УДК 517.923

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ РИКАТТИ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРОННОЙ ТАБЛИЦЫ EXCEL
РИКАТТИНИН ТЕҢДЕМЕСИН EXCEL ЭЛЕКТРОНДУК ТАБЛИЦАСЫНЫН ЖАРДАМЫНДА ЧЫГАРУУ
RICCATI EQUATION SOLUTION BY USING AN EXCEL SPREADSHEET

Аширбаева А. Ж. – профессор, ОшТУ,
кафедра «Прикладная математика».
Аракеева А.М. – магистр ОшТУ, г. Ош,
e.mail: arakeeva1979@mail.ru

Аннотация: *В данной работе рассмотрено интегрирование уравнения Рикатти при помощи степенных рядов. Использована электронная таблица EXCEL.*

Аннотация: *Жумушта даражалуу катардын жардамында Рикаттинин теңдемесин интегралдоо каралган. Excel электрондук таблицасы колдонулган.*

Annotation: *The integration of the Riccati equation by using power series. Used Excel spreadsheet.*

Ключевые слова: *Дифференциальное уравнение, уравнение Рикатти, степенной ряд, электронная таблица Excel.*

Ачкыч сөздөр: *Дифференциалдык теңдеме, Рикаттинин теңдемеси, даражалуу катар, Excel электрондук таблицасы.*

Key words: differential equation, Riccati equation, power series, an Excel spreadsheet.

В [1] рассмотрено решение уравнения Рикатти при помощи рядов. Использована методика вычислений на арифмометре.

Применим степенные ряды с использованием электронной таблицы Excel к решению уравнения Риккати (Jacopo Riccati, 1376-1754), которое относится к одному из простейших нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Общее дифференциальное уравнение Риккати имеет вид:

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x), \tag{1}$$

за включением некоторых очень немногочисленных частных случаев, не сводится к квадратурам и не может быть выражено в конечном виде через элементарные функции.

Рассмотрим следующую задачу: Решить задачу Коши для уравнения Риккати

$$y' = y^2 + x^2; \quad x_0 = 0; \quad y(0) = +1 \tag{2}$$

Решение. Решение ищем в виде ряда

$$y = \sum a_n x^n,$$

коэффициенты которого определяются следующей рекуррентной формулой:

$$a_{n+1} = \frac{a_n^{(2)} + \gamma_n}{n+1}; \quad a_0 = 1; \quad \gamma_n = \begin{cases} 1 & при \quad n = 2 \\ 0 & при \quad n \neq 2 \end{cases} \tag{3}$$

$$a_n^{(2)} = a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \ldots + a_n a_0, \tag{4}$$

$$\dot{a}_{n+1} = a_n^{(2)} + \gamma_n; \quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

$$a_{n+1} = \frac{\dot{a}_{n+1}}{n+1}$$

Все вычисления, которые обеспечивают девять верных знаков при определении первых 30 коэффициентов a_n, приведены в таблице. Так как для найденных коэффициентов a_n выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q=const,$$

то в этой же таблице вычислены величины

$$R_n=\frac{1}{q_n}=\frac{a_n}{a_{n+1}};\quad R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{q_n}\right|$$

и соответствующие коэффициенты b_n ряда

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\frac{R}{R-x}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n\right\},$$

(5)

где $b_{n+1}=\frac{a_n}{R}-a_{n+1};\quad R=0{,}969810654.$

Таким образом, первая особая точка искомого решения есть полюс (простой) $x=+R,$ а ряд (5), в котором этот полюс выделен, позволяет вести вычисления за его пределами. Вычислив при помощи ряда (5) новое начальное значение $y(x_0)=y_0$ за пределами первой особой точки, аналогичным путем определяем вторую особую точку. Продолжая этот процесс, мы можем аналитически продолжить первоначальное решение на любой наперед заданный конечный интервал.

Решаем задачу с использованием электронную таблицу Excel. Используя формулу (3) заполняем следующую таблицу:

Таблица 1.

	E	F	G	H	I	J	K
12	**n**	γ_n	a_n	$a_n^{(2)}$	$\dot{a}_{n+1}$	$R_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}$	b_n
13	0	0					
14	1	0					
15	2	1					
16	3	0					
17	4	0					
18	5	0					
19	6	0					
20	7	0					
21	8	0					
22	9	0					
23	10	0					
24	11	0					
25	12	0					
26	13	0					
27	14	0					
28	15	0					
29	16	0					
30	17	0					
31	18	0					
32	19	0					

33	20	0					

Первоначально в ячейку G13 вводится цифра 1.

