NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH IMPULSE PRESSURE

Импульстун таасири астындагы, сызыктуу эмес сингулярдык-козутулган дифференциалдык теңдеме үчүн асимптотикалык үзгүлтүктүү чыгарылышы түзүлдү. $(0,1]$ кесиндисинде $\varepsilon \to 0$ үчурда импульстук, скалярдык сингулярдык-козутулган дифференциалдык теңдеме үчүн баштапкы маселенин үзгүлтүктүү чыгарылышынын жалгыздыгынын жетиштүү шарттары алынды.

Өзөк сөздөр: *асимптотика, баштапкы маселе, импульстун таасири, Хевисайддын тепкичтүү функциясы, Дирактын импульстук дельта-функциясы, чектик катмардын фукнциясы, биринчи түрдөгү үзүлүү, кичине параметр.*

Построены асимптотические формулы для нелинейных сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Получены достаточные условия существования и единственности разрывного решения начальной задачи для скалярных сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием при $\varepsilon \to 0$ на отрезке $(0,1]$.

Ключевые слова: *асимптотика, начальная задача, импульсное воздействие, ступенчатая функция Хевисайда, импульсная дельта-функция Дирака, функция пограничного слоя, разрыв первого рода, малый параметр.*

Asymptotic formulas for nonlinear singularly perturbed differential equations with impulse

control were developed. Have been received enough conditions of existence and singularity of perturbed equations for singular perturbed differential equations with impulse control under $\varepsilon \to 0$ *when on the segment* $(0,1]$.

Key words: *asymptotic boundary equation, impulse, Hevisayd's step function, impulse Dirac's delta function, the first kind of gap, a small parameter.*

В данной работе рассматривается особенности, возникающие при нарушении известных условий [1]. В работах [2],[3],[4],[5] исследованы разрывные решения сингулярно-возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений, когда вырожденное уравнение имеет разрывные решения.

Здесь получено асимптотическое представление решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon y'(x,\varepsilon) = f_0(x,y(x,\varepsilon)) + \sum_{k=1}^{n}\theta(p_k)f_k(x,y(x,\varepsilon)) + \varepsilon\sum_{k=1}^{n}A_k\delta(p_k),\ \ (0\le x\le 1) \qquad (1)$$

$$y(0)=b, \qquad (2)$$

где $0<\varepsilon<1,\ b, A_k$ - заданные постоянные,

$p_k = x - x_k,\ 0<x_1<x_2<...<x_n<1$ - некоторые заданные числа,

$\theta(x)$ - функция Хевисайда – «единичная ступенька»,

$\theta(+0)=1$, $\theta(0)=0$, $\theta'(p_k)=\delta(p_k)$ - обобщенная дельта-функция Дирака «единичный импульс», $f_k(x,y)$ девять раз непрерывно дифференцируемая функция и ее производные ограничены.

$f_k(x_k,y) = f'_{kx}(x_k,y) = f''_{kx^2}(x_k,y) = f'''_{kx^3}(x_k,y) = f^{(IV)}_{kx^4}(x_k,y) = f^{(V)}_{kx^5}(x_k,y) = f^{(VI)}_{kx^6}(x_k,y) = 0,$

$M(f^{(VIII)}_{kx^7y}(x,y)) \le -\alpha_k H(x)$, где α_k -постоянная, $\alpha_k>0$. $H(x)=\min_{1\le k\le N}\{|x-x_k|^7, k=\overline{1,N}\}$.

Полагая $\varepsilon=0$ из (1) получаем:

$$f_0(x,\upsilon) + \sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)f_k(x,\upsilon) = 0. \qquad (2_0)$$

Решение нелинейного функционально-алгебраического уравнения ищем в виде:

$$\upsilon(x) = \upsilon_0(x) + \sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)\upsilon_k(x), \qquad (2_1)$$

где $[\upsilon_0,\upsilon_1,...,\upsilon_N]$ пока неизвестные функции.

