УДК 517.928

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ С НЕАНАЛИТИЧЕСКИМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ ТЕРЯЮЩИЕ ЕДИНСТВЕННОСТЬ ПРИ ВЫРОЖДЕНИИ
КУБУЛГАН УЧУРДА ЖАЛГЫЗДЫГЫ БУЗУЛГАН ОҢ ЖАК БӨЛҮГҮ АНАЛИТИКАЛЫК БОЛБОГОН СИНГУЛЯРДЫК ДҮҮЛҮККӨН ТЕҢДЕМЕЛЕР
SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS WITH NON-ANALYTIC RIGHT-HAND SIDES LOSING THE UNIQUENESS WITH THE DEGENERATION

Мурзабаева А.Б.
КР г.Ош, ОшТУ
email: aytbu.murzabaeva@mail.ru

Аннотация: *В данной работе рассматриваются сингулярно возмущенные уравнения с неаналитическими правыми частями, вырожденные уравнения которых имеют несколько решений. Без привлечения условий устойчивости доказано существование интервалов притяжения решений вырожденных уравнений.*

Аннотация: *Жумушта оң жак бөлүгү аналитикалык болбогон сингулярдык дүүлүккөн теңдемелер изилденди. Кубулган теңдемелери бир нече чечимдерге ээ болгон учурлар изилденди. Кубулган теңдеменин чечимдеринин тартылуу интервалдарынын жашашы туруктуулук шартты колдонбостон далилденди.*

Annotation: *In this paper, we consider singularly perturbed equations with non-analytic right-hand sides, degenerate equations which have several solutions. Without the involvement of conditions of stability proved the existence of intervals of attraction of solutions of degenerate equations.*

Ачкыч сөздөр: *Сингулярдык дүүлүккөн теңдемелер, тартылуу интервалы, асимптотика, үзгүлтүксүздүк, үзүлүү чекиттери.*

Ключевые слова: *Сингулярно возмущенные уравнения, интервал притяжения, асимптотика, непрерывность, точки разрыва.*

Key words: *Singularly perturbed equations, the interval of attraction, asymptotics, continuity, break point.*

Постановка задачи

В работах [1-2] рассмотрены сингулярно возмущенные уравнения вырожденные уравнения, которых имеют единственные решения и правые части являются непрерывными или аналитическими функциями по всем переменным входящими в эти функции.

В данной работе рассматриваются сингулярно возмущенные уравнения с неаналитическими правыми частями, вырожденные уравнения которых имеют несколько решений.

Пусть рассматривается уравнение

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = a(t)x(t,\varepsilon) + b(t)x^2(t,\varepsilon) \qquad (1)$$

с начальным условием

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0, \qquad (2)$$

где $t_0 \le t \le T\ t_0, T \in R$.

При $\varepsilon = 0$ из (1) получим вырожденное уравнение

$$a(t)\xi(t,\varepsilon) + b(t)\xi^2(t,\varepsilon) = 0 \qquad (3)$$

(3) имеет решения $\xi_1(t,\varepsilon) = 0$, $\xi_2(t,\varepsilon) = -\dfrac{a(t)}{b(t)}$

Определение. Если $\forall t \in (t_1, T_1) \subset [t_0, T]$ существует $x(t,\varepsilon)$ - решение задачи (1)-(2) и справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x(t,\varepsilon) = \xi_j(t),$$

то интервал (t_1, T_1) назовем интервалом притяжения решения $\xi_j(t)$.

Задача. Определить интервалы притяжения решений $\xi_j(t)$ (j=1,2), без привлечения условий устойчивости сформулированного в [1].

Решение задачи

I. Поставленную задачу решим при выполнении следующих условий

U1. $a(t), b(t) \in C^2[t_0, T]$ и $\forall t \in [t_0, T]$ $b(t) \neq 0$.

U2. $a(t) < 0$ при $t_0 \le t \le T$;

Решение задачи (1)-(2) можно представить в виде

$$x(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon x^0 \exp\dfrac{F(t)}{\varepsilon}}{\varepsilon - x^0 \int\limits_{t_0}^{t} \exp\dfrac{F(\tau)}{\varepsilon} b(\tau) d\tau} \tag{4}$$

где $F(t) = \int\limits_{t_0}^{t} a(s) ds$.

Асимптотическое поведение функции (4) зависит от свойств функции $\exp\dfrac{F(t)}{\varepsilon}$.

Следовательно, будем исследовать функцию F(t) для $t \in [t_0, T]$.

$F'(t) = a(t)$ и согласно U2 для $t \in [t_0, T_1]$ функция $F(t) \le 0$, причем равенство имеет место только при $t = t_0$.

