УДК 517.928

Каримов Салы
д.ф.-м.н., профессор
Ошский государственный университет

ОЦЕНКА ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ПРОСТОЙ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ

THE SOLUTION OF SINGLE SIMPLE INITIAL PROBLEM OF A SINGULAR PERTURBED SYSTEMS IN EVALUATION OF THE FIRST APPROXIMATION

Аннотация: *В данной работе построены первые приближения решения сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений в особо критическом случае.*

Abstract: *In this paper first approximations are constructed for solwing singulary perturbed system of differential equetions in a special critical case.*

Ключевые слова: *матрица, уравнения, аналитическая функция, криволинейный четырехугольник, сингулярно возмущенные системы.*

Key words: *matrix, equations, analytic function, curved quadrilateral, singularly perturbed systems.*

Рассмотрим задачу

$$\varepsilon z' = A(t)z + \mathrm{h}(t), \qquad \textbf{(1)}$$

$$z_0(t_0,\varepsilon) = z_0(\varepsilon), \qquad \textbf{(2)}$$

где $A(t)=\begin{pmatrix} \sin t & a\cos t \\ -a\cos t & \sin t \end{pmatrix}$, $0<a, a\neq 1$; $h(t)$ – заданная аналитическая функция; $0<\varepsilon\le\varepsilon_0 - const$. Матрица $A(t)$ имеет собственные значения:

$\lambda_1(t)=\sin t + ia\cos t; \lambda_2(t)=\sin t - ia\cos t.$

Любая матрица $\tilde{A}(t)$, подобная к матрице $A(t)$, имеет собственные значения $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$. Имеет место равенство $K^{-1}A(t)K = D(t)$, где $D(t)=diag(\lambda_1(t),\lambda_2(t))$,

$K=\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, $K^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$. Преобразующая матрица K, в общем случае, зависит от t: $K(t)=\begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ ia(t) & -ib(t) \end{pmatrix}$, $K^{-1}(t)=\frac{1}{-2ia(t)b(t)}\begin{pmatrix} -ib(t) & -b(t) \\ -ia(t) & a(t) \end{pmatrix}$, где $a(t), b(t)$ – любые аналитические функции, причем $a(t)\neq 0, b(t)\neq 0$. Невозмущенная система

$$A(t)\tilde{z} + h(t) = 0$$

имеет решение $\tilde{z}(t) = -A^{-1}(t)h(t)\equiv g(t)$, причем $g(t)$ имеет особенности в точках, где $\lambda_1(t)=0$, или $\lambda_2(t)=0$ $\left(A^{-1}(t)=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \sin t & -a\cos t \\ a\cos t & \sin t \end{pmatrix}, \Delta=\sin^2 t + a^2\cos^2 t\right)$. Если решение $z(t,\varepsilon)$ задача (1), (2) изучается на отрезке $[-\pi,\pi]$, то $-\pi\le t_0<0$. Пусть $z=g(t)+y$, где y – новая неизвестная функция. Тогда задача (1), (2) эквивалентна к задаче

$$\varepsilon y' = A(t)y - \varepsilon g'(t), \qquad (1_a)$$

$$y(t_0,\varepsilon) = z(t_0,\varepsilon) - g(t_0) = y_0(\varepsilon) \qquad (2_a)$$

Не нарушая общности, всегда можно предпологать, что $y_0(\varepsilon)=O(\varepsilon)$. Пусть теперь $y=K(t)x$, где x – новая неизвестная функция. Тогда задача (1_a), (2_a) переходит к задаче:

$$\varepsilon x' = D(t)x + \varepsilon[f(t) + B(t)x], \qquad (\mathrm{I})$$

$$x(t_0,\varepsilon)=K^{-1}(t_0),\ y_0(\varepsilon)=x_0(\varepsilon)=O(\varepsilon),$$

(II)

где $f(t)=-K^{-1}(t)g'(t);\quad B(t)=-K^{-1}(t)K'(t).$

Задача (I),(II) равносильна к задаче:

$$x(t,\varepsilon)=E(t_0,t_0,\varepsilon)x_0(\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)[f(\tau)+B(\tau)x(\tau,\varepsilon)]d\tau,$$

(3)

где $E(t,\tau,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}D(s)ds\right)$. Если преобразующая матрица $K=const,$ то $B(t)\equiv 0.$

Сначала мы будем рассматривать этот простой случай. Тогда (3) имеет вид:

$$x(t,\varepsilon)=E(t,t_0,\varepsilon)x_0(\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)f(\tau)d\tau$$

(4)

Пусть $x_0(\varepsilon)=colon\left(x_1^{(0)}(\varepsilon),x_2^{(0)}(\varepsilon)\right);\quad f(t)=colon(f_1(t),f_2(t));$ $E_k(t,\tau,\varepsilon)=\exp\left(\int_{\tau}^{t}\lambda_k(s)ds\right)\ (k=1,2).$ $x(t,\varepsilon)=colon(x_1(t,\varepsilon),x_2(t,\varepsilon)).$ Тогда из (4) получим:

$$x_k(t,\varepsilon)=E_k(t,t_0,\varepsilon)x_k^{(0)}(\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E_k(t,\tau,\varepsilon)f_k(\tau)d\tau\quad (k=1,2).$$

(4к)

Если $\mathrm{Re}\int_{t_0}^{t}\lambda_k(s)ds\le 0\ (k=1,2),$ то $E_k(t,t_0,\varepsilon)x_k^{(0)}(\varepsilon)=O(\varepsilon)\ (k=1,2).$ Поэтому области изменения t будем определить следующим образом:

$H_0=\left\{(t_1,t_2):\mathrm{Re}\int_{t_0}^{t}\lambda_k(s)ds\le 0,(k=1,2)\right\}.$ Особый случай $a=1$ рассмотрена в работе [1]

Пусть $0<a<1$ и $tg\varphi=ia.$ Тогда $\lambda_1(t)=\sqrt{1-a^2}\sin(t+i\alpha),\ \lambda_2(t)=\sqrt{1-a^2}\sin(t-i\alpha),$ где $\alpha=\frac{1}{2}\ln\frac{1+a}{1-a}.$ Таким образом, если $t=\pi k-i\alpha,$ то $\lambda_1(t)=0;$ если $t=\pi k+i\alpha,$ то $\lambda_2(t)=0$ $(k=0,\pm1,\ldots).$ Пусть $t=t_1+it_2,$ где t_1,t_2- действительные переменные. Далее получим

$\int_{t_0}^{t}\lambda_1(s)ds=-\cos t_1[cht_2+asht_2]+i\sin t_1[sht_2+acht_2]+\cos t_0-ia\sin t_0.$ Очевидно, что $cht_2+asht_2>0$ для любого $t_2.$ Поэтому для того, чтобы $\mathrm{Re}\int_{t_0}^{t}\lambda_1(s)ds\le 0$ необходимо $\cos t_1\ge 0.$

