

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТРАНСФОРМАТОРОВ  
С УЧЕТОМ КОНФИГУРАЦИИ МАГНИТНОЙ СИСТЕМЫ**

*Асан уулу Аскат, магистр, КГТУ им. И. Раззакова, Кыргызстан, 720044, г.Бишкек, пр. Ч.Айтматова 66. Тел: 0312-54-51-49, e-mail: [asanaskat@gmail.com](mailto:asanaskat@gmail.com) orcid.org/0000-0003-4391-4139*

*Конушбаева Динара Токтобековна, преп., КГТУ им. И.Раззакова, Кыргызстан, 720044, г.Бишкек, пр. Мира 66. Тел: 0312-54-51-4, e-mail: [orcid.org/0000-0002-2164-7853](https://orcid.org/0000-0002-2164-7853)*

*Архипов Анатолий Сергеевич, магистр, КГТУ им. И. Раззакова, Кыргызстан, 720044, г.Бишкек, пр. Ч. Айтматова 66. Тел: 0312-54-51-49, e-mail: [arxipov\\_anatolii@mail.ru](mailto:arxipov_anatolii@mail.ru) orcid.org/0000-0002-3629-1319*

**Аннотация.** Представлен математическая модель трех однофазных трансформаторов включенных как один трехфазный трансформатор без гальванической связи. Насыщение магнитной системы представлено с учетом кривых намагничивания и их аналитической аппроксимации. Приведены различные варианты получения дифференциальных уравнений, для токов и напряжения, а также исследовано магнитный поток в стержне однофазного и трехфазного двухобмоточного трансформатора. Данные для нелинейных собственных и взаимоиנדуктивностей обмоток получены на основе анализа магнитных и электрических цепей переменного тока. Получены экспериментальные данные опытов короткого замыкания трех однофазных трансформаторов включенных как один трехфазный трансформатор.

**Ключевые слова:** математическая модель, трансформатор, схема замещения, кривая намагничивания, аналитическая аппроксимация, короткое замыкание, холостой ход.

### MATHEMATICAL MODELS OF TRANSFORMERS CONSIDERING THE MAGNETIC SYSTEM CONFIGURATION

*Askat Asan uulu, master student, Kyrgyzstan, 720044, c.Bishkek, KSTU named after I.Razzakov. Phone: 0312-54-51-49, e-mail: [asanaskat@gmail.com](mailto:asanaskat@gmail.com) orcid.org/0000-0003-4391-4139*

*Konushbaeva Dinara Toktobekovna, teacher, KSTU them. I.Razzakova, Kyrgyzstan, 720044, Bishkek, Mira Ave. 66. Tel: 0312-54-51-4, e-mail: [orcid.org/0000-0002-2164-7853](mailto:orcid.org/0000-0002-2164-7853)*

*Arkhipov Anatoly Sergeevich, master student, KSTU them. I. Razzakova, Kyrgyzstan, 720044, Bishkek, Aytmatov Avenue 66. Tel: 0312-54-51-49, e-mail: [arxipov\\_anatolii@mail.ru](mailto:arxipov_anatolii@mail.ru) orcid.org/0000-0002-3629-1319*

**Annotation.** A mathematical model of three single-phase transformers is included as one three-phase transformer without galvanic coupling. Saturation of the magnetic system is presented taking into account the magnetization curves and their analytical approximation. Various variants of deriving differential equations for currents and voltages are given, and also the magnetic flux in the rod of a single-phase and three-phase two-winding transformer is investigated. Data for nonlinear intrinsic and mutual inductances of windings are obtained on the basis of analysis of magnetic and electric circuits of alternating current. Experimental data of short-circuit tests of three single-phase transformers included as one three-phase transformer are obtained.

**Key words:** mathematical model, transformer, replacement circuit, magnetization curve, analytical approximation, short circuit, idling.