Подставляя (2_1) в (2_0) получаем:

$$f_0(x,\upsilon_0+\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)\upsilon_k) + \sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)f_k(x,\upsilon_0+\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)\upsilon_k) =$$

$$= f_0(x,\upsilon_0) + \theta(p_1)(f_0(x,\upsilon_0+\upsilon_1) + f_1(x,\upsilon_0+\upsilon_1) - f_0(x,\upsilon_0)) +$$

$$+\theta(p_2)[\sum_{k=0}^{2}f_k(x,\sum_{k=0}^{2}\upsilon_k) - \sum_{k=0}^{1}f_k(x,\sum_{k=0}^{2}\upsilon_k)] + ... +$$

$$+\theta(p_N)[\sum_{k=0}^{N}f_k(x,\sum_{k=0}^{N}\upsilon_k) - \sum_{k=0}^{N-1}f_k(x,\sum_{k=0}^{N-1}\upsilon_k)] = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при $\theta(p_k)$ получим:

$$f_0(x,\upsilon_0(x)) = 0 \quad (0\le x\le 1), \qquad (2_2)$$

$$f_0(x,\upsilon_0+\upsilon_1) + f_1(x,\upsilon_0+\upsilon_1) = 0 \quad (x_1\le x\le 1), \qquad (2_3)$$

- -

$$\sum_{k=0}^{N}f_k(x,\sum_{k=0}^{N}\upsilon_k(x)) = 0, \quad (x_N\le x\le 1). \qquad (2_N)$$

Предполагается, что решение $\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_N$ соответственно удовлетворяют уравнениям $(2_2), (2_3), \ldots, (2_N)$.

Теорема. Пусть 1) вырожденное уравнение (2_2)-(2_N) для (1) (2) имеет устойчивое решение с конечным числом разрывов первого рода

$$\upsilon(x) = \upsilon_0(x) + \sum_{k=1}^{N} \theta(p_k)\upsilon_k(x).$$

2) Выполняется тождество

$$f_k(x_k, y) = f'_{kx}(x_k, y) = f''_{kx}(x_k, y) = f'''_{kx}(x_k, y) = f^{(IV)}_{kx}(x_k, y) = f^{(V)}_{kx}(x_k, y) = f^{(VI)}_{kx}(x_k, y) = 0.$$

3)Функция $f_k(x, y) \in C^9$.

4) $M(f^{(VIII)}_{kx^7 y}(x, y)) \le -\alpha_k H_k(x)$, $H_k(x) = \min\limits_{1 \le k \le N}\{|x - x_k|^7, k = \overline{1, N}\}$ α_k - постоянная $\alpha_k > 0$.

Тогда задача Коши (1)-(2) имеет единственное разрывное решение, представимое в виде:

$$y(x,\varepsilon) = \upsilon_0(x) + \prod\nolimits_0(\tau) + \varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_0(x,\varepsilon) + \sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)(\upsilon_k(x) + \prod\nolimits_k(\tau_k) + \varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_k),$$

причем, при $\varepsilon \to 0$, это решение сходится к разрывному решению (2_1) на полусегменте $(0,1]$,

где $\tau_k = \dfrac{|x - x_k|^7 (x - x_k)}{8\varepsilon}$, $\tau = \dfrac{x}{\varepsilon}$, $|\prod_0| \le C_0 e^{-\alpha_0 \tau}$, $C_0 > 0$.

$|\prod_k| \le C_k e^{-\alpha_k \tau_k}$ -функция правого внутреннего пограничного слоя, ξ_0, ξ_k равномерно ограничены при $\varepsilon \to 0$.

Основные этапы доказательства.

Подстановкой :

$$y(x,\varepsilon) = y_0(x) + \sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)\, y_k(x) \tag{3}$$

с начальным условием

$$y_0(0) = b. \tag{3_0}$$

Уравнение (1) приводится к виду:

$$\begin{aligned} &\varepsilon y'_0 + \varepsilon\sum_{k=1}^{N}\delta(p_k)y_k(x_k) + \varepsilon\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)y'_k = f_0(x, y_0 + \sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)y_k) + \\ &+\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)f_k(x, y_0 + \sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)y_k) + \varepsilon\sum_{k=1}^{N}A_k\delta(p_k). \end{aligned} \tag{3_1}$$

Приравнивая коэффициенты при $\delta(p_k)$, получим

$$y_k(x_k) = A_k \quad k = \overline{1, N}. \tag{3_2}$$

Уравнение (3_1) приводится к виду:

$$\varepsilon y'_0 + \varepsilon\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)y'_k = f_0(x, y_0 + \sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)y_k) + \sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)f_k(x, y_0 + \sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)y_k). \tag{3_3}$$

