УДК 517.968

КАРАКЕЕВ Т.Т., МУСТАФАЕВА Н.Т.
КНУ им. Ж. Баласагына, Бишкек
KARAKEEV T.T., MUSTAFAEVA N. T.
J.Balasagun KNU, Bishkek tkarakeev@yandex. Ru

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Биринчи турдегу эки коз карандысыз озгорулмолуу Вольтерранын сызыктуу эмес интегралдык тендемелерин регулярдоо

Regularization of nonlinearVolterra integral equations of the first kind with two independent variables

Аннотация: *в работе изучаются вопросы регуляризации нелинейного интегрального уравнения Вольтерра первого рода с дифференцируемым ядром, которое вырождается в начальной точке диагонали. В предположении существования решения в пространстве непрерывных функций рассматриваемое уравнение сводится к интегральному уравнению Вольтерра третьего рода, на основе которого получен регуляризирующий оператор. Доказана равномерная сходимость регуляризованного решения к точному решению интегрального уравнения Вольтерра первого рода, получены оценка допускаемой погрешности и условия единственности решения исходного уравнения в шаре непрерывных функций.*

Аннотация: *макалада ядросу дифференцирленүүчү жана диагонал чекиттеринде нолго айлануучу биринчи түрдөгү Вольтерранын сызыктуу эмес интегралдык теңдемелерин регулярдоо маселеси изилденет. Теңдеменин чечими жашайт деген болжолдоонун негизинде аны үчүнчү түрдөгү Вольтерранын интегралдык теңдемесине келтирип, регулярдатылган оператор түзүлдү. Регулярдалган чыгарылыштын биринчи түрдөгү Вольтерранын интегралдык теңдемесинин так чыгарылышына бир калыпта жыйналуусу далилденди жана кетирилген каталыкты баалоо барабрсыздыгы, чыгарылыштын үзгүлтүксүз функциялар шарында жалгыздыгын камсыздаган шарттар аныкталды.*

Annotation: *in this paper, we study the regularization of a nonlinear Volterra integral equation of the first kind with a differentiable kernel that degenerates at the initial point of the diagonal. Under the assumption of the existence of a solution in the space of continuous functions, the equation under consideration reduces to the Volterra integral equation of the third kind, on the basis of which a regularizing operator is obtained. The uniform convergence of the regularized solution to the exact solution of the Volterra integral equation of the first kind is proved, an estimate of the admissible error and the uniqueness condition for the solution of the initial equation in the ball of continuous functions are obtained.*

Ключевые слова: *уравнение Вольтерра, малый параметр, равномерная сходимость.*
Keywords: *Volterra equations, small parameter, uniform convergence.*
Негизги свздвр: *Вольтерра теңдемеси, кичи параметр, бир калыпта жыйналуу.*

Рассмотрим нелинейное двумерное интегральное уравнение Волътерра первого рода
x x z

K₀(x,z,s,u(s,z))ds + I I *N(x,z,s,T,u(s,T))dTds*

= *g{x,z),* (1)

где для заданных функций *K(x, z,s),g(x*,z), Л?(x, z, s, т, u(s, т)) выполняется условия:

а)$K_0(x,z,s,u(s,z)) = K(x,z,s)u(s,z) + K_x\{x,z,s,u\{s,z))$,
$K(x,z,s)$ 6 C^{xo}-^{0}Фо), $D_0 = \{(x,z,s)/0 < s < x < b,0 < z < a]$,
$k(0, z) = 0$, $k(x, z) = K(x, z, x)$ — неубывающая функция по x в D;
б) $g\{x,z)$ 6 C^ф), $D = [0,b] \times [0,a]$, $g^{(i)}(0,z) = 0,i = 0,1$;
в) $G(x,z) > d_1$, $G(x,z) = C_2K(x, z,s) + K_x(x, z,s) + C_{lc}g(x,z)$, , 0 <
C_t, C_2, $d_t = const$;
г) $N(x,z,s,z,u)$ 6 $C^{1,0,0,0,1}$^)^ $_x(x,z,s,т,u)$ 6 $C^{0,0,0,1}(D_2)D_2$ =
$D_t x R$,
$K_г$ (x, z, s, u) 6 $C^{1,0,0,0}$ (D_2), $D_x = \{(x, z, s, т)/ 0 < s < x < b, 0 < т < z$

<a} ; \K_2(x, z, *s, u) - K_2* (x, z, *s, o)) - K_2*(y, z, *s,* u) + K_2(y, z, s, *ш) *

