УДК 550.34:621.311.21 (575.2) (04)

ДВУМЕРНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛОТИНЫ ТОКТОГУЛЬСКОГО ГИДРОУЗЛА

А.А. Землянский – канд. физ.-мат. наук, доцент

Two-dimensional dynamic model of gravity-dependent structures is proposed by the example of Toktogul Hydroelectric Power Station.

В классических работах по теории устойчивости, как правило, анализируются возмущения, возникающие в начальном состоянии системы [1–7] или на ее внешнем входе. Для современного подхода характерно изучение возмущений в структуре самой системы. В обоих случаях целью изучения является определение изменений в поведении системы в результате незапланированных (нежелательных) возмущений. Практическая значимость такого исследования состоит в возможности своевременного предвидения возникающего несоответствия в структуре рассматриваемой системы с определением момента попадания в критическую область.

Фундаментальный закон динамики – второй закон Ньютона – определяется системой дифференциальных уравнений. Когда движение происходит вдоль прямой и сила, действующая на магистральную точку, зависит только от координат и скорости точки $F = F(x, \dot{x})$, такую модель можно представить в виде системы двух автономных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y); \quad \frac{dy}{dt} = f_2(x, y); \quad x(0) = x_0; \quad y(0) = y_0. \tag{1}$$

Здесь $f_1(x, y)$ – непрерывные функции в некоторой области евклидовой плоскости, имеющие в этой области непрерывные производные порядка не ниже первого.

Система уравнений (1) описывает [3, 8–9] так называемые автоколебания, свойственные автономным динамическим системам. При этом под автоколебаниями понимаются [1] незатухающие колебания в неконсервативных нелинейных системах, в процессе которых основные характеристики колебаний (амплитуда, частота, форма колебаний и т.д.) определяются параметрами системы и в некоторых пределах зависят от выбора начального состояния $(x = x_0, y = y_0)$. Исследования свойств устойчивости базируются на топологических методах анализа систем и представлениях о фазовом портрете.

Пусть на плоскости по осям координат расположены переменные (x, y). Каждой точке указанной плоскости с координатами (x, y) соответствует определенное состояние системы. Эта плоскость называется фазовой, а точка $K(x, y)$ – изображающей или представляющей точкой $[u_0]$. Совокупность всех точек $K(x, y)$ на фазовой плоскости (x, y), положение которых соответствует состояниям системы в процессе изменения, согласно уравнениям (1), называется фазовой траекторией. Фазовая плоскость, разбитая на траектории, дает фазовый портрет системы [10] и позволяет сразу охватить всю совокупность изменений переменных (x, y) при всевозможных начальных условиях.

Топологические методы анализа систем, определяемых дифференциальными уравнениями (1), позволяют получить полное представление о качественном характере решения и определяют ряд количественных [7, 11] показателей. В процессе исследования устойчивости динамических систем топологическими методами решения дифференциальных уравнений можно найти не в виде явных функций времени, а как интегральные кривые в фазовом пространстве.

А. Пуанкаре ввел классификацию особых точек в зависимости от характера интегральных кривых, т.е. в зависимости от корней [5] характеристического уравнения системы (1).

Постановка задачи. Пусть для каждого фундамента, на которые поделено тело плотины Токтогульской ГЭС, заданы составляющие приращений горизонтальных $\Delta u = \Delta u(t)$ и вертикальных $\Delta v = \Delta v(t)$ перемещений. Координаты конца вектора полного приращения перемещений будем отожествлять с текущими координатами системы.

В этом случае система уравнений (1) будет выглядеть:

$$\frac{d\Delta u}{dt} = f_1(\Delta u, \Delta v), \quad \frac{d\Delta v}{dt} = f_2(\Delta u, \Delta v) \tag{2}$$

при начальных условиях

$$\Delta u(0) = 0; \Delta v(0) = 0. \tag{3}$$

В окрестности стационарных значений разложим правые части уравнений (2) в ряд Тейлора. Имеем

$$\begin{aligned} f_1(\Delta u, \Delta v) &= f_1(0,0) + \\ &+ \left.\frac{\partial f_1}{\partial \Delta u}\right|_{\substack{\Delta u=0\\ \Delta v=0}} \cdot \Delta u + \left.\frac{\partial f_1}{\partial \Delta v}\right|_{\substack{\Delta u=0\\ \Delta v=0}} \cdot \Delta v + \cdots; \\ f_2(\Delta u, \Delta v) &= f_2(0,0) + \\ &+ \left.\frac{\partial f_2}{\partial \Delta u}\right|_{\substack{\Delta u=0\\ \Delta v=0}} \cdot \Delta u + \left.\frac{\partial f_2}{\partial \Delta v}\right|_{\substack{\Delta u=0\\ \Delta v=0}} \cdot \Delta v + \cdots \end{aligned} \tag{4}$$