Приравнивая коэффициенты при $\theta(p_k)$ получим следующую цепочку нелинейных дифференциальных уравнений для определения неизвестных дифференциальных уравнений $y_0(x,\varepsilon), y_1(x,\varepsilon), \ldots, y_N(x,\varepsilon)$ на соответствующих отрезках:

$$\varepsilon y'_0 = f_0(x, y_0) \quad (0 \le x \le 1), \tag{3_4}$$

$y_0(0) = b$.

$$\varepsilon y'_1 = \sum_{k=0}^{1} f_k(x, y_0 + y_1) - f_0(x, y_0) \quad (x_1 \le x \le 1), \tag{3_5}$$

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

$y_1(x_1) = A_1$.

$$\varepsilon y_2' = \sum_{k=0}^{2} f_k(x, \sum_{k=0}^{2} y_k) - \sum_{k=0}^{1} f_k(x, \sum_{k=0}^{1} y_k) \ (x_2 \le x \le 1), \qquad (3_6)$$

$y_2(x_2) = A_2$.

- -

$$\varepsilon y_k' = \sum_{k=0}^{k} f_k(x, \sum_{k=0}^{N} y_k) - \sum_{k=0}^{k} f_k(x, \sum_{k=0}^{N} y_k) \ (x_k \le x \le 1), \qquad (3_k)$$

$y_N(x_k) = A_k$.

Будем теперь решать уравнения (3_4)-(3_k).

Доказательство теоремы представим в виде серии лемм.

Лемма 1. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ нелинейное дифференциальное уравнение (3_4) имеет единственное непрерывное решение, представимое в виде:

$$y_0(x,\varepsilon) = \upsilon_0(x) + \prod\nolimits_0(\tau) + \varepsilon^{\frac{1}{8}} \xi_0(x,\varepsilon), \qquad (3_8)$$

где $\prod_0(\tau)$-функция типа пограничного слоя в точке $x = 0$.

$\xi_0(x,\varepsilon)$-на сегменте $[0,1]$ равномерно ограничено, причем $\varepsilon \to 0$, это решение сходится к соответствующему непрерывному решению вырожденного уравнения (2_2) на полусегменте $(0,1]$.

Доказательство леммы 1. Начальные условия для неизвестных функций (3_8) возьмем в виде:

$$\prod\nolimits_0(0) = b - \upsilon_0(0), \ \xi_0(0,\varepsilon) = 0. \qquad (3_9)$$

Подставив (3_8) в (3_4) получим:

$$\varepsilon\upsilon_0' + \dot{\prod}_0 + \varepsilon \cdot \varepsilon^{\frac{1}{8}} \xi_0' = f_0(x, \upsilon_0 + \prod\nolimits_0 + \varepsilon^{\frac{1}{8}} \xi_0) = f_0(0, \upsilon_0(0) + \prod\nolimits_0) + [f_0(x, \upsilon_0(x) + \prod\nolimits_0) -$$

$$- f_0(0, \upsilon_0(0) + \prod\nolimits_0)] + [f_0(x, \upsilon_0 + \prod\nolimits_0 + \varepsilon^{\frac{1}{8}} \xi_0) - f_0(x, \upsilon_0 + \prod\nolimits_0)].$$

Определим неизвестные функции $[\prod_0(\tau), \xi_0]$ в виде:

$$\dot{\prod}_0 = f_0(0, \upsilon_0(0) + \prod\nolimits_0), \ 0 < \tau < \infty \qquad (4)$$

$\prod_0(0) = b - \upsilon_0(0)$,

$$\varepsilon\xi_0' = g_0(x,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{8}}} [f_0(x, \upsilon_0 + \prod\nolimits_0 + \varepsilon^{\frac{1}{8}} \xi_0) - f_0(x, \upsilon_0 + \prod\nolimits_0)], \qquad (4_0)$$

$\xi(0,\varepsilon) = 0$,

где

$$g_0(x,\varepsilon) = -\varepsilon^{\frac{7}{8}} \upsilon_0' + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{8}}} [f_0(x, \upsilon_0(x) + \prod\nolimits_0) - f_0(0, \upsilon_0(0) + \prod\nolimits_0)].$$