<L_{K1}(x-y)\u-co\, y < x, (x,y) 6 [0, b], 0 < L_{K1} = *const, K_2{x,* z, s, u) = —*C_2K_e(x,* z, s, u) — *K_{lx}(x,* z, s, u); 1^ (x, z, s, т, u) - *N_t* (x, z, s, т, <u) - iVi (y, z, s, т, u) + *N_t* (y, z, s, т, *ш) \ < < L_N(x - y)\u - ш\,* y < x, (x,y) 6 [0,*b],*

0 < L_N = *const, N_t* (x, z, s, т, u(s, т)) = *—C_2N(x, z, s, т, u(s,* т)) *— N_x(x, z, s, x, u{s,* т)). Действуем оператором *$C_2I + D + C_tT$,* где / - единичный оператор, Г-оператор Вольтерра: *(Tv)*(x, z) = *J u(s,z)v(s,z)ds, D* -оператор дифференцирования по переменной *x,* на уравнение (1). Тогда получим следующее уравнение [1]

k(x,z)u(x,z) + I G(s,zMs.z)ds = I K_3(x,z,s,u(s.z-))ds

x z **x z**

I *N_t* (x, *z, s, m, u(s,* т)) *dzd* + I I *N_t* (x, *z, s, m, u(s,* т)) *cLтcLs* +

o o

x

^*l**. **! **TM*. *))

•*A*

+ Ci I I I N(v, z, s, т, u(s, z)) u(v, *r)dvdrds* +

0 0 **s**

+f(x,z),

где /(x, z) = *C_2g(x,* z) + ^(x, z), *K_2*(x, z, s, u(s, z)) = tf$_2$(*,z,s,u(s,z)) +

+ [L(s, z,s) — L(x,z,s)]u(s,z), L(x, z,s) = *C_2K{x,* z, s) + *K_x(x,* z,s).

Рассмотрим уравнение с малым параметром *г* 6 (0,1) вида

+

0 0

x z

+ I I *N_1(x,z,s,T,u_J(s,T)^s)dTds* o o

+ C-L I u_e(s, *z)ds* I tf$_0$(v, z, *s, u_s(y,* z)) dv +

0 **s**

л: z я:

+C_X f f f JV(v, z, s, *m, u_e(s,* T))u_e(v, *z)dvdrds* + *eu(0,* z)

0 0**s**

+ /(x,z). (3)

С помощью резольvenты ядра (***—G(s,*** *z)/(e* + ***k(x,*** z))) уравнение (3) приводим к у уравнени интегральному уравнению следующего вида [2,с.26]

u_E{x,z)

s

K_3(s,z,v,u_e(v,z

f K_3(x,z, v,u_e(y,z))dv + ff N^s,z, v,г,u_e(y,r))dzdv

o 0 0

x z

- I I *N_t(x, z, v, m, щ(y, r))drdv* +

s s

J *u_e(v,z)dvJ K_0(y,z,v,u_E(y,z)dy)*

0 **v**

x x

- *j u_s{v,z)dv j K_0{y,z,v,u_s{y,z)) dy* +

v

s z s$_0$***z s***

$$+ \int \int \int N(y,z,v,m,u_J(y,\tau))и_e(y,z)\,dydrdv$$

$$- \int_0 \int_0 \int_v S(y.,,,r.uM)u.b.,»y«J$$

£ + k\X, Z) \ J

x z 0

G(y,z) ----- dv \\\ $K_3(x,z,s,u_J(s,z))$ ds

+ J J Л^(x, z, s, m, u(s, v,z) / IJ + т)) drds + C_x I $u_E(s, z)$ds I $K_0(y, z, s, u_J(y$, z)) dv

0 0 o os

+

+Ci Jo Q $s^N(.^{v,z}<^{s,T}< ^{u}∧^{s,T}Ж<>< z)dvdrds + Ju(0, z) + f(x, z)} = (Au_sXx,z)$. (4)

Пусть $0 < u_0, r_0 = const$, fi(D) = {u(x,z) 6 C(D): $|u(x,z) - u_0| < r_0$}, $U_e(x,z)$, $u_e(x, z)$ 6 fl(D). Оценим разность операторов (уШ£)(x,z) — (Ай_e)(x,z). Тогда

x x s z

E + k(x,Z) j—— f e x p f - f G(v,z)dv) G(s,z)J(

0 s o 0 Г[^(5,г,у,т,й_e(y,

{X,Z) J I J J + k{y,Z) J +

k\S, Z) \j J

—Л^ (s, z, v, x, $й_e$ (y, т)) — N_t (x, z, v, т, u_s (v, т)) + Л^(x, z, v, т, u_J(v, r))]drdv

x z

~*~ I I 1^1 I^{X, Z, V, T,} "e (^{S, T}-V — ^1 I^{X, Z, V, T,} ^J

s 0

■

;,,;HH

<--------------

e + ***k***(***x***, **z**)