Пусть $t_1\in[-\pi,\pi].$ Тогда $\cos t_1\ge 0$ при $-\frac{\pi}{2}\le t_1\le\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}\le t_0<0.$ Если $t_0=-\frac{\pi}{2},$ то $\mathrm{Re}\int_{t_0}^{t}\lambda_1(s)ds=-\cos t_1[cht_2+asht_2]\le 0$ при

$(t_1,t_2)\in H_0=\left\{(t_1,t_2):-\dfrac{\pi}{2}\le t_1\le\dfrac{\pi}{2};-\infty<t_2<+\infty\right\}$. Рассмотрим неравенства

$\operatorname{Re}\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_k(s)ds=-\cos t_1\left[cht_2\pm asht_2\right]+\cos t_0\le 0$ или

$$(1\pm a)e^{2t_2}-2\frac{\cos t_0}{\cos t_1}e^{t_2}+(1\mp a)\ge 0$$

(5)

Если $\cos t_1>\dfrac{\cos t_0}{\sqrt{1-a^2}}$ $\left(0\le\cos t_0<\sqrt{1-a^2}\right)$, то неравенства (5) имеет место для $(t_1,t_2)\in H_0=\{(t_1,t_2):-t_0\le t_1\le t_0;-\infty<t_2<+\infty\}$.

Если $\cos t_1\le\dfrac{\cos t_0}{\sqrt{1-a^2}}$ $\left(\cos t_0\ge\sqrt{1-a^2}\right)$, то неравенства (5) имеет место для $(t_1,t_2)\in H_0=[ABCD]-$ криволинейный четырехугольник с вершинами в точках.

$A(-t_0,0);B(0,\tilde{\alpha});C(t_0,0);D(0,-\tilde{\alpha})$, где $\tilde{\alpha}=-\ln(1-a)+\ln\left(\cos t_0+\sqrt{\cos^2 t_0-(1-a^2)}\right)$.

Уравнение кривой $\overset{\cup}{AB}$:

$$t_2=-\ln(1-a)+\ln\left[\frac{\cos t_0}{\cos t_1}+\sqrt{\frac{\cos^2 t_0}{\cos^2 t_1}-(1-a^2)}\right];\ -t_0\le t_1\le 0;$$

Уравнение кривой $\overset{\cup}{BC}$:

$$t_2=-\ln(1-a)+\ln\left[\frac{\cos t_0}{\cos t_1}-\sqrt{\frac{\cos^2 t_0}{\cos^2 t_1}-(1-a^2)}\right];\ 0\le t_1\le t_0;$$

Уравнение кривой $\overset{\cup}{AD}$:

$$t_2=-\ln(1+a)+\ln\left[\frac{\cos t_0}{\cos t_1}-\sqrt{\frac{\cos^2 t_0}{\cos^2 t_1}-(1-a^2)}\right];\ -t_0\le t_1\le 0;$$

Уравнение кривой $\overset{\cup}{DC}$:

$$t_2=-\ln(1+a)+\ln\left[\frac{\cos t_0}{\cos t_1}+\sqrt{\frac{\cos^2 t_0}{\cos^2 t_1}-(1-a^2)}\right];\ 0\le t_1\le t_0.$$

Если $\cos t_0=\sqrt{1-a^2}$, то $\tilde{\alpha}=\alpha=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+a}{1-a}$.

Уравнение кривой AB: $t_2=\alpha+\ln tg\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{t_1}{2}\right);-t_0\le t_1\le 0;$

Уравнение кривой $\overset{\cup}{BC}$: $t_2=\alpha+\ln tg\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{t_1}{2}\right);0\le t_1\le t_0;$

Уравнение кривой $\overset{\cup}{AD}$: $t_2=-\alpha+\ln tg\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{t_1}{2}\right);-t_0\le t_1\le 0;$

Уравнение кривой $\overset{\cup}{DC}$: $t_2=-\alpha+\ln tg\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{t_1}{2}\right);0\le t_1\le t_0.$

Пусть теперь $a>1$. Тогда $\lambda_1(t)=\sqrt{1-a^2}\sin\left(t+\pi k-\frac{\pi}{2}+i\alpha\right)$;

$\lambda_2(t)=\sqrt{1-a^2}\sin\left(t+\pi k-\frac{\pi}{2}-i\alpha\right)$, где $\alpha=\frac{1}{2}\ln\frac{a+1}{a-1}, k=0,\pm1,\ldots$. Таким образом, если $t=\pi k-\frac{\pi}{2}-i\alpha$, то $\lambda_1(t)=0$; если $t=\pi k-\frac{\pi}{2}+i\alpha$, то $\lambda_1(t)=0$ $(k=0,\pm1,\ldots;a>1)$.

Пусть $t_1\in[-\pi,\pi]$. Тогда $\cos t_1\geq 0$ при $-\frac{\pi}{2}\leq t_1\leq\frac{\pi}{2}$ и $t_0=-\frac{\pi}{2}$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leq t_0<0\right)$.

$$H_0=\left\{(t_1,t_2):\operatorname{Re}\int_{t_0}^{t}\lambda_k(s)ds\leq 0(k=1,2)\right\}=[ABCD],\text{ где}$$

$A\left(-\frac{\pi}{2},-\alpha\right), B\left(-\frac{\pi}{2},\pi\right), C\left(\frac{\pi}{2};\alpha\right), D\left(\frac{\pi}{2},-\alpha\right)$, $\alpha=\frac{1}{2}\ln\frac{a+1}{a-1}$. При этом $cht_2+asht_2\geq 0$ при $t_2\geq\frac{1}{2}\ln\frac{a-1}{a+1}$; $cht_2-asht_2\geq 0$ при $t_2\leq\frac{1}{2}\ln\frac{a+1}{a-1}$.

В данной работе собственные значения матрицы $A(t)$ простые, причем главный член разложение в ряд имеет первой степени. Поэтому оценка первого приближения будет такой же как в работе $[3]$: на отрезке $[-t_0,t_0-\delta]$ имеет оценка $O(\varepsilon)$; на отрезке $[t_0-\delta,t_0]$ имеет оценка $O(\sqrt{\varepsilon})$.

Здесь $0<\delta=const$, причем $\delta<<1$, или $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ и $\delta(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Пусть $0<a<1$ и $(t_1,t_2)\in H_0=[ABCD]$, Тогда из ($4_к$) будем иметь $E_k(t,t_0,\varepsilon)x_k^{(0)}(\varepsilon)=O(\varepsilon)$ $(k=1,2)$.

