

## РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОГИБА НЕЖЕСТКОГО ВАЛА В ПРОЦЕССЕ РЕЗАНИЯ

*Шакенова Жамила Наурызбаевна, аспирант, КГТУ им. И. Раззакова, Кыргызстан, 720044, г. Бишкек, пр. Мира 66. Тел.: 0312-49-15-84, e-mail: [milya\\_scorpion@mail.ru](mailto:milya_scorpion@mail.ru)*

*Муслимов Аннас Поясович, д.т.н., профессор, КГТУ им. И. Раззакова, Кыргызстан, 720044, г. Бишкек, пр. Мира 66. Тел.: 0312-49-15-84.*

**Аннотация.** Представлена схема крепления нежесткого вала в виде балки на двух опорах. Определены реакции в опорах и изгибающие моменты в сечениях  $Z_1$  и  $Z_2$ . Выведено общее математическое уравнение прогиба нежесткого вала от действия силы резания.

**Ключевые слова:** нежесткий вал, токарный станок, патрон, задняя бабка, сила резания, модуль упругости.

## DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL MODEL OF BENDING OF NON-RIGID SHAFT IN THE PROCESS OF CUTTING

*Shakenova Zhamila Nauryzbaevna, graduate student, Kyrgyzstan, 720044, c.Bishkek, KSTU named after I. Razzakov. Phone: 0312-49-15-84, e-mail: [milya\\_scorpion@mail.ru](mailto:milya_scorpion@mail.ru)*

*Muslimov Annas Poyasovich, doctor of technical Sciences, Professor, Kyrgyzstan, 720044, c.Bishkek, KSTU named after I. Razzakov. Phone: 0312-49-15-84.*

**Abstract.** The scheme of fastening of a non-rigid shaft is presented in the form of a beam with two supports. The reactions in the supports and flexion moments were determined in the sections of  $Z_1$  and  $Z_2$ . The general mathematical equation of the deflection of non-rigid shaft from the action of cutting forces was received.

**Keywords:** non-rigid shaft, turning machine, cartridge, tailstock, cutting force, the modulus of elasticity.

**Введение.** Известно, что машиностроение используется практически во всех сферах человеческой деятельности, благодаря его эффективности оно превратилось в технологическую базу всех отраслей промышленности, определяющую уровень технического развития страны и ее безопасности. Непрерывно растущие потребности общества порождают рост разнообразия машиностроительных изделий, их назначения. Необходимость выпуска конкурентно-способной продукции усиливает эту тенденцию и требует непрерывного совершенствования технологических процессов и средств технологического оснащения.

Качество и точность изделий машиностроения во многом зависит от совокупности свойств конструкций изделия (прочность, жесткость, износостойкость, виброустойчивость и т.д.). Повышение точности исходных заготовок снижает трудоемкость в процессе механообработки, уменьшает размеры припусков на обработку деталей и приводит к экономии металла.

Среди разнообразных изделий машиностроения, обрабатываемых на металлорежущих станках, значительное место занимают детали, которые при заданной геометрической форме и размерах являются нежесткими. В числе нежестких деталей широко распространены нежесткие валы. К нежестким валам относятся такие валы, у которых длина в 10-12 раз превышает их диаметра, т.е.  $\frac{L}{d} > 10 \div 12$  [2,4,5].

В процессе обработки нежестких валов возникают трудности, которые связаны с нежесткостью заготовки и требуют специальной оснастки, выбора не производительных режимов резания для уменьшения влияния упругих деформаций на точность токарной обработки. Токарная обработка нежестких валов является наиболее трудоемкой операцией.

**Цель работы.** Разработка математической модели, определяющая зависимость величины деформации (прогиба вала) от действия силы резания, каждая в дальнейшем будет использована для повышения точности изготовления детали.

**Основная часть.** Для решения поставленной задачи закрепим заготовку вала на токарный станок 16К20. Левый конец заготовки закрепляется в патроне станка, а правый зажимается задней бабкой. В процессе точения резец Т15К6 под действием подачи  $S$  перемещается вдоль длины заготовки  $L$ , и в каждой фиксированной точке будет оказывать давление на заготовку. Необходимо описать математическим выражением зависимость прогиба заготовки от постоянно перемещающейся вдоль заготовки.