Решению нелинейного дифференциального уравнения (4_0) удовлетворяет неравенство $|\prod_0(\tau)| \le e^{-\alpha_0\tau} |b - \upsilon_0(0)|$,

где $f_{0y}'(0, \upsilon_0(0)) \le -\alpha_0 = const > 0$,

$$|g_0(x,\varepsilon)| \le C_0 \varepsilon^{\frac{7}{8}} + C_0 \frac{|x|}{\varepsilon^{\frac{1}{8}}} |\prod\nolimits_0| \le C_0 \varepsilon^{\frac{7}{8}} + C_0 \varepsilon^{\frac{7}{8}} \frac{|x|}{\varepsilon} |\prod\nolimits_0| \le C_0 \varepsilon^{\frac{7}{8}}, \ \ C_0 = const > 0.$$

Нелинейное дифференциальное уравнение (4_0) запишем в виде:

$$\varepsilon\xi_0' = g_0(x,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{8}}}|x-x_1|^7\ [f^{(IV)}_{0x^5}(x,\upsilon_0+\Pi_0+\varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_0 - f^{(IV)}_{0x^5}(x,\upsilon_0+\Pi_0))]$$

$$= g_0(x,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{8}}}|x-x_1|^7\ [f^{(VIII)}_{0x^7y}(x,\upsilon_0+\Pi_0)\varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_0 + f^{(IX)}_{0x^7y^2}(x,\upsilon_0+\Pi_0+\theta_0\varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_0)\frac{\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_0^{\ 2}}{2}]$$

$$=|x-x_1|^7\ f^{(VIII)}_{0x^7y}(x,\upsilon_0)\xi_0 + |x-x_1|^7\ [f^{(IX)}_{0x^7y^2}(x,\upsilon_0+\Pi_0) - f^{(VI)}_{0x^5y}(x,\upsilon_0)]\xi_0 +$$

$$+|x-x_1|^7\ \varepsilon^{\frac{1}{8}}\ f^{(IX)}_{0x^7y^2}(x,\upsilon_0+\Pi_0+\theta_0\varepsilon^{\frac{1}{6}}\xi_0)\frac{\xi_0^{\ 2}}{2}.$$

Переходим к интегральному уравнению:

$$\xi_0(x,\varepsilon) = \int_0^x e^{-\alpha_0\int_s^x\frac{|t-x_1|^7}{\varepsilon}dt}\ \frac{1}{\varepsilon}[g_0(s,\varepsilon)+|s-x_1|^7\ \gamma_0(s,\xi_0)]\,ds =$$

$$= \int_0^{x_1} e^{-\frac{\alpha_0}{\varepsilon}\int_s^{x_1}(x_1-t)^7\,dt}\ \frac{1}{\varepsilon}[g_0(s,\varepsilon)+(x_1-s)^7\gamma_0(s,\xi_0)]\,ds +$$

$$+\int_{x_1}^x e^{-\frac{\alpha_0}{8\varepsilon}[(x-x_1)^8-(s-x_1)^8]}\ \frac{1}{\varepsilon}[g_0(s,\varepsilon)+(s-x_1)^7\gamma_0(s,\xi_0)]\,ds =$$

$$= \int_0^{x_1} e^{-\frac{\alpha_0}{8\varepsilon}(x_1-s)^8}\ \frac{1}{\varepsilon}[g_0(s,\varepsilon)+(x_1-s)^7\gamma_0(s,\xi_0)]\,ds + \int_{x_1}^x e^{-\frac{\alpha_0}{8\varepsilon}[(x-x_1)^8-(s-x_1)^8]}\ \frac{1}{\varepsilon}[g_0(s,\varepsilon)+(s-x_1)^7\gamma_0(s,\xi_0)]\,ds,$$

где $\gamma_0(x,\xi) \equiv [f^{(VIII)}_{0x^7y}(x,\upsilon_0+\Pi_0) - f^{(VIII)}_{0x^7y}(x,\upsilon_0)]\xi_0 + \varepsilon^{\frac{1}{8}}\ f^{(IX)}_{0x^7y^2}\ \frac{\xi_0^{\ 2}}{2}$.