Теперь остается оценить величину

$$J_k(t,\varepsilon)=\int_{t_0}^{t}E_k(t,\tau,\varepsilon)f_k(\tau)d\tau\quad(k=1,2)$$

(6)

Для $f_k(t)$ справедлива следующая оценка:

$$f_k(t)=O(1)\ \ (k=1,2).$$

(7)

$$f_k(t)=O\left((t-\alpha)^{-1}(t+\alpha)^{-1}\right)\ \ (k=1,2).$$

(8)

$$f_k(t)=O\left((t-\alpha)^{-2}(t+\alpha)^{-2}\right)\ \ (k=1,2).$$

(9)

Будем предпологать, что имеет место случай (7). Тогда из (6) будем иметь

$|J_k(t,\varepsilon)|=O(1)\left|\int_{l^*}|E_k(t,\tau,\varepsilon)|\cdot|d\tau|\right|$, где $l^*=l$ при $k=1; l^*=\tilde{l}$ при $k=2$; $l,\tilde{l}$ – взаимно-симметрично относительно действительной оси, l – путь интегрирование, соединяющий точки $(-t_0,0)$ с точкой (t_1,t_2). Здесь $l\subset H_0$ или частично принадлежит на множества H_0. Этот случай существенной роли не играет. В работе $[4]$ рассмотрены обе случаи и получается одни и те же результаты.

Мы будем рассмотривать, как в работе $[3]$, наиболее простой случай $l=l_1\cup l_2\cup l_3$, где $l_1=p[AA_1]$ - отрезок прямой, соединяющий точки $A,A_1;l_2=p[A_1T_1];l_3=p[T_1T],A=A(-t_0,0);A_1=A_1(-t_0,-\alpha);T_1=T_1(t_1,-\alpha);T(t_1,t_2)$. Так как l и $\tilde{l}$ взаимно-симметрично, то достаточно оценить величины $J_1(t,\varepsilon)$. Пусть $\tau=\tau_1+i\tau_2,\ \tau_1,\tau_2$ – действительные переменные;

$$R(t,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{t}\lambda_1(s)ds\right)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left[-\cos t_1(cht_2+asht_2)+\cos t_0\right]\right).$$

Тогда $\left|J_1(t,\varepsilon)\right|=O(\varepsilon)R(t,\varepsilon)\left|\int_l \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{\tau}\lambda_1(s)d\tau\right)\cdot|d\tau|\right|$, где $l=l_1\cup l_2\cup l_3$.

Здесь $\operatorname{Re}\int_{t_0}^{\tau}\lambda_1(s)ds=-\cos\tau_1[ch\tau_2+ash\tau_2]+\cos t_0$. Теперь будем оценивать следующие интегралы $J_1^{(1)}(\varepsilon)=\left|\int_{l_1}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{\tau}\lambda_1(s)d\tau\right)\cdot|d\tau|\right|$;

$J_1^{(2)}(\varepsilon)=\left|\int_{l_2}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{\tau}\lambda_1(s)d\tau\right)\cdot|d\tau|\right|$;

$J_1^{(3)}(t,\varepsilon)=R(t,\varepsilon)\left|\int_{l_3}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{\tau}\lambda_1(s)d\tau\right)\cdot|d\tau|\right|$. Так как $l_1:\tau_1=-t_0; 0\ge\tau_2\ge-\alpha$, то

$J_1^{(1)}(\varepsilon)=\int_{-\alpha}^{0}\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\cos t_0(ch\tau_2+ash\tau_2-1)\right]d\tau_2$;

Пусть $\varphi(x)=chx+ashx-1$. Тогда $\varphi'(x)=shx+achx$; $\varphi''(x)=chx+ashx>0$ при любом x и $\varphi'(-\alpha)=0\le\varphi'(x)\le a=\varphi'(0)$, следовательно $\varphi(x)$ возрастает на отрезке $[-\alpha,0]$. Так как $\varphi(0)=0$, то отрезок $[-\alpha,0]$ будем делить на две части: $[-\alpha,0]=[-\alpha,-\delta]\cup[-\delta,0]$, где $\delta-const$, причем $0<\delta<\alpha$. Пусть $\varphi(-\delta)=-b, b>0$. Тогда

$$\int_{-\alpha}^{-\delta}\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\cos t_0(ch\tau_2+ash\tau_2-1)\right]d\tau_2\le\int_{-\alpha}^{-\delta}\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\cos t_0\cdot b\right]d\tau_2=\exp\left(-\frac{b}{\varepsilon}\cos t_0\right)(\alpha-\delta)=O(\varepsilon).$$

$$\int_{-\delta}^{0}\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\cos t_0(ch\tau_2+ash\tau_2-1)\right]d\tau_2=\frac{\varepsilon}{\cos t_0}\int_{-\delta}^{0}(sh\tau_2+ach\tau_2)^{-1}d\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\cos t_0(ch\tau_2+ash\tau_2-1)\right]=$$

$$=\frac{\varepsilon}{\cos t_0}\left[\frac{1}{a}-(-sh\delta+ach\delta)^{-1}\cdot\exp\left(-\frac{b}{\varepsilon}\cos t_0\right)\right]+\frac{\varepsilon}{\cos t_0}\int_{-\delta}^{0}(ch\tau_2+ash\tau_2)(sh\tau_2+ach\tau_2)^{-2}\times$$

$$\times\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\cos t_0(ch\tau_2+ash\tau_2-1)\right]d\tau_2=O(\varepsilon).$$

Таким образом, получена оценка $J_1^{(1)}(\varepsilon)=O(\varepsilon)$. Для $l_2:\tau_2=-\alpha; -t_0\le\tau_1\le t_1$. Поэтому $J_1^{(2)}(\varepsilon)=\int_{t_0}^{t_1}\exp\frac{1}{\varepsilon}[\cos\tau_1(ch\alpha-ash\alpha)-\cos t_0]d\tau$. Имеет место равенство $ch\alpha-ash\alpha=\cos t_0=\sqrt{1-a^2}$.