Анализ трансформатора обычно производится с использованием схем замещения, которые разрабатываются на основе математических моделей. Эти модели отражают протекание процессов в элементах оборудования с учётом физических особенностей и конфигурации магнитной системы трансформатора. Особую важность имеют трансформаторы, соединяющие отдельные части схем посредством электромагнитного взаимодействия без гальванического соединения которые могут состоят из отдельных однофазных трансформаторов, включенных как один трехфазный. Близко расположенные обмотки трансформатора связываются основными и дополнительными магнитными потоками в стержнях трансформатора и потоками рассеяния. В отдельных режимах магнитопроводы могут сильно насыщаться, из-за чего увеличиваются намагничивающие составляющие обмоток, изменяя их величину и форму тока.

В заводских данных на трансформаторы приводятся номинальные токи и напряжения обмоток, КПД, схемы соединения обмоток, габаритные размеры и масса. Даются результаты опытов ХХ и КЗ. Для получения дополнительной информации приходится обращаться к заводским материалам и специальной справочной литературе. Полные данные по

материалам и конструкции обмоток и магнитопроводов практически нету. Так что разработка математических описаний и схем замещения трансформаторов выполняется с учётом ограниченного объёма данных.

Общее решение к разработке схем замещения трансформаторов можно представить на примере однофазного двухобмоточного трансформатора. Принцип подхода не изменится при переходе к трехфазным и трехобмоточным трансформаторам и схемам, содержащим несколько элементов электроэнергетической системы. Процесс передачи энергии трансформатором в случае представляется на основе применения уравнений электрического равновесия напряжений обмоток, сформированных на основе законов электромагнитной индукции, и уравнения намагничивания магнитопровода на основе закона полного тока:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{d\psi_1}{dt} + i_1 r_1, \\ u_2 &= \frac{d\psi_2}{dt} + i_2 r_2, \\ hl &= i_1 w_1 + i_2 w_2, \end{aligned} \right\}$$

(1)

где  $\psi_1, \psi_2, i_1, i_2, r_1, r_2$  - потокосцепления, токи, активные сопротивления и числа витков обмоток,  $h$  - напряжённость в равномерно распределённом основном потоке намагничивания;  $l$  - длина средней силовой линии обмотки магнитопровода.

Значение и фигура токов обмоток существенно изменяются при насыщении самого магнитопровода трансформатора, которое проявляется как нелинейная функция индукции от напряжённости магнитного поля (кривая намагничивания). Она получается из данных опыта ХХ и может представляться разными способами. Хороший результат дает применение аналитической аппроксимации, например, с помощью гиперболической функции:

$$h = \alpha \sinh(\beta b) = \frac{\alpha (\exp(\beta b) - \exp(-\beta b))}{2} \quad (2)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  - коэффициенты аппроксимации самой кривой намагничивания. Можно отметить, что уменьшением  $\alpha$  можно достичь более резкого колена у формируемой линии, а уменьшением можно приподнять эту кривую в область достаточно больших чисел.

Например, коэффициенты  $\alpha = 20$  А/м и  $\beta = 2.5$  1/Тл определены для однофазного трансформатора с параметрами:  $l = 0,6$  м;  $S = 0,002$  м<sup>2</sup>;  $\omega_1 = 360$ ;  $\omega_2 = 170$ ;  $L_1 = 0,0015$  Гн;  $L_2 = 0,000365$  Гн;  $R_1 = 1$  Ом;  $R_2 = 3,6$  Ом. Они обеспечивают практически приемлемое представление его кривой намагничивания (рис. 1).

Применение аппроксимации кривой намагничивания однофазного двухобмоточного трансформатора, можно вывести на основании дифференциальных уравнений независимых токов обмоток либо индукции и одного из токов. Так, ток первичной индукции выражается через индукцию и ток вторичной обмотки с использованием третьего уравнения. При подключённом к зажимам первичной обмотки источнике синусоидальной ЭДС получается уравнение относительно напряжения и на зажимах вторичной обмотки:

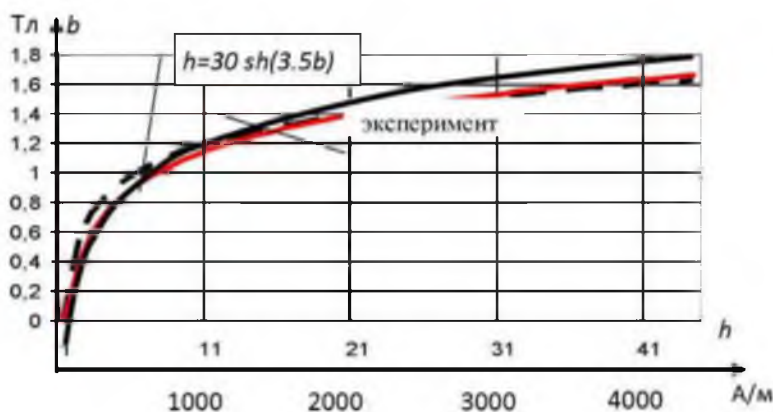


Рис. 1. Аппроксимация кривой намагничивания однофазного трансформатора гиперболическим синусом

$$\begin{bmatrix} w_1 S + \frac{L_1 l \alpha \beta}{w_1} \cosh(\beta b) & -\frac{L_2 w_2}{w_1} \\ w_2 S & L_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} b \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_m \sin(\omega t) - \frac{R_1 l \alpha}{w_1} \sinh(\beta b) + \frac{R_1 w_2}{w_1} i_2 \\ u_2 - R_2 \cdot i_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

где учтено выражение тока первичной обмотки:

$$i_1 = \frac{l}{w_1} \alpha \cdot \sinh(\beta \cdot b) - \frac{w_2}{w_1} i_2 \quad (4)$$

При условии подключения уравнений электрического равновесия внешних цепей дифференциальное уравнение электромагнитных процессов в рассматриваемом однофазном трансформаторе, становится разрешимым. Этому уравнению соответствует схема замещения (рис. 2) с индуктивностями, учитывающими степень насыщения магнитопровода по линии намагничивания.

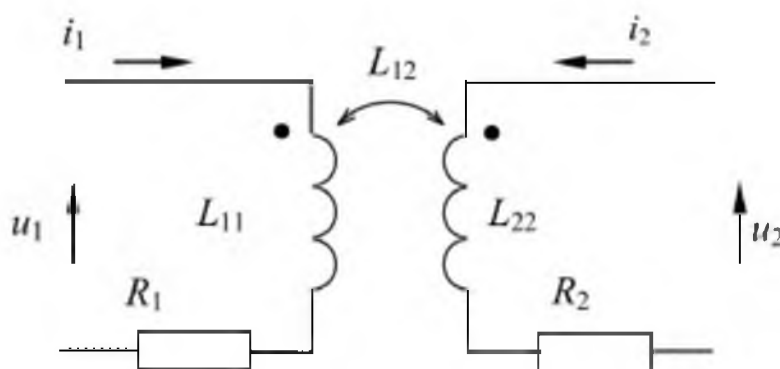
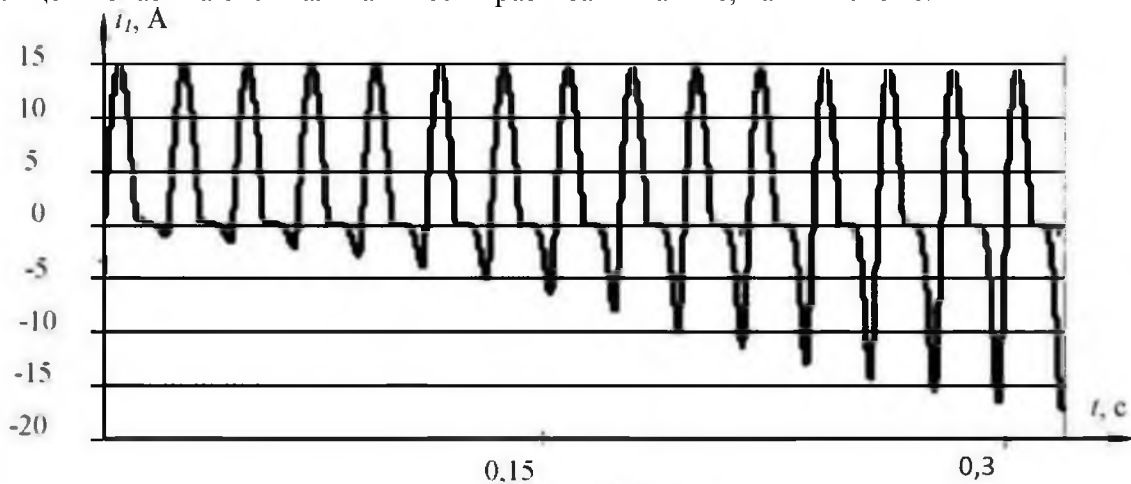