После упрощения соотношений (4) получим:

$$f_1(\Delta u, \Delta v) = a_1 \Delta u + a_2 \Delta v; \quad f_2(\Delta u, \Delta v) = b_1 \Delta u + b_2 \Delta v, \tag{5}$$

где

$$a_1 = \frac{\partial f_1}{\partial \Delta u}; a_2 = \frac{\partial f_1}{\partial \Delta v}; \quad b_1 = \frac{\partial f_2}{\partial \Delta u}; b_2 = \frac{\partial f_2}{\partial \Delta v}. \tag{6}$$

С учетом (6) система (2) примет вид:

$$\frac{d\Delta u}{dt} = a_1 \Delta u + a_2 \Delta v; \quad \frac{d\Delta v}{dt} = b_1 \Delta u + b_2 \Delta v. \tag{7}$$

Исследование системы уравнений, моделирующих динамику плотины. Плотина гидроузла может вести себя как консервативная динамическая система. Оператор системы равен:

$$L = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad L := \begin{pmatrix} 4 \cdot 10^{-3} & 0.03 \\ 0.08 & -0.2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Известно, что для любой консервативной системы [1, 9, 10] существует гамильтониан $H(\Delta u, \Delta v)$ вида, при котором данная система может быть сведена к следующей:

$$\frac{d\Delta u}{dt} = f_1(\Delta u, \Delta v) = \frac{\partial H}{\partial \Delta v}; \quad \frac{d\Delta v}{dt} = f_2(\Delta u, \Delta v) = -\frac{\partial H}{\partial \Delta u}. \tag{9}$$

В области линейных приближений (6) имеем:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \Delta u} = \frac{\partial^2 H}{\partial u \Delta v} = -\frac{\partial f_2}{\partial \Delta v}.$$

Следовательно, $a_1 = -b_2$, или $Sp(tr)L = 0$. (10)

Таким образом, в случае моделирования плотины как консервативной системы след линейного оператора обращается в ноль. Последнее свидетельствует о симметричности спектра этого оператора, причем собственные частоты при этом $\omega_1 = -\omega_2$. Это означает, что при выходе на аттракторы начальные данные "забываются", т.е. система оказывается структурно неустойчивой.

Перейдем теперь к анализу модели (7) с точки зрения диссипативной системы.

Будем искать решение уравнений (7) в форме:

$$u = \Delta z_1 e^{\omega t}; \quad \Delta v = \Delta z_2 e^{\omega t}. \tag{11}$$

Подставив (9) в (7), получим:

$$\begin{aligned} \omega\Delta z_1 e^{\omega t} &= a_1\Delta z_1 e^{\omega t} + a_2\Delta z_2 e^{\omega t} \\ \omega\Delta z_2 e^{\omega t} &= b_1\Delta z_1 e^{\omega t} + b_2\Delta z_2 e^{\omega t}, \end{aligned} \tag{12}$$

или

$$\begin{aligned} \omega\Delta z_1 &= a_1\Delta z_1 + a_2\Delta z_2; \\ \omega\Delta z_2 &= b_1\Delta z_1 + b_2\Delta z_2 \ . \end{aligned} \tag{13}$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} (a_1-\omega)\Delta z_1 + a_2\Delta z_2 &= 0; \\ b_1\Delta z_1 + (b_2-\omega)\Delta z_2 &= 0 \ . \end{aligned} \tag{14}$$

Условие существования нетривиального решения системы (14) приводит к следующему характеристическому уравнению:

$$\begin{vmatrix} (a_1-\omega) & a_2 \\ b_1 & (b_2-\omega) \end{vmatrix} = 0, \tag{15}$$

или

$$\omega^2 - (a_1+b_2)\omega + a_1b_2 - a_2b_1 = 0. \tag{16}$$

Уравнение (15) теперь можно представить следующим образом:

$$\omega^2 - \mu\omega + L = 0, \tag{17}$$

где $\mu = a_1 + b_2 = \mathrm{SpL}, \quad L = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$.

Для анализа характера траекторий системы на фазовой плоскости запишем решение уравнений (7) в общем виде. Имеем:

$$\begin{aligned} \Delta u &= a_1 e^{\omega_1 t} + a_2 e^{\omega_2 t} \\ \Delta v &= b_1 e^{\omega_1 t} + b_2 e^{\omega_2 t}, \end{aligned} \tag{18}$$

где ω_1, ω_2 – корни характеристического уравнения (17).