Следовательно $J_1^{(2)}(\varepsilon)=\int_{-t_0}^{t_1}\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\cos t_0(\cos\tau_1-1)\right]d\tau_1$. Так как

$$-\frac{\tau_1^2}{2} \le \cos\tau_1 - 1 \le -\frac{\tau_1^2}{2}\left(1-\frac{\tau_1^2}{12}\right), \text{то}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \exp\left(-\frac{\tau_1^2 \cos t_0}{2\varepsilon}\right) \le J_1^{(2)}(\varepsilon) \le \int_{-t_0}^{t_1} \exp\left[-\frac{\cos t_0 \cdot \tau_1^2\left(1-\frac{\tau_1^2}{12}\right)}{2\varepsilon}\right] d\tau_1 .$$

Пусть $a_0 = \frac{\cos t_0}{2\varepsilon} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{2\varepsilon} = \frac{\alpha_0^2}{\varepsilon}, \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-a^2\right)^{\frac{1}{4}};$

$$b_0 = \frac{\cos t_0}{2\varepsilon}\left(1-\frac{t_0^2}{12}\right) = \frac{1}{2\varepsilon}\left(1-a^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{t_0^2}{12}\right) = \frac{\beta_0^2}{\varepsilon},$$

$\beta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-a^2\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(1-\frac{t_0^2}{12}\right)^{\frac{1}{2}}$. Тогда $\int_{-t_0}^{t_1} \exp\left(-a_0\tau_1^2\right) d\tau_1 \le J_1^{(2)}(\varepsilon) \le \int_{-t_0}^{t_1} \exp\left(-b_0\tau_1^2\right) d\tau_1;$

$$\int_{-t_0}^{t_1} \exp\left(-a_0\tau_1^2\right) d\tau_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\alpha_0}\int_{-\frac{\alpha_0}{\sqrt{\varepsilon}}t_0}^{\frac{\alpha_0}{\sqrt{\varepsilon}}t_1} \exp\left(-x^2\right) dx = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right);$$

$$\int_{-t_0}^{t_1} \exp\left(-b_0\tau_1^2\right) d\tau_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\beta_0}\int_{-\sqrt{b_0}t_0}^{\sqrt{b_0}t_1} \exp\left(-x^2\right) dx = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right);$$

$J_1^{(2)}(\varepsilon) = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$. Для $l_3 : \tau_1 = t_1; -\alpha \le \tau_2 \le t_2; \left|d\tau\right| = d\tau_2$. Следовательно

$$J_1^{(3)}(t,\varepsilon) = R(t,\varepsilon)\left|\int_{l_3} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{\tau}\lambda_1(s)ds\right)\cdot\left|d\tau_2\right|\right| = \int_{-\alpha}^{t_2} \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\cos t_1\left(cht_2 + asht_2 - ch\tau_2 - ash\tau_2\right)\right] d\tau_2 =$$

$$= \int_{-\alpha}^{t_2} \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\cos t_1\left(sh\xi + ach\xi\right)\left(t_2 - \tau_2\right)\right] d\tau_2, \text{где } \tau_2 < \xi < t_2.$$

Пусть $y = \psi(x) \equiv shx + achx; y' = \psi'(x) = chx + ashx > 0$ при любом x; следовательно $\psi(x)$ – возрастающая функция на любом отрезке, причем $\psi(-\alpha) = 0$.

$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1 - a^2}\right) - \ln(1+a); x'_y = \frac{1}{\sqrt{y^2+1-a^2}}$. $\psi(-\alpha) = 0; \psi(\alpha) = \frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}$. Таким образом, $y = \psi(x) \equiv shx + achx; x = \varphi(y) \equiv \ln\left(y + \sqrt{y^2+1-a^2}\right) - \ln(1+a)$ взаимно-обратные однозначные функции, причем обе строго возрастающая функция. Если $x \in [-\alpha, \alpha]$, то $y \in \left[0, \frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}\right]$ и наоборот. Пусть $0 < \delta << 1$. Тогда если $y = \delta$, то

$$x = \ln\left(\delta + \sqrt{\delta^2 + 1 - a^2}\right) - \ln(1+a) = -\alpha + \gamma = -\alpha + \ln\left(\frac{\delta}{\sqrt{1-a^2}} + \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\sqrt{1-a^2}}\right)^2}\right) =$$

$$= -\alpha + \ln\left(\frac{\delta\delta_1}{\sqrt{1-a^2}} + 1\right),$$

$\delta_1 = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{1}{8}\left(\frac{\delta}{\sqrt{1-a^2}}\right)^3 + \ldots$ - знакочередующий сходящий ряд.

$$\gamma=\ln\left(1+\frac{\delta_1\cdot\delta}{\sqrt{1-a^2}}\right)=\frac{\delta\cdot\delta_1}{\sqrt{1-a^2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta\cdot\delta_1}{\sqrt{1-a^2}}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{\delta\cdot\delta_1}{\sqrt{1-a^2}}\right)^3-\ldots.$$

Пусть $\delta_2=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta\delta_1}{\sqrt{1-a^2}}+\frac{1}{3}\left(\frac{\delta\cdot\delta_1}{\sqrt{1-a^2}}\right)^2+\ldots$. Тогда $\gamma=\frac{\delta\cdot\delta_1\delta_2}{\sqrt{1-a^2}}=\delta\cdot\tilde{\alpha}_0$, где $\tilde{\alpha}_0=\frac{\delta_1\delta_2}{\sqrt{1-a^2}}$.

Таким образом, $\gamma=\tilde{\alpha}_0\delta;\ \delta=\tilde{\beta}_0\gamma;\ \tilde{\beta}_0=\frac{1}{\tilde{\alpha}}$, $0<\tilde{\alpha}_0, 0<\tilde{\beta}_0$ - ограниченные величины.

Пусть $t_2\geq-\alpha+\varepsilon^p, 0<p\leq\frac{1}{2}, p=const;\ 0<\gamma_0<1, \gamma_0=const$. Тогда

$$R_0(t,\varepsilon)=\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\cos t_1\left(cht_2+asht_2\right)-ch\left(-\alpha+\gamma_0\varepsilon^p\right)-ash\left(-\alpha+\gamma_0\varepsilon^p\right)\right]=$$

$$=\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\cos t_1\left(sh\xi+ach\xi\right)\left(t_2+\alpha-\gamma_0\varepsilon^p\right)\right];$$ где $-\alpha+\gamma_0\varepsilon^p<\xi<t_2$. Так как $sh\xi+ach\xi>\tilde{\beta}_0\gamma_0\varepsilon^p; t_2+a-\gamma_0\varepsilon^p\geq\left(1-\gamma_0\right)\varepsilon^p$, то

$$R_0(t,\varepsilon)\leq\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\cos t_1\cdot\tilde{\beta}_0\gamma_0\varepsilon^p\cdot\left(1-\gamma_0\right)\varepsilon^p\right]=$$

$$=\exp\left[-\varepsilon^{2p-1}\cos t_1\cdot\tilde{\beta}_0\gamma_0\left(1-\gamma_0\right)\right]=O(\varepsilon).$$ Анологично, если $t_2\geq-\alpha+\delta, 0<\delta<<1, \delta=const$, то

$$R_1(t,\varepsilon)=\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\cos t_1\left(cht_2+asht_2\right)-ch\left(-\alpha+\gamma_0\delta\right)-ash\left(-\alpha+\gamma_0\delta\right)\right]=O(\varepsilon).$$ Пусть $-\alpha\leq t_2\leq-\alpha+\varepsilon^\gamma, 0<\gamma=const; \tau=t_1+i\tau_2$. Тогда

$$J_1^{(3)}(t,\varepsilon)=\int_{-\alpha}^{t_2}\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_\tau^t\lambda_1(s)ds\right]d\tau_2\leq\left(t_2+\alpha\right)=O\left(\varepsilon^\gamma\right);$$