Рис. 2. Схема замещения двухобмоточного однофазного трансформатора

Параметры схемы замещения (рис. 2) определяются выражениями соответствующих матриц в и, в том числе с помощью этого уравнения:

$$L_{11} = L_1 + \frac{w_1^2 S}{\beta \alpha l \cosh(\beta b)}, L_{12} = \frac{w_1 w_2 S}{\beta \alpha l \cosh(\beta b)}, L_{22} = L_2 + \frac{w_2^2 S}{\beta \alpha l \cosh(\beta b)} \quad (5)$$

Схема рис. 3 легко встраивается в общую схему замещения трансформатора. К её зажимам могут подключаться любые элементы электрических цепей. Первичные и вторичная цепи оказываются гальванически развязаны так же, как и в схеме.



**Рис. 3. Диаграмма первичного тока при включении однополупериодного выпрямления**

Практический интерес имеет представление наиболее распространённых трёхфазных трансформаторов. Рассмотрим в качестве примера широко применяемый трёхфазный стержневой трансформатор с соединением обмоток “Y-Y“, у которого уравнения электрического равновесия фазных обмоток имеют вид

$$U_1 = W_1 \frac{d\Phi}{dt} + L_{1\sigma} \frac{dI_1}{dt} + R_{1e} I_1,$$

$$U_2 = W_2 \frac{d\Phi}{dt} + L_{2\sigma} \frac{dI_2}{dt} + R_{2e} I_2$$

где

$$U_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{bmatrix}, U_2 = \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \end{bmatrix}, I_1 = \begin{bmatrix} i_{11} \\ i_{12} \\ i_{13} \end{bmatrix}, I_2 = \begin{bmatrix} i_{21} \\ i_{22} \\ i_{23} \end{bmatrix}, \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix}, W_1 = \begin{bmatrix} w_{11} & 0 & 0 \\ 0 & w_{12} & 0 \\ 0 & 0 & w_{13} \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} w_{21} & 0 & 0 \\ 0 & w_{22} & 0 \\ 0 & 0 & w_{23} \end{bmatrix},$$

При обозначении векторов и матриц первый индекс соответствует стороне трансформатора (первичная, вторичная), а второй - фазе или стержню. Влияние магнитных полей рассеяния учитывается как и в предыдущем случае однофазного трансформатора: индуктивности короткого замыкания делятся между первичной и вторичной обмоткой с учётом коэффициента трансформации.

Уравнению трансформатора соответствует схема замещения, представленная на рис.4. Параметры на приведённой схеме определяются дифференциальным уравнением магнитной проницаемостью материала и геометрическими размерами стержней, числами витков обмоток и данными опыта КЗ обмоток трансформатора. Во многих переходных и аварийных режимах работы стержни магнитопровода трансформатора насыщаются и магнитные проницаемости, а соответственно и матрицы индуктивностей в отдельный момент времени следует считать зависящими от магнитного состояния каждого из стержней. Это состояние определяется либо напряжённостью, либо индукцией в стержне. При условии пренебрежения гистерезисом одна из этих величин однозначно выражается через другую.

Особенностью схемы замещения трёхфазного трансформатора (рис. 4) является возможность её применения для анализа силовых схем с гальванически не связанными

частями - подсхемами. При совместном рассмотрении подсхем удаётся осуществлять расчёт сложной многоконтурной схемы без приведения токов и напряжений силовых цепей к одному общему уровню.