Имеет место оценка

$$|\gamma_0(x,\xi)| \le C_0|\Pi_0||\xi_0| + C_0\,\varepsilon^{\frac{1}{8}}|\xi_0|^2.$$

Рассмотрим интеграл:

$$\int_0^{x_1} e^{-\frac{\alpha_0}{8\varepsilon}(x_1-s)^8}\ \frac{1}{\varepsilon}g_0(s,\varepsilon)\,ds \le \int_0^{x_1} e^{-\frac{\alpha_0}{8\varepsilon}(x_1-s)^8}\ \frac{1}{\varepsilon}C_0\varepsilon^{\frac{7}{8}}\ ds = C_0\int_0^{x_1} e^{-\frac{\alpha_0}{8\varepsilon}(x_1-s)^8}\ \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{8}}}ds,$$

$$\sqrt[8]{\alpha_0}\,\frac{(x_1-s)}{\sqrt[8]{8\varepsilon}} = \nu\ ,\ s=x_1,\ \nu=0,\ s=0,\ \frac{\sqrt[8]{\alpha_0}\,x_1}{\sqrt[8]{8\varepsilon}} = \nu,\ \nu\approx\infty$$

$$-ds = \sqrt[8]{\frac{8\varepsilon}{\alpha_0}}d\nu,\ ds = -\sqrt[8]{\frac{8\varepsilon}{\alpha_0}}d\nu,$$

$$C_0\int_0^{x_1} e^{-\frac{\alpha_0}{8\varepsilon}(x_1-s)^8}\ \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{8}}}ds \approx C_0\int_0^\infty e^{-\nu^8}\sqrt[8]{\frac{8}{\alpha_0}}d\nu = C_0\sqrt[8]{\frac{8}{\alpha_0}}\int_0^\infty e^{-\nu^8}d\nu =$$

$$=|\nu\quad t^{\frac{1}{8}}|\quad \frac{C_0\sqrt[8]{\frac{8}{\alpha_0}}}{8}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{1}{8}-1}dt\quad C_0\sqrt[8]{\frac{8}{\alpha_0}}\,\frac{1}{8}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{1}{8}-1}dt \qquad = \qquad =$$

$$= C_0\sqrt[8]{\frac{8}{\alpha_0}}\,\frac{1}{8}\,\Gamma\left(\frac{1}{8}\right).$$

Имеет место оценка

$$|\xi_0| \le C_0 + C_0|b-\upsilon_0(0)||\xi_0| + \varepsilon^{\frac{1}{8}}C_0|\xi_0|^2$$

отсюда

$$|\xi_0|\le 4C_0,\ |b-\upsilon_0(0)|\le \frac{1}{2C_0},\ 0<\varepsilon^{\frac{1}{8}}\le \frac{1}{16C_0^{\,2}}.$$

Таким образом, лемма доказана.

Лемма 2. Существует такое $\varepsilon_1>0$, что при $\varepsilon<\varepsilon_1$ нелинейное дифференциальное уравнение (3_5) имеет единственное решение, представимое в виде:

$$y_1(x,\varepsilon)=\upsilon_1(x)+\prod\nolimits_1(\tau_1)+\varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_1(x,\varepsilon),\tau_1=\frac{\left|(x-x_1)^7\right|(x-x_1)}{8\varepsilon} \qquad (4_1)$$

где $\prod_1(\tau_1)$ - функция типа пограничного слоя в точке $x=x_1$,

$\xi_1(x,\varepsilon)$-на сегменте $[x_1,1]$ равномерно ограничено, причем $\varepsilon\to 0$. Это решение сходится к соответствующему непрерывному решению вырожденного уравнения (2_3) на полусегменте $(x_1,1]$.

Доказательство леммы 2.

В уравнение (3_5) сделаем подстановку вида (4_1) со следующими начальными условиями:

$$\prod\nolimits_1(0)= A_1-\upsilon_1(x_1),\ \xi_1(x_1,\varepsilon)=0, \qquad (4_2)$$

где $\prod_1$, ξ_1-пока неизвестные функции.