Возьмем интеграл

$$J(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon} b(\tau) d\tau \tag{5}$$

Интеграл (5) проинтегрировав по частям получим

$$J(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\varepsilon b(\tau)}{a(\tau)} d \exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon} d\tau = \varepsilon\left[\frac{b(t)}{a(t)} \exp\frac{F(t)}{\varepsilon} - \frac{b(t_0)}{a(t_0)} - \int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{b(\tau)}{a(\tau)}\right)' \exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon} d\tau\right] \tag{6}$$

Согласно U1 функции *a(t)*и *b(t)* имеют непрерывные производные до второго порядка включительно. Тогда интеграл в (6), содержащееся в [...], проинтегрировав по частям убеждаемся, что он имеет порядок ε .

Таким образом для (4) имеем следующее асимптотическое представление

$$x(t,\varepsilon) = \frac{x^0 \exp\dfrac{F(t)}{\varepsilon}}{1 - x^0\left[\dfrac{b(t)}{a(t)} \exp\dfrac{F(t)}{\varepsilon} - \dfrac{b(t_0)}{a(t_0)} + O(\varepsilon)\right]} .$$

Отсюда для $t_0 << t \le T$, учитывая *F(t)<<0*, получим $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} x(t,\varepsilon) = 0$.

Таким образом, интервал $(t_0, T]$ является интервалом притяжения решения $\xi_1(t) \equiv 0$.

Решение $\xi_2(t)$ не имеет интервала притяжения.

II. Пусть выполняются условия

U1. $a(t), b(t) \in C^2[t_0, T]$ и $\forall t \in [t_0, T]$ $b(t) \neq 0$

U2. $a(t) > 0$ при $t_0 \le t \le T$.

Решение задачи представим в виде (4) и исследуем асимптотическое поведение функции $x(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.
В (4) согласно условия U2 для $t \in (t_0, T]$ $F(t) > 0$.
Проведем следующее преобразование

$$x(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon x^0}{\varepsilon \exp\frac{-F(t)}{\varepsilon} - x^0 \int\limits_{t_0}^{t} \exp\frac{F(\tau) - F(t)}{\varepsilon} b(\tau) d\tau} \tag{7}$$

Возьмем интеграл

$$J(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \exp\frac{F(\tau) - F(t)}{\varepsilon} b(\tau) d\tau$$

Согласно условия U2 для $t \in [t_0, T]$ $F'(t) = a(t) > 0$. Отсюда следует, что на отрезке $[t_0, T]$ функция *F(t)* возрастает. Следовательно, $F(\tau) - F(t) \le 0$ при $t_0 \le \tau \le t \le T$.
Интеграл *J(t)* проинтегрируем по частям

$$J(t) = \varepsilon \int\limits_{t_0}^{t} \frac{b(\tau)}{a(\tau)} d \exp\frac{F(\tau) - F(t)}{\varepsilon} = \varepsilon\left[\frac{b(t)}{a(t)} - \frac{b(t_0)}{a(t_0)} \exp\frac{-F(t)}{\varepsilon} - \int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{b(\tau)}{a(\tau)}\right)' \exp\frac{F(\tau) - F(t)}{\varepsilon} d\tau\right].$$

Используя условие U1, интеграл содержащийся в […] проинтегрировав по частям убеждаемся, что он имеет порядок ε.

На основе проведенных вычислений для (7) имеем следующее асимптотическое представление

$$x(t,\varepsilon) = \frac{x^0}{\exp\frac{-F(t)}{\varepsilon}\left(1 + x^0 \frac{b(t_0)}{a(t_0)}\right) - x^0 \frac{b(t)}{a(t)} + O(\varepsilon)}$$

Отсюда при $\varepsilon \to 0$ для $t_0 << t \le T$ получим

$$x(t,\varepsilon) \to -\frac{a(t)}{b(t)}.$$

Таким образом, интервал $(t_0, T]$ является интервалом притяжения решения

$$\xi_2(t,\varepsilon) = -\frac{a(t)}{b(t)}$$

Из рассмотренных случаев вытекает: если на некотором интервале *F(t)<0*, то этот интервал является интервалом притяжения $\xi_1(t) \equiv 0$; если *F(t)>0*, то интервал является интервалом притяжения решения $\xi_2(t) = -\frac{a(t)}{b(t)}$.

III. Теперь рассмотрим случай содержащий случаи I и II.
Задачу решим при выполнении условий
U1. $a(t), b(t) \in C^2[t_0, T]$ и $\forall t \in [t_0, T]$ $(b(t) \ne 0, a'(t) > 0)$.
U2. $a(t) < 0$ при $t_0 \le t \prec T_0$; $a(T_0) = 0$;
$a(t) > 0$ при $T_0 < t \le T$.