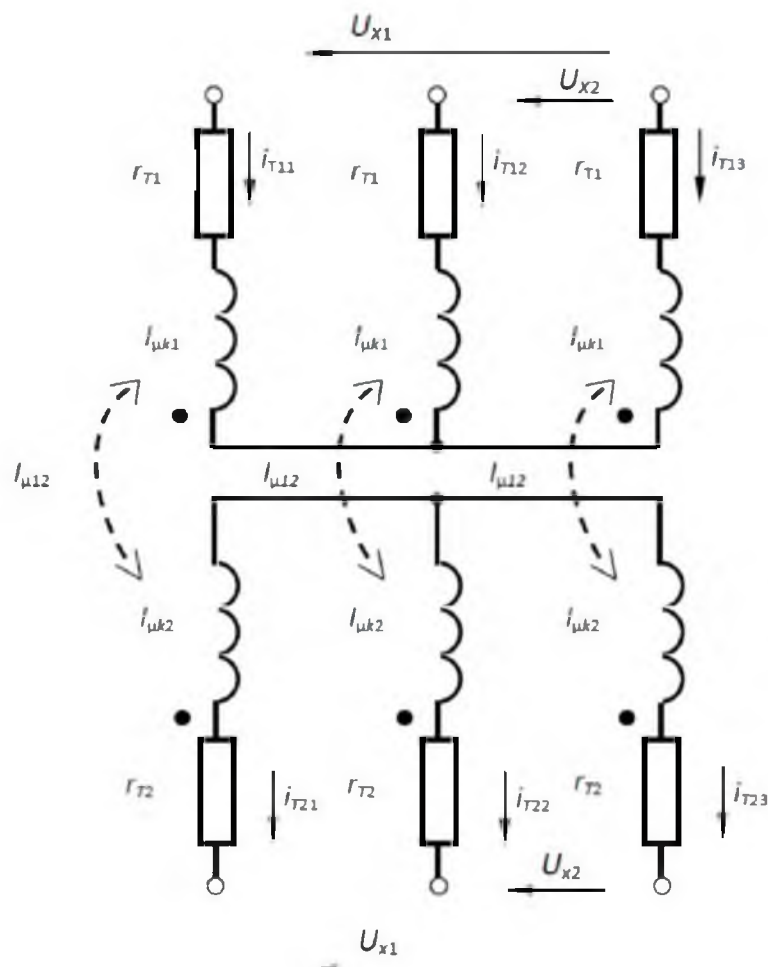


Рис. 4. Схема замещения трёхфазного стержневого трансформатора

В некоторых случаях не возникает необходимости в детальном анализе процессов на одной из сторон силового трансформатора. Тогда удобно исключить из рассмотрения эту сторону с соответствующим эквивалентным изменением структуры и параметров остающейся стороны. Осложнения возникают при анализе схем с многообмоточными трансформаторами, когда приходится учитывать распределение влияния исключаемых цепей на остающиеся цепи.

Дальнейшем исследуем переходной процесс в стенде СиПС-СК.