Уравнение (3_5) приводится к виду

$$\varepsilon\upsilon_1'+\dot{\prod}\nolimits_1|x-x_1|^7+\varepsilon\cdot\varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_1' \quad \sum_{k=0}^{1}[f_{kx^7}^{(VII)}(x,\upsilon_0+\prod\nolimits_0+\varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_0+\upsilon_1+\prod\nolimits_1(\tau_1)+\varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_1)]|x-x_1|^7-$$

$$-f_{0x^7}^{(VII)}(x,\upsilon_0+\prod\nolimits_0+\varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_0)|x-x_1|^7\approx\sum_{k=0}^{1}[f_{kx^7}^{(VII)}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\prod\nolimits_1+\varepsilon^{\frac{1}{8}}(\xi_0+\xi_1)]|x-x_1|^7-$$

$$-f_{0x^7}^{(VII)}(x,\upsilon_0+\varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_0)|x-x_1|^7\approx|x-x_1|^7\sum_{k=0}^{1}[f_{kx^7}^{(VII)}(x_1,\upsilon_0(x_1)+\upsilon_1(x_1)+\prod\nolimits_1)+$$

$$+|x-x_1|^7\sum_{k=0}^{1}\{[f_{kx^7}^{(VII)}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\prod\nolimits_1)-f_{kx^7}^{(VII)}(x_1,\upsilon_0(x_1)+\upsilon_1(x_1)+\prod\nolimits_1)+$$

$$+[f_{kx^7}^{(VII)}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\prod\nolimits_1+\varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_0)-f_{kx^7}^{(VII)}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\prod\nolimits_1)]+$$

$$+[f_{kx^7}^{(VII)}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\prod\nolimits_1+\varepsilon^{\frac{1}{8}}(\xi_0+\xi_1))-f_{kx^7}^{(VII)}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\prod\nolimits_1+\varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_0)]\}-$$

$$-f_{0x^7y}^{(VIII)}(x,\upsilon_0+\theta_0\varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_0)|x-x_1|^7\ \varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_0.$$

Уравнения для $\prod_1$ и ξ_1 возьмем в виде:

$$\dot{\prod}\nolimits_1(\tau_1)\quad\sum_{k=0}^{1}f_{kx^7}^{(VII)}(x_1,\upsilon_0(x_1)+\upsilon_1(x_1)+\prod\nolimits_1)$$

(4_3)

с начальным условием

$$\prod\nolimits_1(0)= A_1-\upsilon_1(x_1), \qquad (4_4)$$

$$\varepsilon\xi_1'(x,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{8}}}|x-x_1|^7\sum_{k=0}^{1}(f_{kx^7}^{(VII)}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\prod\nolimits_1+\varepsilon^{\frac{1}{8}}(\xi_0+\xi_1))- \qquad (4_5)$$

$$-f_{kx^7}^{(VII)}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\prod\nolimits_1+\varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_0))+g_1(x,\varepsilon),$$

$$\xi_1(x_1,\varepsilon)=0, \qquad (4_6)$$

где

$$g_1(x,\varepsilon) = -\upsilon_1' \varepsilon^{\frac{7}{8}} - f^{(VIII)}_{0x^7y}(x, \upsilon_0 + \theta_0 \varepsilon^{\frac{1}{8}} \xi_0)\,|x-x_1|^7\, \xi_0 +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{8}}}|x-x_1|^7 \sum_{k=0}^{1}\Big[(f^{(VII)}_{kx^7}(x,\upsilon_0(x)+\upsilon_1(x)+\Pi_1) - f^{(VII)}_{kx^7}(x_1,\upsilon_0(x_1)+$$

$$+\upsilon_1(x_1)+\Pi_1)) + (f^{(VII)}_{kx^7}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1+\varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_0) - f^{(VII)}_{kx^7}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1))].$$

Решение нелинейного дифференциального уравнения (4_3)-(4_4) удовлетворяет оценке:

$$|\Pi_1| \le |A_1 - \upsilon_1(x_1)|\, e^{-\alpha_1 \tau_1}, \qquad (4_7)$$

где

$$\sum_{k=0}^{1} f^{(VII)}_{kx^7y}(x_1,\upsilon_0(x_1)+\upsilon_1(x_1)) \le -\alpha_1 \quad const > 0.$$

Имеет место оценка:

$$|g_1(x,\varepsilon)| \le C_1 \varepsilon^{\frac{7}{8}} + C_1 |x-x_1|^7, \quad C_1 \quad const > 0.$$