На рисунке 1 представлена схема прогиба заготовки нежесткого вала от действия силы резания  $P_y$ .

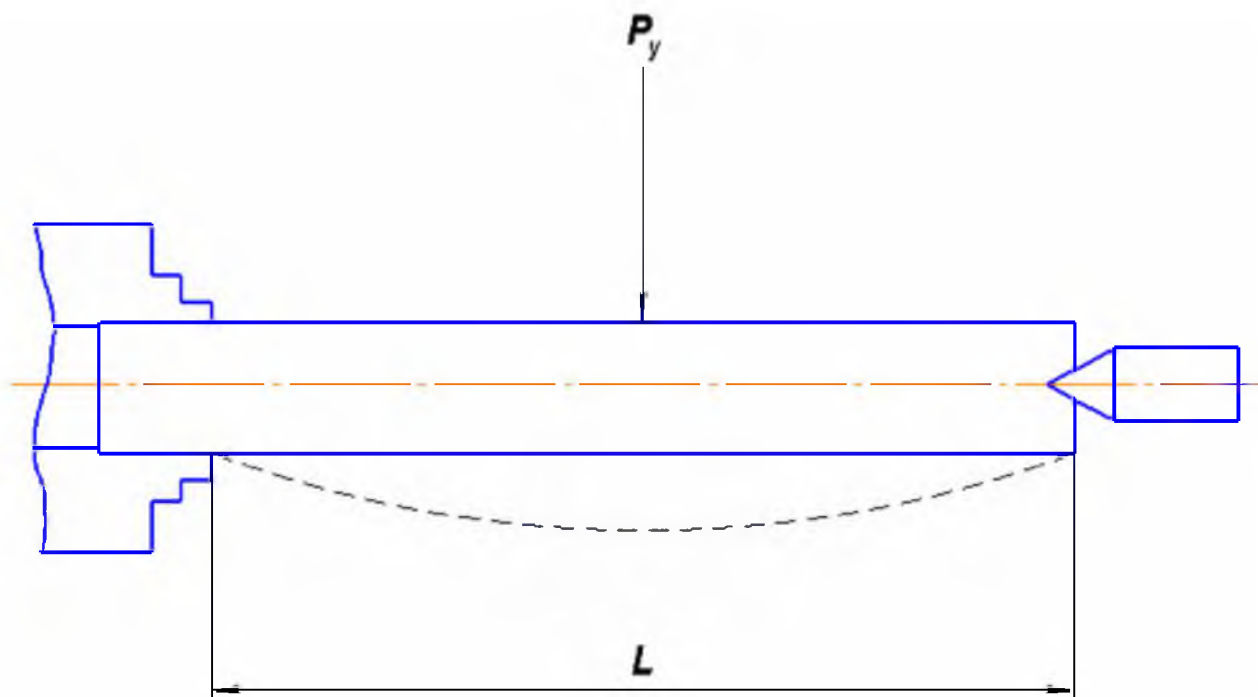


Рисунок 1 – Прогиб нежесткого вала от действия силы резания

Чтобы получить зависимость величины прогиба нежесткого вала от силы резания, схематизируем систему, как показано на рисунке 2 [1,3,6]. В патроне, в котором закреплена левая часть заготовки, показано жесткое крепление, а правая часть заготовки поддерживается задней бабкой и имеет значительно меньшую жесткость.

Для определения прогиба под действием радиальной составляющей силы резания  $P_y$  представим нежесткий вал как балку на двух опорах. Считаем, что жесткость обрабатываемой детали по всей длине является одинаковой.