Если $t_2\geq-\alpha+\varepsilon^\gamma$, то

$$J_1^{(3)}(t,\varepsilon)=\int_{-\alpha}^{-\alpha+\varepsilon^\gamma}\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_\tau^{t_2}\lambda_1(s)ds\right]+\int_{-\alpha+\varepsilon^\gamma}^{t_2}\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_\tau^t\lambda_1(s)ds\right]=O\left(\varepsilon^\gamma\right)+O\left(\varepsilon^{1-\gamma}\right)=O\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$$ и $\gamma=\frac{1}{2};\tau=t_1+i\tau_2$.

Если $t_2\geq-\alpha+\varepsilon^p, 0<p\leq\frac{1}{2}, p=const; 0<\gamma_0<1, \gamma_0=const;\ \tau=t_1+i\tau_2$, то

$$J_1^{(3)}(t,\varepsilon)=\int_{-\alpha}^{-\alpha+\gamma_0\varepsilon^p}\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_\tau^{t_2}\lambda_1(s)ds\right]d\tau_2+\int_{-\alpha+\gamma_0\varepsilon^p}^{t_2}\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\cos t_1\operatorname{Re}\int_\tau^t\lambda_1(s)ds\right]d\tau_2=R_0(t,\varepsilon)O\left(\varepsilon^p\right)+O\left(\varepsilon^{1-p}\right)=O\left(\varepsilon^{1-p}\right.$$

Если $t_2\geq-\alpha+\delta, 0<\delta<<1, \delta=const; 0<\gamma_0<1, \gamma_0=cons; \tau=t_1+i\tau_2$, то $J_1^{(3)}(t,\varepsilon)=O(\varepsilon)$. Окончательно получена оценка: $J_1^{(3)}(t,\varepsilon)=O\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$ при $-\alpha\leq t_2\leq-\alpha+\varepsilon^p, 0<p\leq\frac{1}{2}$;

$J_1^{(3)}(t,\varepsilon)=O\left(\varepsilon^{1-p}\right)$ при $-\alpha+\varepsilon^p\leq t_2\leq-\alpha+\delta$; $J_1^{(3)}(t,\varepsilon)=O(\varepsilon)$ при $-\alpha+\delta\leq t_2\leq\alpha$;

Получена следующая оценка $\left|J_1(t,\varepsilon)\right|=O(1)\left[R(t,\varepsilon)J_1^{(1)}(\varepsilon)+R(t,\varepsilon)J_1^{(2)}(\varepsilon)+J_1^{(3)}(t,\varepsilon)\right]$.

Если $\operatorname{Re}\int_{t_0}^t\lambda_1(s)ds\leq\varepsilon\ln\varepsilon$, то $R(t,\varepsilon)=O(\varepsilon)$. Поэтому $\left|J_1(t,\varepsilon)\right|=O(1)J_1^{(3)}(t,\varepsilon)$.

Справедлива следующая:

Теорема1. Пусть: 1) $h(t)$– аналитическая функция такая, что $\left(A^{-1}(t)h(t)\right)' = O(1)$ при $(t_1,t_2)\in\{-t_0\le t_1\le t_0; -\alpha\le t_2\le\alpha\}$; 2) $0<p\le\frac{1}{2}; 0<\delta<<1; \quad p,\delta - const.$

Тогда для решения задачи (4₁) на H_0 справедливо оценки: $x_1(t,\varepsilon)=O\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$ при $-\alpha\le t_2\le-\alpha+\varepsilon^p$; $x_1(t,\varepsilon)=O\left(\varepsilon^{1-p}\right)$ при $-\alpha+\varepsilon^p\le t_2\le-\alpha+\delta$ и $\operatorname{Re}\int_{t_0}^{t}\lambda_1(s)ds\le\varepsilon\ln\varepsilon$; $x_1(t,\varepsilon)=O(\varepsilon)$ при $-\alpha+\delta\le t_2$ и $\operatorname{Re}\int_{t_0}^{t}\lambda_1(s)ds\le\varepsilon\ln\varepsilon$. Аналогичные оценки имеют места для $x_2(t,\varepsilon)$. Здесь $x=K^{-1}[z-g(t)]$, $x(t_0,\varepsilon)=K^{-1}[z_0(\varepsilon)-g(t_0)]=x_0(\varepsilon)=O(\varepsilon)$.

Пусть $a>1, 0<\delta<<1,\ a,\delta-const, t_0=-\frac{\pi}{2};\ (t_1,t_2)\in H_0=[ABCD]$, $A\left(-\frac{\pi}{2},-\alpha\right), B\left(-\frac{\pi}{2},\alpha\right), C\left(\frac{\pi}{2},\alpha\right), D\left(\frac{\pi}{2},-\alpha\right),\ \alpha=\frac{1}{2}\ln\frac{a+1}{a-1}(0<\delta<\alpha)$. Теперь тоже будем предполагать, что имеет место случай (7). Тогда из (6) получим $|J_1(t,\varepsilon)|=O(1)$ $\tilde{R}(t,\varepsilon)\left|\int_l\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{\tau}\lambda_1(s)ds\right]\cdot|d\tau|\right|$, где $\tilde{R}(t,\varepsilon)=\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\cos t_1(cht_2+asht_2)\right]=O(1)$;

$\operatorname{Re}\int_{t_0}^{\tau}\lambda_1(s)ds=-\cos\tau_1[ch\tau_2+ash\tau_2]$; $\tau=\tau_1+i\tau_2, \tau_1,\tau_2-$действительные переменные; l - путь интегрирования соединяющий точки $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$с точкой $(t_1,t_2)\in H_0$. Пусть $A_0\left(-\frac{\pi}{2},0\right); A_1\left(-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\varepsilon},0\right);\ A_2\left(-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\varepsilon},-\alpha\right);\ A_3\left(-\frac{\pi}{2},-\alpha-\sqrt{\varepsilon}\right); T_1\left(t_1,-\alpha-\sqrt{\varepsilon}\right);\ T_0(t_1,-\alpha)$; $T(t_1,t_2)$. $l_1=p[A_0A_1]$; $l_2=p[A_1A_2]$; $l_3=p[A_2A\ ]$; $l_4=p[A,A_3]$; $l_5=p[A_3,T_1]$; $l_6=p[T_1T_0]$; $l_7=p[T_0T]$. Имеет место следующие оценки:

1) Так как $l_1: -\frac{\pi}{2}\ge\tau_1\ge-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\varepsilon}, \tau_2=0,$ то

$$J_1^{(1)}(\varepsilon)=\left|\int_l\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{\tau}\lambda_1(s)ds\right]|d\tau|\right|=\int_{-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\varepsilon}}^{-\frac{\pi}{2}}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\cos\tau_1\right)d\tau_1=O(\varepsilon);$$

2)Так как $l_2:\tau_1=-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\varepsilon}, 0\ge\tau_2\ge-\alpha;\ \psi(t_2)=cht_2+asht_2-$возрастающая функция на любом отрезке, причем $\psi(-\alpha)=0, \psi(-\alpha+\delta)=b>0,$ то

$$J_1^{(2)}(\varepsilon)=\left|\int_{l_2}\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{\tau}\lambda_1(s)ds\right]\cdot|d\tau|\right|=$$

$$= \int_{-\alpha}^{0} \exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\cos\tau_1\left(ch\tau_2 + ash\tau_2\right)\right]d\tau_2 = \int_{-\alpha}^{-\alpha+\delta} \exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(-\sin\sqrt{\varepsilon}\right)\cdot\left(ch\tau_2 + ash\tau_2\right)\right]d\tau_2 +$$

$$+ \int_{-\alpha+\delta}^{0} \exp\left[-\frac{\sin\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon}\left(ch\tau_2 + ash\tau_2\right)\right]d\tau_2 \le -\frac{\varepsilon}{\sin\sqrt{\varepsilon}}\left(sh\tau_2 + ach\tau_2\right)^{-1}\exp\left[-\frac{\sin\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon}\left(ch\tau_2 + ash\tau_2\right)\right]\Bigg|_{-}^{-\alpha}$$

$$+ \exp\left[-\frac{\sin\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon}\cdot b\right](\alpha-\delta) = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right);$$

3)Так как $l_3 = p[A_2A]: -\dfrac{\pi}{2} - \sqrt{\varepsilon} \le \tau_1 \le -\dfrac{\pi}{2}, \tau_2 = -\alpha,$ то

$$J_1^{(3)}(\varepsilon) = \left|\int_{l_3} \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{\tau}\lambda_1(s)ds\right]|d\tau|\right| \le \int_{-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\varepsilon}}^{-\frac{\pi}{2}} d\tau_1 = \sqrt{\varepsilon} = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right).$$

4)Так как $l_4 = p[AA_3]: \tau_1 = -\dfrac{\pi}{2}, -\alpha \ge \tau_2 \ge -\alpha - \sqrt{\varepsilon},$ то

$$J_1^{(4)}(\varepsilon) = \left|\int_{l_4} \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{\tau}\lambda_1(s)ds\right]|d\tau|\right| \le \int_{-\alpha-\sqrt{\varepsilon}}^{-\alpha} d\tau_2 = \sqrt{\varepsilon} = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right).$$

5)Так как $l_5 = p[A_3T_1]: \tau_2 = -\alpha - \sqrt{\varepsilon}, -\dfrac{\pi}{2} \le \tau_1 \le t_1,$ то

$$J_1^{(5)}(\varepsilon) = \left|\int_{l_5} \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{\tau}\lambda_1(s)ds\right]|d\tau|\right| = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{t_1} \exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\cos\tau_1\left(ch\tau_2 + ash\tau_2\right)\right]d\tau_1 = ch\left(-\alpha-\sqrt{\varepsilon}\right) +$$

$$+ ash\left(-\alpha-\sqrt{\varepsilon}\right) = -\tilde{\beta}_0\sqrt{\varepsilon}, \tilde{\beta}_0 = \frac{1}{\tilde{\alpha}_0}, \tilde{\alpha}_0 = \frac{\delta_1\delta_2}{\sqrt{a^2-1}},$$

$$\delta_1 = 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{\beta_0\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{a^2-1}}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{\beta_0\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{a^2-1}}\right)^3 - \ldots;$$

$$\delta_2 = 1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{\beta_0\sqrt{\varepsilon}\cdot\delta_1}{\sqrt{a^2-1}}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{\beta_0\sqrt{\varepsilon}\cdot\delta_1}{\sqrt{a^2-1}}\right)^2 - \ldots;$$

$$J_1^{(5)}(\varepsilon) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{t_1} \exp\left(-\frac{\beta_0}{\sqrt{\varepsilon}}\cos\tau_1\right)d\tau_1 = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}+t_1} \exp\left(-\frac{\tilde{\beta}_0}{\sqrt{\varepsilon}}\sin s\right)ds = \int_{0}^{\delta} \exp\left[-\frac{\tilde{\beta}_0}{\sqrt{\varepsilon}}\sin s\right]ds + \int_{\delta}^{\pi-\delta} \exp\left[-\frac{\tilde{\beta}_0}{\sqrt{\varepsilon}}\sin s\right]ds +$$

$+ \displaystyle\int_{\pi-\delta}^{\frac{\pi}{2}+t_1} \exp\left[-\frac{\beta_0}{\sqrt{\varepsilon}}\sin s\right]ds:$ Здесь $\displaystyle\int_{\delta}^{\pi-\delta} \exp\left[-\frac{\beta_0}{\sqrt{\varepsilon}}\sin s\right]ds = O(\varepsilon);$ $\displaystyle\int_{0}^{\delta} \exp\left[-\frac{\beta_0}{\sqrt{\varepsilon}}\sin s\right]ds = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right);$

$\displaystyle\int_{\pi-\delta}^{\pi} \exp\left[-\frac{\beta_0}{\sqrt{\varepsilon}}\sin s\right]ds = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right).$ Таким образом, справедлива оценка

$$J_1^{(5)}(\varepsilon) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}+t_1} \exp\left[-\frac{\beta_0}{\sqrt{\varepsilon}}\sin s\right]ds = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right).$$

6)Так как $l_6 = p[T_1T_0]: \tau_1 = t_1, -\alpha-\sqrt{\varepsilon} \le \tau_2 \le -\alpha,$ то

$$J_1^{(6)}(\varepsilon) = \left| \int_{l_6} \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{\tau} \lambda_1(s)ds\right] |d\tau| \right| =$$

$$= \int_{-\alpha-\sqrt{\varepsilon}}^{-\alpha} \exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\cos t_1 (ch\tau_2 + ash\tau_2)\right] d\tau_2 \le \int_{-\alpha-\sqrt{\varepsilon}}^{-\alpha} d\tau_2 = \sqrt{\varepsilon} = O(\sqrt{\varepsilon}).$$