Нелинейное дифференциальное уравнение (4_6) запишется в виде

$$\begin{aligned}
&\varepsilon \xi_1' = |x-x_1|^7 \sum_{k=0}^{1}[(f^{(VIII)}_{kx^7y}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1+\varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_0)\xi_1 + \\
&+ f^{(IX)}_{kx^7y^2}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1+\varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_0+\theta_0\varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_1)\frac{\varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_1^2}{2}] + g_1(x,\varepsilon) = \\
&= |x-x_1|^7 \sum_{k=0}^{1} f^{(VIII)}_{kx^7y}(x,\upsilon_0+\upsilon_1)\xi_1 + |x-x_1|^7 \sum_{k=0}^{1}\{[f^{(VIII)}_{kx^7y}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1+\varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_0) - \\
&- f^{(VIII)}_{kx^7y}(x,\upsilon_0+\upsilon_1))]\xi_1 + \varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_1^2 f^{(IX)}_{kx^7y^2}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1+\varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_0+\theta_0\varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_1)\} + g_1(x,\varepsilon).
\end{aligned} \qquad (4_8)$$

Переходим к интегральному уравнению

$$\xi_1(x,\varepsilon) = \int_{x_1}^{x} e^{-\frac{\alpha_1}{8\varepsilon}[(x-x_1)^8-(s-x_1)^8]}\,\frac{1}{\varepsilon}[g_1(s,\varepsilon)+\gamma_1(s,\xi_1,\varepsilon)]\,ds, \qquad (4_9)$$

где

$$|\gamma_1(x,\xi_1,\varepsilon)| \le C_1 |x-x_1|^7 \,[|\Pi_1||\xi_1| + \varepsilon^{\frac{1}{8}}\left(|\xi_1|^2 + |\xi_1|\right)].$$

Имеет место оценки

$$|\xi_1| \le C_1 + C_1 |A_1 - \upsilon_1(x_1)||\xi_1| + \varepsilon^{\frac{1}{8}}(|\xi_1|^2 + |\xi_1|)C_1.$$

Отсюда получим:

$$|\xi_1| \le 4C_1 \quad const \quad x_1 \le x \le 1.$$

$$|A_1 - \upsilon_1(x_1)| \le \frac{1}{2C_1}, \quad 0 < \varepsilon^{\frac{1}{8}} < \frac{1}{4C_1(1+4C_1)}, \quad C_1 \quad const > 0.$$

Таким образом, лемма доказана.

Лемма 3. Существует такое $\varepsilon_k > 0$, что при $\varepsilon < \varepsilon_k$ нелинейные дифференциальные уравнения $(3_6),\ldots,(3_k)$ имеют решение вида:

$$y_2(x) = \upsilon_2(x) + \Pi_2(\tau_2) + \varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_2(x,\varepsilon), \quad (x_2 \le x \le 1), \qquad (4_{10})$$

……………………………………………………………

$$y_N(x) = \upsilon_N(x) + \Pi_N(\tau_N) + \varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_N(x,\varepsilon), \quad (x_N \le x \le 1), \qquad (4_{11})$$

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

где $\Pi_2(\tau_2)$, $\Pi_N(\tau_N)$ - функции типа пограничного слоя, $|\xi_k|$ $[x_k \le x \le 1]$ равномерно ограничены при $\varepsilon \to 0$, $k = \overline{1,N}$.

Решение нелинейных дифференциальных уравнений (3_k) с неизвестными Π_k, ξ_k будем искать в виде (4_k) с начальными условиями:

$$\Pi_k(0) \quad A_k - \upsilon_k(x_k), = \xi_k(x_k, \varepsilon) = 0. \qquad (5)$$