В клетку H13 занесем формулу =G13*G13. В клетку I13 напишем сумму ячеек: =H13+F13. Заполняем клетку G14 формулой =I13/E14. После этого в клетку J13 занесем формулу: =G13/G14. По такой же схеме заполняются остальные ячейки таблицы: В клетку H14 занесем формулу =G13*G14+G14*G13. В клетку I14 напишем сумму ячеек: =H14+F14. Заполняем клетку G15 формулой =I14/E15. После этого в клетку J14 занесем формулу: =G14/G15. В ячейку К14 вводится формула: =G13/0,969810654-G14.

При скопировании элементы столбца H заполняются следующими формулами:

H15=G13*G15+G14*G14+G15*G13

H16=G13*G16+G14*G15+G15*G14+G16*G13

H17=G13*G17+G14*G16+G15*G15+G16*G14+G17*G13

…………………………………………………………………….

H41=G13*G41+G14*G40+G15*G39+G16*G38+G17*G37+G18*G36+G19*G35+G20*G34+G21*G33+G22*G32+G23*G31+G24*G30+G25*G29+G26*G28+G27*G27+G28*G26+G29*G25+G30*G24+G31*G23+G32*G22+G33*G21+G34*G20+G35*G19+G36*G18+G37*G17+G38*G16+G39*G15+G40*G14+
+G41*G13, которые получаются из формулы (4).

Результаты показаны в следующей таблице

Таблица 2.

	E	F	G	H	I	J	K
12	**n**	γ_n	a_n	$a_n^{(2)}$	$\dot{a}_{n+1}$	$R_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$	b_n
13	0	0	1	1	1	1	
14	1	0	1	2	2	1	0,031129
15	2	1	1	3	4	0,75	0,031129
16	3	0	1,333333333	4,66666667	4,6666667	1,14285714	-0,3022
17	4	0	1,166666667	6	6	0,97222222	0,208172
18	5	0	1,2	7,4	7,4	0,97297297	0,002984
19	6	0	1,233333333	8,97777778	8,9777778	0,96163366	0,004022
20	7	0	1,282539683	10,5428571	10,542857	0,97320084	-0,01081
21	8	0	1,317857143	12,2285714	12,228571	0,96991822	0,004607
22	9	0	1,358730159	14,0071429	14,007143	0,97002663	0,000151
23	10	0	1,400714286	15,8924868	15,892487	0,96950574	0,000312
24	11	0	1,444771525	17,8753102	17,87531	0,96989971	-0,00045
25	12	0	1,489609187	19,9676768	19,967677	0,96981335	0,000137
26	13	0	1,535975136	22,1727752	22,172775	0,9698223	4,26E-06
27	14	0	1,583769656	24,4963401	24,49634	0,96979977	1,9E-05
28	15	0	1,633089337	26,9427498	26,94275	0,96981301	-1,8E-05
29	16	0	1,683921864	29,5177952	29,517795	0,96981063	4,1E-06
30	17	0	1,736340895	32,2270315	32,227032	0,9698112	-3,6E-08
31	18	0	1,790390641	35,0763678	35,076368	0,96981028	1,01E-06
32	19	0	1,846124622	38,0718545	38,071854	0,96981072	-7,1E-07
33	20	0	1,903592724	41,2198477	41,219848	0,96981065	1,21E-07
34	21	0	1,962849892	44,5269357	44,526936	0,96981068	-1,5E-08

35	22	0	2,023951621	47,9999758	47,999976	0,96981064	4,84E-08
36	23	0	2,086955468	51,6460929	51,646093	0,96981066	-2,6E-08
37	24	0	2,151920538	55,472698	55,472698	0,96981065	3,46E-09
38	25	0	2,218907918	59,4874944	59,487494	0,96981065	-1,4E-09
39	26	0	2,287980553	63,6984907	63,698491	0,96981065	2,02E-09
40	27	0	2,35920336	68,1140116	68,114012	0,96981065	-1,1E-09
41	28	0	2,43264327	72,7427097	72,74271	0,96981065	-5,7E-11
42	29	0	2,508369299		0		-2,6E-10

Список использованной литературы:

1. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. -Москва: Наука,1974
2. Иманалиев М.И. и др. Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – Бишкек. 2005.
3. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. -М.: «Наука», 1982.
4. Панкова Г.Д. Информатика (практикум в MSEXCEL). Бишкек 2000г
5. Левин А. Самоучитель работы на персональном компьютере. М., 1995.