1. Определим реакции на опорах А и В.

$$\text{Реактивные силы равны } R_A = R_B = \frac{P_y}{2}; \quad Z_1 = Z_2 = \frac{l}{2}.$$

2. Находим значение изгибающего момента в сечении  $Z_1$ ;  $0 \leq Z_1 \leq \frac{l}{2}$ ;

$$M_1(Z_1) = \frac{P_y}{2} \cdot Z_1$$

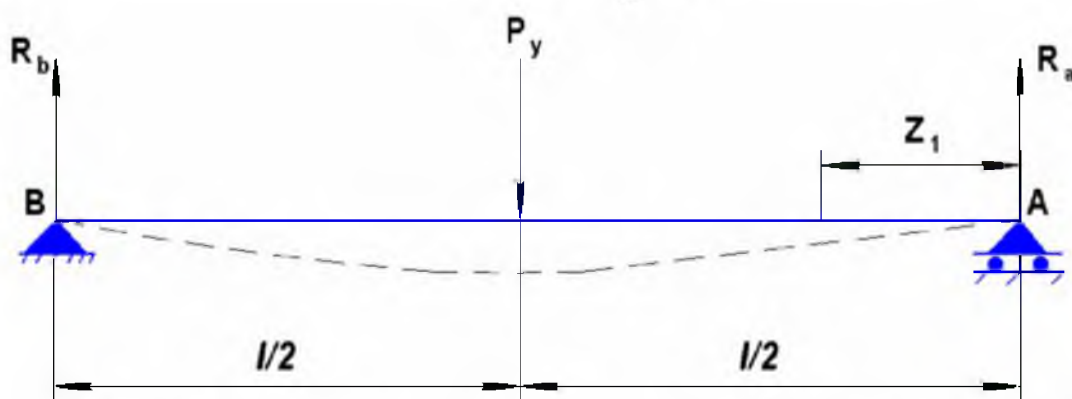


Рисунок 2 – Расчетная схема для вывода уравнения в интервале  $0 \leq Z_1 \leq \frac{l}{2}$

Уравнение изогнутой оси примет вид:

$$EJ \frac{d^2 y}{dZ_1^2} = M_1(Z_1), \quad (1)$$

где  $E$  – модуль упругости материала вала;

$J$  – осевой момент инерции сечения вала.

Считаем, что величина  $EJ$  задана и постоянная, т.е.  $EJ = const$ ,  $y$  – прогиб вала.

Решаем уравнение (1). Проинтегрируем один раз:

$$EJ \frac{dy}{dZ_1} = \int M_1(Z_1) dZ_1 = \frac{P_y}{4} \cdot Z_1^2 + C_1,$$

где  $C_1$  – постоянная интегрирования.

Таким образом, имеем:

$$EJ_1 \frac{dy}{dZ_1} = \frac{P_y}{4} \cdot Z_1^2 + C_1 \quad (2)$$

В уравнении (2)  $\frac{dy}{dZ_1}$  – угол поворота сечения вала.

Интегрируем уравнение (2) еще один раз и находим уравнение прогиба вала, т.е.  $y_1(Z_1)$

$$EJy_1(Z_1) = \frac{P_y}{12} \cdot Z_1^3 + C_1 Z_1 + D_1, \quad (3)$$

где  $D_1$  – постоянная интегрирования.

Вывод уравнения для интервала  $0 \leq Z_2 \leq l$  определяется по расчетной схеме (рис.3).