Определим функцию $F(t) = \int\limits_{t_0}^{t} a(s) ds$

U3. $\exists!\ T_1 (t_0 < T_1 < T)$ и $F(T_1) = 0$.
Решение задачи (1)-(2) можно представить в виде (4).Как и в предыдущем случае исследуем функцию *F(t)*для $t \in [t_0, T]$. По определению $F'(t) = a(t)$. Тогда согласно

условия U2 функция убывает на интервале $[t_0,T_0]$ и возрастает на интервале $[T_0,T]$. В точке $t=T_0$ имеет минимум. Если учесть условие U3, то для $t\in(t_0,T_1)$ $(F(t)<0)$, а для $t\in(T_1,T]$ $(F(t)>0)$.

Возьмем интеграл

$$J(t)=\int_{t_0}^{t}\exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon}b(\tau)d\tau \tag{7}$$

Пусть $t_0\le t\ll T_0$. Интеграл (7) проинтегрировав по частям убеждаемся, что он имеет порядок ε

$$J(t)=\int_{t_0}^{t}\varepsilon\frac{b(\tau)}{a(\tau)}d\exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon}d\tau=\varepsilon\left[\frac{b(t)}{a(t)}\exp\frac{F(t)}{\varepsilon}-\frac{b(t_0)}{a(t_0)}-\int_{t_0}^{t}\left(\frac{b(\tau)}{a(\tau)}\right)'\exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon}d\tau\right].$$

Пусть $T_0-\delta\le t\le T_0+\delta$ ($0<\delta-$ достаточно малое число, не зависящая от ε). Тогда интеграл (7) можно представить в виде

$$J(t)=\int_{t_0}^{T_0-\delta}\exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon}b(\tau)d\tau+\int_{T_0-\delta}^{t}\exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon}b(\tau)d\tau$$

В (7) первый интеграл проинтегрировав по частям убеждаемся, что он имеет порядок ε.
На основе условий U1, U2 функцию *F(t)* можно представить в виде

$$F(t)=F(T_0)+\frac{F''(T_0+\Theta(t-T_0))}{2!}(t-T_0)^2,\text{где } 0<\Theta<1;\ T_0-\delta\le t\le T_0+\delta$$

Подберем, учитывая что $F''(T_0+\Theta(t-T_0))>0$, δ так, чтобы выполнялось неравенство

$$F(T_0)\le F(t)\le F(T_0)+\alpha(\delta)<0,\ \alpha(\delta)>0.$$

Согласно U1 $\forall t\in[t_0,T]$ $(m_0\le b(t)\le M_0)$,
Тогда справедливо неравенство

$$m_0\exp\frac{F(T_0)}{\varepsilon}2\delta\le\int_{T_0-\delta}^{T_0+\delta}b(\tau)\exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon}d\tau\le M_0\exp\frac{F(T_0)+\alpha(\delta)}{\varepsilon}\cdot 2\delta$$

Отсюда следует, для $T_0-\delta\le t\le T_0+\delta$

второй интеграл имеет порядок $\varepsilon^n, n\in N$.

Пусть $T_0+\delta\le t\le T_1$. Тогда интеграл (7) можно представить в виде

$$J(t)=\int_{t_0}^{T_0-\delta}\exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon}b(\tau)d\tau+\int_{T_0-\delta}^{T_0+\delta}\exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon}b(\tau)d\tau+\int_{T_0+\delta}^{t}\exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon}b(\tau)d\tau \tag{8}$$

В (8) первый интеграл имеет порядок ε, второй ε^n, а третий порядок ε (для этого достаточно проинтегрировать третий интеграл по частям).
Подведя итог можно сказать, что для $t_0\le t\le T_1$ интеграл (7) имеет порядок ε.

Из проведенных вычислений вытекает, для $t_0\le t\ll T_1$ справедливо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}x(t,\varepsilon)=0 \tag{9}$$

Теперь рассмотрим случай, когда $T_1\le t\le T$. Из условий U2 и U3 вытекает,
$\forall t\in(T_1,T]$ $(F(t)>0)$.
В (4) проведем следующие преобразование

$$x(t,\varepsilon)=\frac{\varepsilon x^0}{\varepsilon\exp\frac{-F(t)}{\varepsilon}-x_0\int_{t_0}^{t}\exp\frac{F(\tau)-F(t)}{\varepsilon}b(\tau)d\tau} \tag{10}$$

Рассмотрим интеграл

$$J_1(t)=\int_{t_0}^{t}\exp\frac{F(\tau)-F(t)}{\varepsilon}d\tau \tag{11}$$

Интеграл (11) представим в виде

$$\begin{aligned}J_1(t)&=\exp\frac{-F(t)}{\varepsilon}\int_{t_0}^{T_0-\delta}\exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon}b(\tau)d\tau+\exp\frac{-F(t)}{\varepsilon}\int_{T_0-\delta}^{T_0+\delta}\exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon}b(\tau)d\tau+\\&+\exp\frac{-F(t)}{\varepsilon}\int_{T_0-\delta}^{T_1}\exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon}b(\tau)d\tau+\int_{T_1}^{t}\exp\frac{F(\tau)-F(t)}{\varepsilon}b(\tau)d\tau\end{aligned} \tag{12}$$

В (12), в первом, втором интегралах $F(t)\le 0$.