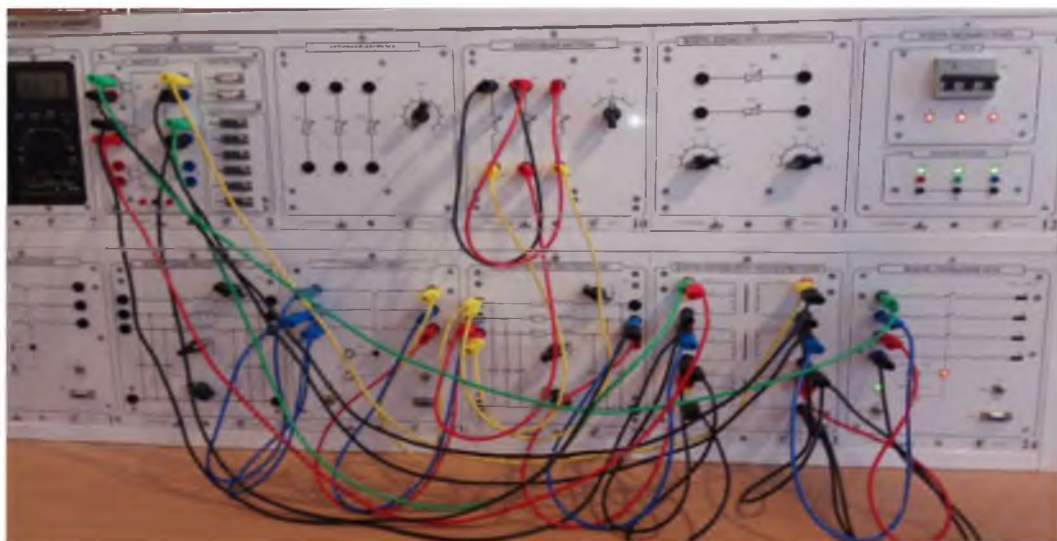




**Рис.5. Общий вид стенда**

Лабораторный стенд представляет собой физическую трехфазную модель электроэнергетической системы, содержащую, как в любой энергосистеме, три основные части: генерирующую электроэнергию, передающую и потребляющую.

В стенде имеется три однофазных двухобмоточных трансформатора. Дальнейшем собираем схему для получения данных переходных процессов в трансформаторе. Получения осциллограмм осуществляется с помощью модуля ввода-вывода. Программное обеспечение позволяет обработать аналоговые сигналы и вывести их на дисплей.



**Рис.6. Физическая модель трансформатора.**

Результаты эксперимента:

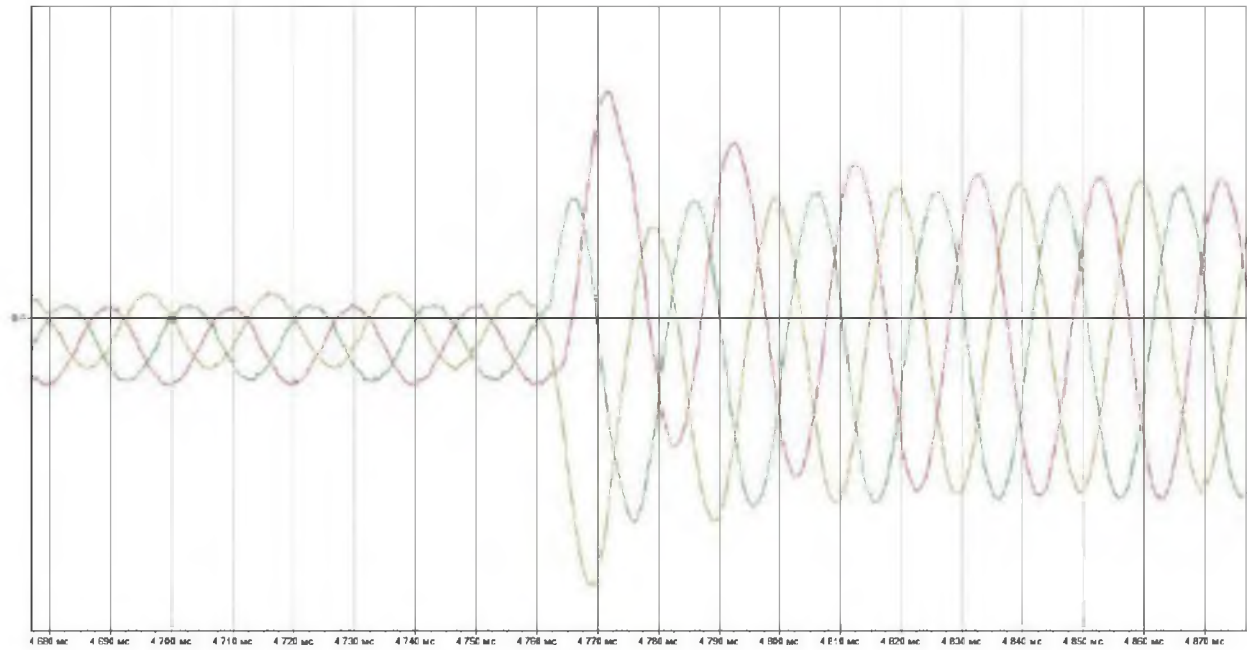


Рис.7. Осциллограмма токов короткого замыкания трехфазного трансформатора

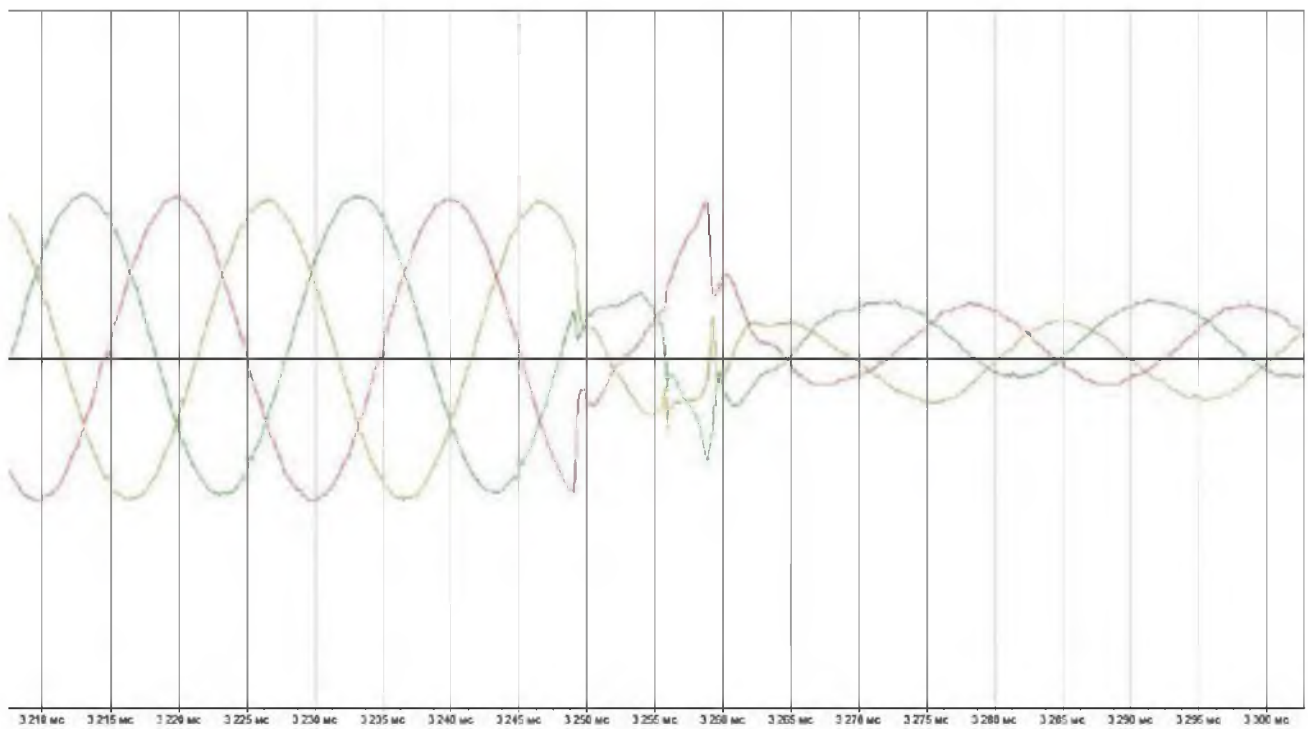


Рис.8. Осциллограмма напряжений короткого замыкания трехфазного трансформатора



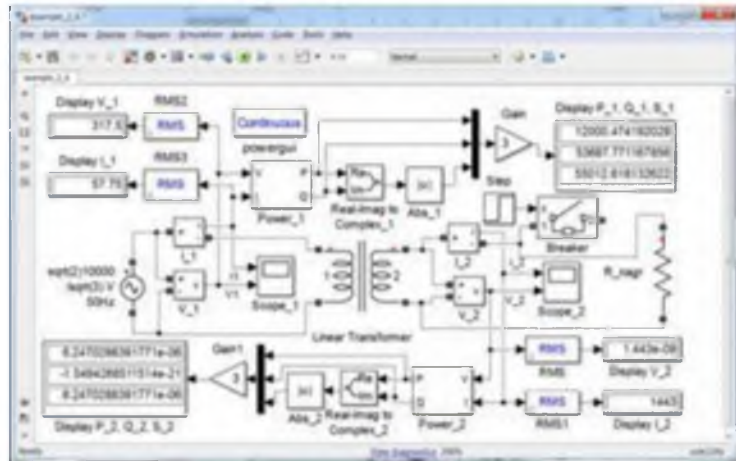


Рис.9. математическая модель трехфазного трансформатора в режиме КЗ.