л x

x $(L_N + C_2M_{N1} + L_{N2})$ I exp

IC(D) ^

x $||u_J(x,z)-u_J(x,z)||_{c(D)}$,

где $M_{N1} = max\N_u(x, z, s, x, u)\$, $L_{N2} = max\N_{xu}(x, z, s, x, u)\$; x (x — s~)ds\\$u_s(x,z)$ — $u_s(x,z)$

D?x

Ci

exp G(y,z)

o л av i x -)I^eXP\-he

E + k(x, z) E + K(V,Z) E + k(s,z)

G(s,z)

dv ------------- x

z) I s + k(s,z)

$L_Nb \pm C_2M_{N1} \pm L\ d_1$

x

G(s,z)

I $[K_3(s, z, v, u_s(y, z)) - K_3(s, z, v, u_s(y, z))]dv$

$-K_3(x,z,v,u_E(y,z))]dv$

0 s

x

+2Cl1 + **C2W)/N..(v,,)-fl,(».x)|dv** + (C2Mln

2

£ + k(s

$+ L_{K1})\|u_e(x,z) - u_J(x,z)\|_{c(D)}\} <$

$L_K 1+2(W2)$ j«|ue(vj z) _ ue(yi z)ldy + C2MK^LK1 Ц _J(x; z)

$(x,z)\|_c$(•£,-), M^ = $max\backslash K_{lx}(x,z,s,u)\backslash$, 0 < $L_2 = Lip(K(x,z,i$

s)|x),0<

$L_t = Lip(K_x(x,z,s)\backslash x);$

^H1™^™1Ш

$N(y,z,v,x,U_s(\backslash$

$—\breve{u}_e(y, x)$^dydxdv

x z s

///

s 0 v

+

$— u_s(y, x))dydxdv\backslash\ ds$

$iV(y,z,v,T,u_e(v,T))(u_e(y,T)$

s 0 v

2C1MN G(y,z) dv -- \ G(s,z) x
e + k(x e + K(y,z) + k(y,z) k(s,z) s +

£ C(D) ^

— s)ds\\ue(x, z) — uJ(x

2CxMNba

■l|uJ(x,z)-uJ(x,z)||c(D),
; dt
где $M_N = max\N(x, z, s, \tau, u)\;$

J + k(x,z)

exp
x x
Г G(y z) ^ \ Г ^ ^ ^ ^ _^ ^
J £ + k{y, Z) I J

K3 (x, z, s, ue (s, z))] d\

2{L1 + C2L2)
< ------------------ 1 + C2L2)f_ , |«J(v, z) — ue(y, z)I dv
dxe J

C2MK1 + LK1
------------------||uJ(x,z)-uJ(x,z)||c(D);

Ci
£ + /C(X, Z) I J exp , £ + /C(V, Z) j\J J J __L dv f [[[JV(v, z, s, m, Us(s, т))
0 0 s
— N(v, z, s, т, uJ(s, т))] x
x us(y,r)dvdrds

+ N(v,z,s,т,uJ(s,т))(uJ(v,т)
0 0s

:,

N1r ± Ci(MN1r + MN)
d^e

z)\drds.

е оценки для операт
Продолжая данные оценки для оператора A получим следующее неравенство:
||04uJ)(x,z) - 04uJ)(x,z)||C(D)
<q||uJ(x,z)-uJ(x,z)||c(D), (5)
где $q = q_1 + q_2$, q_1
= (LK1 + aLN)bd^ + QCxMKhr
+ CгaЬ(Mmг + C1MЛг1))(2 + e–1)di \ q2 = (ab(C2MN1 + LN2) + 2a(Lt +
C2L2)+C2MK1 + LK1)(1
+ e 1)d1 1, $M_K = max\K(x,z,s)\.$

Нетрудно показать, что уравнение (4) при $q < 1$ имеет единственное решение [3,с.392] в fl(D).

Теорема. Пусть выполняются условия *а) - г),q* <1 *и* уравнение (1) имеет решение $u(x,z)$ 6 C(D). Тогда при s -> 0 решение уравнения (3) равномерно сходится к решению уравнения (1), причем $||u_J(x,z)-u(x,z)||_{c(D)}$

$$< (4(d_1e)-{}^1{}_J{}^1-\hat{}||u(x,z)||_{c[0,b]} +(0_U(EP))/(1 -q).$$

Доказательство. К обеим частям уравнения (2) прибавив, с помощью резольвенты ядра (— $G(s, z)/(e + \kappa(x, z))$), приведем полученное уравнение к виду (4) и рассмотрим их разность. При этом произведя подстановку $r]_e(x,z) = u_E\{x,z) — u(x,z)$ получим