7)

$$J_1^{(7)}(t,\varepsilon) = \tilde{R}(t,\varepsilon)\left| \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{\tau} \lambda_1(s)ds\right] |d\tau| \right| = \int_{-\alpha}^{t_2} \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\cos t_1 (cht_2 + asht_2 - ch\tau_2 - ash\tau_2)\right] d\tau_2 =$$

$$= \int_{-\alpha}^{t_2} \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\cos t_1 (sh\xi + ach\xi)(t_2 - \tau_2)\right] d\tau_2 \text{ ,здесь } -\tau_2 < \xi < t_2.$$

Величина $\varphi(t_2) = sht_2 + acht_2 -$ возрастающая на $[-\alpha, t_2]$ и $\varphi(t_2) \ge \sqrt{a^2-1}.$ Поэтому

$$J_1^{(7)}(t,\varepsilon) \le \int_{-\alpha}^{t_2} \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\cos t_1 \sqrt{a^2-1}(t_2-\tau_2)\right] d\tau_2 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{a^2-1}\cdot\cos t_1}\left[1 - \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\cos t_1\sqrt{a^2-1}(t_2+\alpha)\right]\right] =$$

$= O\left(\dfrac{\varepsilon}{\cos t_1}\right)$ Имеет место равенство: $O\left(\dfrac{\varepsilon}{\cos t_1}\right) = O(\varepsilon)$ при $\cos t_1 \ge \delta$ и $t_1 \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right];$

$O\left(\dfrac{\varepsilon}{\cos t_1}\right) = O(\varepsilon^{1-p})$ при $\cos t_1 \ge \varepsilon^p$ и $t_1 \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ $\left(0 < p \le \dfrac{1}{2}\right).$ Имеет место следующая оценка: $J_1^{(7)}(t,\varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon})$ (7) при $\cos t_1 \le \sqrt{\varepsilon}$ и $t_1 \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right].$ Пусть $p = \dfrac{1}{2}; (t_1,t_2) \in H_0,$ причем $-\dfrac{\pi}{2} \le t_1 \le -\dfrac{\pi}{2} + \sqrt{\varepsilon}; -\alpha \le t_2 \le \alpha = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a+1}{a-1}.$ $\tilde{l} = l_1 \cup \tilde{l}_2 \cup \tilde{l}_3,$ где $\tilde{l}_2 = p\left[\left(-\dfrac{\pi}{2} - \sqrt{\varepsilon}, 0\right)\left(-\dfrac{\pi}{2} - \sqrt{\varepsilon}, t_2\right)\right];$ $\tilde{l}_3 = p\left[\left(-\dfrac{\pi}{2} - \sqrt{\varepsilon}, t_2\right)(t_1,t_2)\right].$ Тогда

$$J_1^{(7)}(t,\varepsilon) = \tilde{R}(t,\varepsilon)\left| \int_{\tilde{l}} \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\tau} \lambda_1(s)ds\right] |d\tau| \right| = O(\sqrt{\varepsilon})\tilde{R}(t,\varepsilon) +$$

$$+ \tilde{R}(t,\varepsilon)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{t_1} \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}(\cos t_1 - \cos\tau_2)(cht_2 + asht_2)\right] d\tau_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{t_1} \exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\sin\xi(t_1-\tau_1)(cht_2 + asht_2)\right] d\tau_1 +$$

$+ O(\sqrt{\varepsilon})\tilde{R}(t,\varepsilon).$ Здесь $\tau_1 < \xi < t_1; -1 \le \sin\xi \le -\sigma,\ 0 < \sigma - const.$ Таким образом, получим оценки: $\tilde{J}_1^{(7)}(t,\varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon})\tilde{R}(t,\varepsilon) + \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{t_1} \exp\left[-\frac{\sigma}{\varepsilon}(t_1-\tau_1)(cht_2 + asht_2)\right] d\tau_1 = O(\sqrt{\varepsilon})\tilde{R}(t,\varepsilon) +$

$$+ \frac{\varepsilon}{\sigma(cht_2 + asht_2)}\left[1 - \exp\left[-\frac{\sigma}{\varepsilon}\left(t_1 + \frac{\pi}{2}\right)(cht_2 + asht_2)\right]\right] = O(\sqrt{\varepsilon})\tilde{R}(t,\varepsilon) + O\left(\frac{\varepsilon}{cht_2 + asht_2}\right),$$

Здесь $O\left(\dfrac{\varepsilon}{cht_2 + asht_2}\right) = O(\varepsilon)$ при $cht_2 + asht_2 \ge \delta;$ $O\left(\dfrac{\varepsilon}{cht_2 + asht_2}\right) = O(\varepsilon^{1-p})$ при $\delta \ge cht_2 + asht_2 \ge \varepsilon^p;$ Пусть теперь $0 \le cht_2 + asht_2 \le \sqrt{\varepsilon}$ $\left(-\alpha \le t_2 \le -\alpha + \beta_0\sqrt{\varepsilon},\right)$ $\cos t_1 \le \sqrt{\varepsilon}$

и $t_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}+\sqrt{\varepsilon}\right]$. Тогда $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{t_1} \exp\left[-\frac{\sigma}{\varepsilon}(t_1-\tau_1)(cht_2+asht_2)\right]d\tau_1 = \left(t_1+\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\varepsilon} = O(\sqrt{\varepsilon})$.

Оценка (7) доказана для $t_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}+\sqrt{\varepsilon}\right]$ и $0 \le cht_2 + asht_2 \le \tilde{\beta}_0\sqrt{\varepsilon}$, $0 < \tilde{\beta}_0 - const.$

Если $-\frac{\pi}{2} \le t_1 \le -\frac{\pi}{2} - \sqrt{\varepsilon}$, $cht_2 + asht_2 \ge \delta$, то $\tilde{J}_1^{(7)}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon)$. Если $-\frac{\pi}{2} \le t_1 \le -\frac{\pi}{2} - \sqrt{\varepsilon}$, $cht_2 + asht_2 \ge \varepsilon^p$ $\left(0 < p \le \frac{1}{2}\right)$, то $\tilde{J}_1^{(7)}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{1-p})$. Пусть теперь $\cos t_1 \le \sqrt{\varepsilon}$ при $\frac{\pi}{2} - \tilde{\alpha}_0\sqrt{\varepsilon} \le t_1 \le \frac{\pi}{2}$, $0 < \tilde{\alpha}_0 - const$; $\tilde{\ell} = \ell_1 \cup \ell_2 \cup \ell_3 \cup \ell_4 \cup \tilde{\ell}_5 \cup \tilde{\ell}_6 \cup \tilde{\ell}_7 \cup \ell_8$, где $\tilde{\ell}_5 = p[A_3\tilde{T}_1]$; $\tilde{\ell}_6 = p[\tilde{T}_1\tilde{T}_0]$; $\tilde{\ell}_7 = p[\tilde{T}_0 T_2]$; $\ell_8 = p[T_2 T]$. Здесь $\tilde{T}_1\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\varepsilon}, -\alpha - \sqrt{\varepsilon}\right)$; $\tilde{T}_0\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\varepsilon}, -\alpha\right)$; $\tilde{T}_2\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\varepsilon}, t_2\right)$. Тогда