Применим к правой части (18) линейное преобразование координат:

$$\begin{aligned} \Delta\xi &= \alpha\Delta u + \beta\Delta v; \\ \Delta\eta &= \gamma\Delta u + \delta\Delta v \ . \end{aligned} \tag{19}$$

С учетом этого систему уравнений (7) приведем к каноническому виду:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\xi}{dt} &= \omega_1\xi; \\ \frac{d\Delta\eta}{dt} &= \omega_1\eta \ . \end{aligned} \tag{20}$$

Разделив одно уравнение (20) на другое, получим:

$$\frac{d\Delta\eta}{d\Delta\xi} = \frac{\omega_2}{\omega_1}\cdot\frac{\eta}{\xi}. \tag{21}$$

После интегрирования (21) можем записать:

$$\Delta\eta = c_0\left|\Delta\xi\right|^{b_0}, \tag{22}$$

где $b_0 = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$, а c_0 – постоянная интегрирования.

Теперь не сложно проанализировать устойчивость (неустойчивость) динамической системы в координатах $\Delta\eta - \Delta\xi$.

Пусть ω_2 – больший корень характеристического уравнения. Если ω_2, ω_1 одного знака, то получаем интегральные кривые параболического типа. Легко при этом выяснить направление движений на фазовой плоскости. Если, например, ω_1 и ω_2 отрицательные, то, как следует из (20), ξ и η убывают с течением времени, т.е. изображающая точка приближается к началу координат. Иными словами, имеет устойчивую особую точку, называемую "узлом".

Если же $\omega_1 > 0, \omega_2 > 0$, то $\Delta\xi$ и $\Delta\eta$ растут с течением времени и изображающая точка удаляется от начала координат – "неустойчивый" узел.

Если ω_1, ω_2 – действительные числа разных знаков, то

$$\frac{d\Delta\eta}{d\Delta\xi} = -b_0\frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} \Rightarrow \Delta\eta = c_0\left|\Delta\xi\right|^{-b_0}. \tag{23}$$

Здесь имеем семейство кривых гиперболического типа, а оси координат оказываются асимптотами. Такая особая точка называется "седлом".

При $\omega_1 > 0, \omega_2 < 0$ изображающая точка, помещенная на оси $\Delta\xi$, будет удаляться от начала координат, а помещенная на оси $\Delta\eta$ – неограниченно приближаться к началу координат. "Седло" всегда устойчиво.

Обратимся вновь к характеристическому уравнению. Для его корней имеем:

$$\omega_{1,2} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4L}}{2}. \qquad (24)$$

Очевидно, что условием устойчивости будет наличие отрицательной действительной части у корней уравнения (14). Необходимое и достаточное условие этого

$$\mu < 0; \quad L > 0. \qquad (25)$$

Может быть, что

$$\mu^2 - 4L < 0. \qquad (26)$$

Тогда появляются особые точки типа "фокус" – ω_1, ω_2 – комплексные величины; или "центр" – ω_1, ω_2 – численные величины.

Естественно, бифуркационная кривая в плоскости $\mu - L$ описана соотношением:

$$\frac{\mu^2}{4} = \Delta. \qquad (27)$$

Теперь при известных компонентах приращений перемещений и их скоростей необходимо установить значения коэффициентов a_1, a_2, b_1, b_2 и по ним – ω_1, ω_2. Дальнейший анализ не должен вызывать затруднений.

Таким образом, задача динамики массивного тела свелась к пофрагментарному исследованию системы уравнений (7), в которой коэффициенты a_1, a_2, b_1, b_2 подбираются из экспериментальных данных по приращениям перемещений и их скоростям.

Литература

1. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1949. – 550 с.
2. *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 384 с.
3. *Стрелков С.П.* Введение в теорию колебаний. – М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1950. – 344 с.
4. *Матвеев Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1963. – 546 с.
5. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
6. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. – М.: Гл. изд. физ.-мат. лит., 1959. – 915 с.
7. *Палис Ж., Ди Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем. – М.: Мир, 1986. – 301 с.
8. *Йосс Ж., Джозеф Д.* Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. – М.: Мир, 1983. – 300 с.
9. *Себехей В.Дж.* Неустойчивости в динамических системах. – М.: Мир, 1982. – 167 с.
10. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1984. – 271 с.
11. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. – М.: Мир, 1988. – 694 с.