X / X \
G (y, z) \ G (s, z)

'

x l $[K_3(s,z, v,u_e(y,z)) - 3(s,z, v, u(y,z))]dv$ - l $[K_3(x,z, v, u_e(y,z))$ -

s z

$-K_3(s,z, v,u(y,z))]dv$ + l l $[N\hat{}s,z, v,m,щ(y,т)) - N\hat{}s,z, v,m,u(y,т))$

-N^x, z, v, m, u_e(y, т)) + N^x, z, v, m, u(y, r))]drdv

s 0

-N^x, z, v, т, u(y, r))]drdv

s x

+ cA щ{y, z)dv j K_0(y, z, v, u(y, zj)dy

0 s

x

+ C_x I rj_E(y, z)dv x

s
x x

x J K_0(y,z,v,u(y,zj)dy

v

s x

+ cA u(v,z)dvj[K_0(y,z,v,u_e(y,z)) - K_0(y, z, v, u(y, z))]dy -

- [K_0(y,z,v,u_E(y,z)) - K_0(y,z,v,u(y,z))]dy 4^4

s z x

+ J J J [N(y,z,v,x,u_J(v,x))-

0 0s

—N(y, z, v, x, u(y, т))]и(y, x)dydxdv

x z x

-cA\\ u(y, т)[N(y, z, v, г, u_E(y, т)) -

s 0 v

N(y, z, v, x, u(y, T))]dydrdv

0 0s

x z x

||| +$C_г$\ I I N{y,z,v,x,u(y,x))r]$_J$(y,z)dydxdv + s(u(x,z) -u(s,z))|ds

s 0 v

+

+ 8 + k(x-Z)^{GXP} (~/ £ + (fe(v)z/^{V} /[^(X,Z,5,«$_J$(5,Z)) -

-tf$_3$(x,z,s,u(s,z))]ds

x z

+ [[[^(x, z, s, т, u_J(s, т)) - N^x, z, s, x, u(s, x))]dxds

0 0

+

x

•f^dsj +C_t r]$_J$(s,z)ds K_0(y,z,s,u(v,z))dv

+ cA u(s, z)ds j [K_0(v, z, s, u_e(y, z))

s

-K_0(y,z,s,u(y,z))]dv

$$+ c \int_0^{x} \int_0^{z} \int_s^{x} [N(v,z,s,x,u_s(s,x))$$

$$- N(y, z, s, x, u(s, \tau))]u(v, x)dvdxds +$$

:₁///»(v,„.,м·fer)),.Cv.r)*d_nfa-«(uCr,r)-uC0,r))|.

Отсюда, используя оценку (5) полуим неравенство вида

$$\|V_s(x,z)\|_{c(D)} < q \, \|J7_J(x,z)\|_{c(D)} + \|(H_J u)(x,z)\|_{c(D)}, \qquad (6)$$

где для оператора (H_Ju)(x,z) = -j^exp (- /;-gJLdv) [u(x,z) - u(0,z)] +

H ---—— \ₙ exp [— \ ———-dv)———-\u(x,z)— u(s,z)\ds

имеет место оценка [4]:

$$\|(H_J u)(x,z)\|_{c[0,b]} < 4(d_1 e)^{-1} J^{1-\wedge} \|u(x,z)\|_{c(D)} + \omega_u(e^\wedge),$$

$$\omega_u(J/?) = \sup_{|x-t|<eP,\ 0<z<a} |u(x,z) - u(t,z)|, \qquad 0 < / ? < l.$$

Так как $q < 1$, то из (6) следует оценка теоремы, т.е. при $s \to 0$ функция $u_e(;t,z) \to u(x,z)$ равномерно. Теорема доказана.

Следствие. При выполнении условий теоремы решение уравнения (1) единственно в fl(D).

Заметим, что регуляризация двумерных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с суммируемым ядром рассматривается в работе [5].

Литература

1. Каракеев Т.Т., Мустафаева Н.Т. Регуляризация линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Наука, техника и образования, 2017 -№ 8 (38) - С. 5-11.
2. Омуров Т.Д., Каракеев ТТ. Регуляризация и численные методы решения обратных и нелокальных краевых задач. - Бишкек: Илим, 2006. - 164 с.
3. Треногин В.А. Функциональный анализ. - Москва: Наука, 1980. - 496 с.
4. Максутов А.О. Один класс линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с двумя независимыми переменными//Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям - Фрунзе: Илим, 2000. - Вып.29. - С. 148-155.
5. Бекешов Т.О. О решении системы двумерного интегрального уравнения Вольтерра первого рода// Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям -Фрунзе: Илим, 1997. - Вып.26. - С. 108-116.