$$J_1^{(8)}(t,\varepsilon) = \tilde{R}(t,\varepsilon)\left|\int\limits_{\tilde{\ell}} \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int\limits_{t_0}^{\tau}\lambda_1(s)ds\right]|d\tau|\right| = O(\sqrt{\varepsilon})\tilde{R}(t,\varepsilon) + \tilde{R}(t,\varepsilon)\left|\int\limits_{\ell_8} \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int\limits_{t_0}^{\tau}\lambda_1(s)ds\right]|d\tau|\right| =$$

$$= O(\sqrt{\varepsilon})\tilde{R}(t,\varepsilon) + \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\sqrt{\varepsilon}}^{t_1} \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}(\cos t_1 - \cos\tau_1)(cht_2 + asht_2)\right]d\tau_1 = O(\sqrt{\varepsilon})\tilde{R}(t,\varepsilon) + O\left(\frac{\varepsilon}{cht_2 + asht_2}\right).$$

Здесь $O\left(\frac{\varepsilon}{cht_2 + asht_2}\right) = O(\varepsilon)$ при $cht_2 + asht_2 \ge \delta$; $O\left(\frac{\varepsilon}{cht_2 + asht_2}\right) = O(\varepsilon^{1-p})$ при $cht_2 + asht_2 \ge \varepsilon^p$, $0 < p \le \frac{1}{2}, p = const.$ Если $0 \le cht_2 + asht_2 \le \tilde{\beta}_0\sqrt{\varepsilon}$, то;

$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\varepsilon}}^{t_1} \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}(\cos t_1 - \cos\tau_1)(cht_2 + asht_2)\right]d\tau_1 = O(\sqrt{\varepsilon})$. Таким образом, справедлива следующая

Теорема2. Пусть: 1) $h(t)$– аналитическая функция такая, что $\left(A^{-1}(t)h(t)\right)' = O(1)$ при $(t_1, t_2) \in H_0$; $t_0 = -\frac{\pi}{2}$; $\alpha = \frac{1}{2}\ln\frac{a+1}{a-1}, a > 1$; 2) $0 < p \le \frac{1}{2}$; $0 < \delta << 1$ $(\delta < \alpha), p, \delta - const.$

Тогда для решения задачи (4_1) на H_0 справедливы оценки: $x_1(t,\varepsilon) = O(\varepsilon)$ при $\cos t_1 \ge \delta$ и $\operatorname{Re}\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_1(s)ds \le \varepsilon\ln\varepsilon$; или $\cos t_1 \le \sqrt{\varepsilon}$; $cht_2 + asht_2 \ge \delta$ и $\operatorname{Re}\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_1(s)ds \le \varepsilon\ln\varepsilon$;

$x_1(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{1-p})$ при $\cos t_1 \ge \varepsilon^p$ и $\operatorname{Re}\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_1(s)ds \le \varepsilon\ln\varepsilon$; или $\cos t_1 \le \sqrt{\varepsilon}$; $cht_2 + asht_2 \ge \sqrt{\varepsilon}$ и $\operatorname{Re}\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_1(s)ds \le \varepsilon\ln\varepsilon$; $x_1(t,\varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon})$ при $cht_2 + asht_2 \le \sqrt{\varepsilon}$; $\cos t_1 \le \sqrt{\varepsilon}$.

Мы показали как просто оценить первого приближения решения сингулярно возмущенной системы, когда собственные значения имеют вид $\lambda_{1,2}(t) = \sin t \pm ia\cos t$.

Линия $\operatorname{Re}\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_{1,2}(s)ds = 0$ -есть особая критическая линия. Есть понятия Стокса явление.

Особая критическая линия не является Стокса явление. Если путь интегрирования l взять вдоль особо критической линии- $\mathrm{Re}\int_{t_0}^{t}\lambda_{1,2}(s)ds = 0$, то оценка первого приближения сводится к оценке интеграла типа $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)e^{ixh(t)}dt$, причем даже в простейшем случае $h(t)$ не имеет стационарной точки внутри интервала (α,β). Этот интеграл сводится к сходящимся несобственным интегралам [4]. Получается тот же результат, который получается гораздо проще. Метод стационарной фазы-есть старинный метод для оценки указанного интеграла. Метод стационарной фазы не применима для оценки высших приближения внутри области H_0 по простой причине, что $R(t) = \mathrm{Re}\int_{t_0}^{t}\lambda_{1,2}(s)ds < 0$.

Внутри области H_0 основную роль играет величина $R(t)$.Как мы показали в работе [3] решения линейной задачи (3) существует, единственно и имеют оценки на $H_c; H_\varepsilon; K_\varepsilon;$ где K_ε -является правильной частью H_0 . На множестве H_0 решения начальной задачи для линейной системы не существует. Вблизи особой критической линии $\mathrm{Re}\int_{t_0}^{t}\lambda_{1,2}(s)ds = 0$ имеется неулучшаемая оценка $O(\sqrt{\varepsilon})$ $\left(O(\varepsilon^{\frac{1}{n+1}})\right)$ для первого приближения. Неслучайно в работе [1] изучаются решения нелинейной сингулярно возмущенной системы. Точно мы указали в работе [4], что главные результаты первых двух глав работы [5] являются неверными. Когда решения не существует на H_0, то не имеют смысл построить равномерные приближения. Более вероятно, что для достижения корысной цели Дилмурат нечестно и умышленно “доказал теоремы1.1.1”. Тем самым не только себя опозорил и опозорил тех, кто его поддержал.!

Литература:

1. Азимбаев М. А. Устойчивость решений начальной задачи линейных сингулярно возмущенных уравнений.-Дисс....канд.физ.математ.наук.01.01.02.-Ош. 2010.-С.112.
2. Шишкова М.А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости фокуса в плоскости “быстрых движений” дис....канд. физ-мат.наука. М.1973. –С.37.
3. Вестник ОшГУ №3-2012, выпуск III. -С.87-105.
4. Вестник ОшГУ. - №4. 2016. –С.51-59.
5. Турсунов Д.А. Асимптотика решения бисингулярно возмущенных обыкновенных и элиптических дифференциальных уравнений, Ош “Билим” 2013.