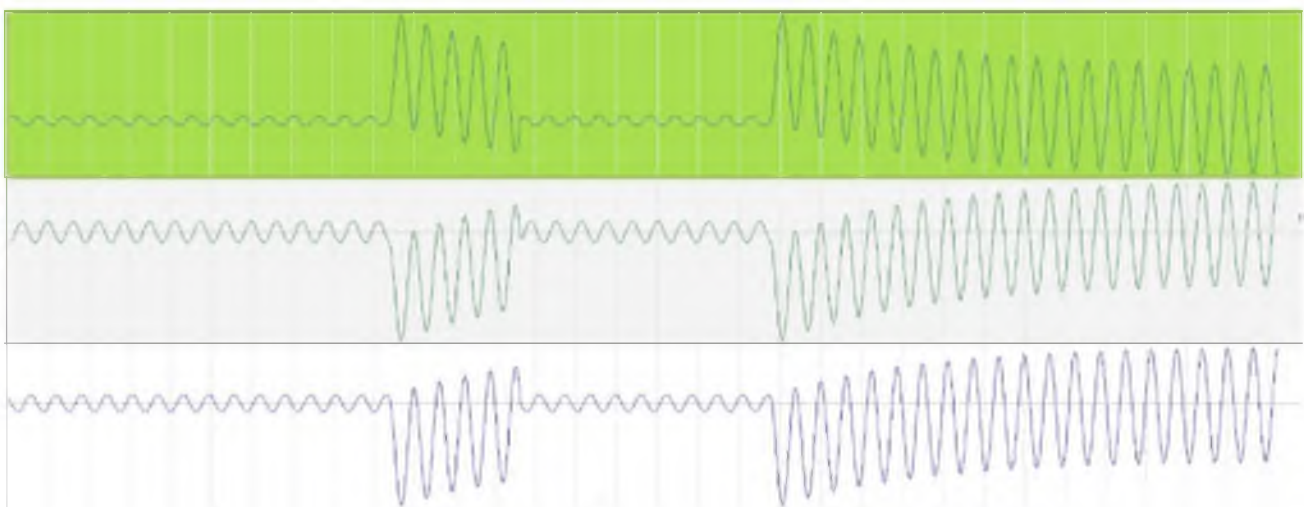


Рис. 10. Осциллограммы токов КЗ полученные при моделировании трансформатора в режиме КЗ.

#### Список литературы

1. А.И. Байков. Математические модели трансформаторов при анализе силовой части электроприводов/ Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева № 5(102), 2013 г.-316-327 с.
2. Лейтес, Л.В. Схемы замещения многообмоточных трансформаторов / Л.В. Лейтес, А.М. Пин- цов. - М.: Энергия, 1974.
3. Основы теории цепей: учебник для вузов / Г.В. Зевеке, П.А.Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов. - 5-е изд. перераб. - М.: Энергоатомиздат, 1989. - 528 с.
4. Таабалдиева Н.Д., Асан уулу Аскат. Моделирование линий электропередач с помощью лабораторного стенда «электрические станции и подстанции» / Известия КГТУ №1(41) часть I, 2017 г. 63-68 с.
5. Техническое описание СиПС- СК
6. Быстрицкий Г.Ф. Основы энергетики : учебник / Г.Ф. Быстрицкий. —3-еизд., стер. — М. : КНОРУС, 2012. — 352 с.
7. Веников В.А. Физическое моделирование электрических систем: учеб.пособие / Веников В.А, Иванов-Смоленский А.В. - М.: Госэнергоиздат, 1956. 256с.
8. Лыкин А.В. Электрические системы и сети: учеб. пособие / А.В. Лыкин. – М.: Университетская книга; Логос, 2008. – 254 с.