Следовательно, можно воспользоваться вычислениями, проведенными в предыдущем случае. Тогда для (12) имеем следующее аналитическое представление

$$J_1(t)=\exp\frac{-F(t)}{\varepsilon}\cdot O(\varepsilon)+\int_{T_1}^{t}\exp\frac{F(\tau)-F(t)}{\varepsilon}b(\tau)d\tau .$$

Возьмем интеграл

$$J_2(t)=\int_{T_1}^{t}\exp\frac{F(\tau)-F(t)}{\varepsilon}b(\tau)d\tau$$

и проведем интегрирование по частям. Тогда

$$J_2(t)=\int_{T_1}^{t}\varepsilon\frac{b(\tau)}{-a(\tau)}d\exp\frac{F(\tau)-F(t)}{\varepsilon}=\varepsilon\left[\frac{b(t)}{a(t)}-\frac{b(T_1)}{a(T_1)}\exp\frac{-F(t)}{\varepsilon}-\int_{T_1}^{t}\left(\frac{b(\tau)}{a(\tau)}\right)'\exp\frac{F(\tau)-F(t)}{\varepsilon}d\tau\right].$$

В полученном, для $J_2(t)$ выражение, интеграл содержащееся в […] имеет порядок ε, согласно условиям U2 и U3.

Таким образом

$$J_2(t)=\varepsilon\left(\frac{b(t)}{a(t)}-\frac{b(T_1)}{a(T_1)}\exp\frac{-F(t)}{\varepsilon}+O(\varepsilon)\right).$$

С учетом проведенных вычислений для (10) получим следующее асимптотическое представление

$$x(t,\varepsilon)=\frac{x^0}{\exp\frac{-F(t)}{\varepsilon}-x^0O(\varepsilon)\exp\frac{-F(t)}{\varepsilon}-x^0\frac{b(t)}{a(t)}+x^0\frac{b(T_1)}{a(T_1)}\exp\frac{-F(t)}{\varepsilon}+O(\varepsilon)}$$

Отсюда для $T_1 << t \le T$ при $\varepsilon\to 0$ имеем

$$x(t,\varepsilon)\to-\frac{a(t)}{b(t)} \tag{13}$$

Предельные соотношения (9) и (13) определяют: интервал $[t_0,T_1)$ является интервалом притяжения решения $\xi_1(t)\equiv 0$,а интервал $(T_1,T]$- интервалом притяжения решения $\xi_2(t)=-\frac{a(t)}{b(t)}$.

Подведя итог можем сказать: в одних случаях существуют интервалы притяжения только для одного решения вырожденного уравнения, а в других случаях существуют интервалы притяжения для каждого решения.

Приведем примеры для рассматриваемых случаев

Пример 1.Пусть $a(t)\equiv -1$, а $b(t)$ произвольная функция удовлетворяющая условию U1; $-1\le t\le 1$. Выполняются условия U1- U2.

Для этого случая решение задачи (1)-(2) можно представить в виде

$$x(t,\varepsilon)=\frac{\varepsilon x^0\exp\frac{-(1+t)}{\varepsilon}}{\varepsilon-x^0\int\limits_{-1}^{t}\exp\frac{-(1+\tau)}{\varepsilon}b(\tau)d\tau}$$

Отсюда для $-1\le t\le 1$ при $\varepsilon\to 0$ получим

$x(t,\varepsilon)\to 0$ т. е (-1,1)- интервал притяжения решения $\xi_1(t)\equiv 0$.

Пример 2. $a(t)=2t$, а $b(t)\in C^2[-1,2]$ и $\forall t\in[-1,2]\ (b(t)\neq 0)$.

Нетрудно проверить выполнимость условий U1- U3.

Действительно $a'(t)=2>0$.

$a(t)<0$ при $-1\le t<0$; $a(0)=0$; $a(t)>0$ при $0<t\le 2$.

$F(t)=2\int\limits_{-1}^{t}\tau d\tau=t^2-1$ и $F(1)=0$, $0<1<2$.

Повторяя вычисления проведенные для II получим: (-1,1)- интервал является интервалом притяжения решения $\xi_1(t)\equiv 0$, а (-1,2] – интервалом притяжения решения $\xi_2(t)=-\frac{a(t)}{b(t)}$.

Список использованной литературы:

1. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений содержащих малые параметры при производных [Текст]/А.Н. Тихонов//мат.сб.1952.-т.31(73),№3.-575-586.
2. Алыбаев К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости //Вестник КГНУ. – Серия 3, Выпуск 6. – Бишкек, 2001. – С. 190-200.