Подставим (4_{11}) в уравнение (3_7) получим:

$$\begin{aligned}&\varepsilon\upsilon_k' + \dot{\Pi}_k |x - x_k|^7 + \varepsilon \cdot \varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_k' \quad \sum_{i=0}^{k}[(f_i(x,\upsilon_0 + \Pi_0 + \varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_0 + \sum_{i=1}^{k}(\upsilon_i + \\ &+\Pi_i + \varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_i)] - \sum_{i=0}^{k-1} f_i(x,\upsilon_0 + \Pi_0 + \varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_0 + \sum_{i=1}^{k-1}(\upsilon_i + \Pi_i + \varepsilon^{\frac{1}{8}}\xi_i) \approx \\ &\approx |x - x_k|^7 \sum_{i=0}^{k} f_{ix^7}^{(VII)}(x,\upsilon_0 + \sum_{i=1}^{k}\upsilon_i + \Pi_k + \varepsilon^{\frac{1}{8}}\sum_{i=0}^{k}\xi_i) - \\ &-|x - x_k|^7 \sum_{i=0}^{k-1} f_{ix^7}^{(VII)}(x,\sum_{i=0}^{k-1}\upsilon_i + \varepsilon^{\frac{1}{8}}\sum_{i=0}^{k-1}\xi_i).\end{aligned} \qquad (5_0)$$

Уравнения для $[\Pi_k(\tau_k), \xi_k(x,\varepsilon)]$ возьмем в виде:

$$\dot{\Pi}_k = \sum_{i=0}^{k} f_{ix^7}^{(VII)}(x_k, \upsilon_0(x_k) + \sum_{i=1}^{k}\upsilon_i(x_k) + \Pi_k), \qquad (5_1)$$

$\Pi_k(0) = A_k - \upsilon_k(x_k)$.

Имеет место оценки:

$|\Pi_k| \le |A_k - \upsilon_k(x_k)| e^{-\alpha_k \tau_k}$,

где

$\sum_{i=0}^{k} f_{ix^7 y}^{(VIII)}(x_k, \upsilon_0(x_k) + \sum_{i=1}^{k}\upsilon_i(x_k)) \le -\alpha_k \quad const > 0.$

$\varepsilon\xi_k' + \alpha_k |x - x_k|^7 \xi_k = g_k(x,\varepsilon) + \gamma_k(x,\xi_k,\varepsilon)$,

$\xi_k(x_k) = 0$.

Имеет место оценки:

$|g_k(x,\varepsilon)| \le C_k \varepsilon^{\frac{7}{8}} + C_k |x - x_k|^7$,

$|\gamma_k(x,\xi_k,\varepsilon)| \le C_k |x - x_k|^7 |\Pi_k||\xi_k| + C_k |x - x_k|^7 \varepsilon^{\frac{1}{8}}[|\xi_k| + |\xi_k|^2]$

Переходим к интегральному уравнению:

$$\xi_k = \int_{x_k}^{x} e^{-\frac{\alpha_k}{8\varepsilon}[(x-x_k)^8 - (s-x_k)^8]} \frac{1}{\varepsilon}[g_k(x,\varepsilon) + \gamma_k(s,\xi_k,\varepsilon)]ds.$$

Имеет место оценка

$|\xi_k| \le 4C_k$, на сегменте $x_k \le x \le 1$ при $\varepsilon \to 0$,

где $|A_k - \upsilon_k(x_k)| \le \frac{1}{2C_k}$ $\quad 0 < \varepsilon^{\frac{1}{8}} < \frac{1}{4C_k(1+4C_k)}$, $\quad C_k > 0$.

Лемма доказана. Таким образом, совершается доказательство теоремы.

Список литературы

1. Тихонов А.Н. Математический сборник [Текст] / А.Н.Тихонов. – Москва: 1952.- Т.31. - №3. - с.575-586.
2. Какишов К.К. Исследование по интегро-дифференциальным уравнениям [Текст] / К.К.Какишов, Ж.К. Какишов. – Бишкек: Илим, 2014. - Вып.46. - с. 14.
3. Какишов К.К. Разрывные решения сингулярно-возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений [Текст] / К.К.Какишев // IV конференция по дифференциальным уравнениям и их приложениям Руссе, Болгария, август, 1989 г. Рез.докл. и сообщ. – Руссе: 1989. – с. 138.
4. Какишов К.К. Сингулярные возмущения, имеющих разрывные решения // Дифференциальные уравнения [Текст] / К.К.Какишев. – Фрунзе: 1990. – Т.26. - №12. - с. 181.
5. Какишов К.К. Асимптотические методы решения начальной задачи для скалярных сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [Текст] / К.К.Какишов, Ж.К. Какишов, Б.А. Садыкова // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек: 2018. - №2. - с. 8.