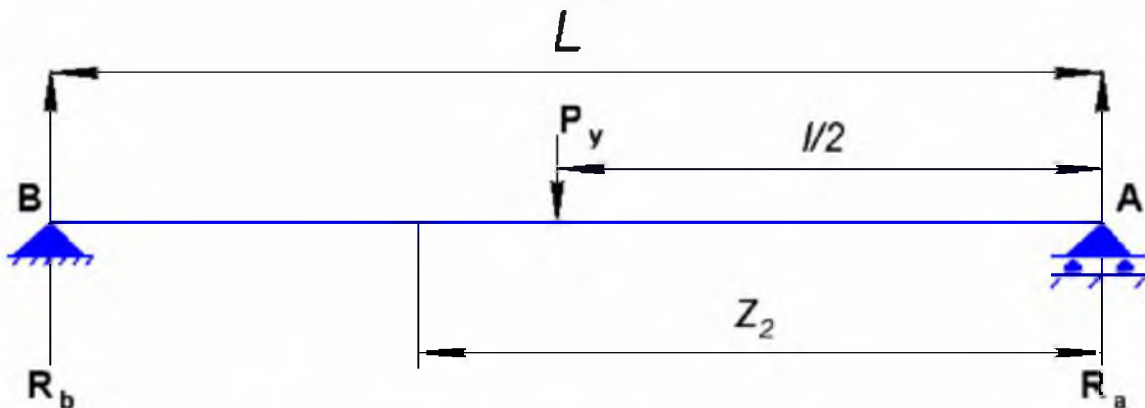


Рисунок 3 – Расчетная схема для вывода уравнения в интервале  $\frac{l}{2} \leq Z_2 \leq l$

1. Находим значение изгибающего момента в сечении  $Z_2$

$$M_2(Z_2) = R_a \cdot Z_2 - P_y \left( Z_2 - \frac{l}{2} \right). \quad (4)$$

2. Уравнение изогнутой оси примет вид

$$EJy_2''(Z_2) = M_2(Z_2) \quad (5)$$

Проинтегрируем уравнение (5)

$$EJ_2 \frac{dy}{dZ_2} = \int M_2(Z_2) dZ_2 = \frac{P_y}{4} \cdot Z_2^2 - P_y \frac{\left( Z_2 - \frac{l}{2} \right)^2}{2} + C_2. \quad (6)$$

Далее проведем повторное интегрирование уравнения (6)

$$EJy_2(Z_2) = \frac{P_y}{12} \cdot Z_2^3 - P_y \cdot \frac{\left(Z_2 - \frac{l}{2}\right)^3}{6} + C_2 Z_2 + D_2, \quad (7)$$

где в уравнениях (6) и (7)  $C_2$  и  $D_2$  – постоянные интегрирования.

Для нахождения  $C_1, C_2$  составим следующее выражение:

$$EJ_1 \frac{dy}{dZ_1} = EJ_2 \frac{dy}{dZ_2} \Rightarrow$$

$$\frac{P_y}{4} \cdot Z_1^2 + C_1 = \frac{P_y}{4} \cdot Z_2^2 - P_y \cdot \frac{\left(Z_2 - \frac{l}{2}\right)^2}{2} + C_2 \quad (8)$$

При  $Z_1 = Z_2 = l/2$  определяем  $C_1$  и  $C_2$

$$\frac{P_y}{4} \cdot \frac{l^2}{4} + C_1 = \frac{P_y}{4} \cdot \frac{l^2}{4} - P_y \cdot \frac{\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\right)^2}{2} + C_2 \Rightarrow$$

$$\frac{P_y l^2}{16} - \frac{P_y l^2}{16} + C_1 = C_2 \Rightarrow C_1 = C_2.$$

Составим следующее выражение:

$$EJy_1(Z_1) = EJy_2(Z_2) \Rightarrow$$

$$\frac{P_y}{12} \cdot Z_1^3 + C_1 Z_1 + D_1 = \frac{P_y}{12} \cdot Z_2^3 - P_y \cdot \frac{\left(Z_2 - \frac{l}{2}\right)^3}{6} + C_2 Z_2 + D_2 \quad (10)$$

При  $Z_1 = Z_2 = l/2$  определяем  $D_1$  и  $D_2$

$$\frac{P_y}{12} \cdot Z_1^3 + C_1 Z_1 + D_1 = \frac{P_y}{12} \cdot Z_2^3 - P_y \cdot \frac{\left(Z_2 - \frac{l}{2}\right)^3}{6} + C_2 Z_2 + D_2 \Rightarrow$$

$$\frac{P_y}{12} \cdot \frac{l^3}{8} + C_1 \frac{l}{2} - \frac{P_y}{12} \cdot \frac{l^3}{8} - C_2 \cdot \frac{l}{2} + D_1 = D_2 \Rightarrow D_1 = D_2.$$

При  $Z_1 = 0$ , тогда  $y = 0$ .

$$\frac{P_y Z_1^3}{12} + C_1 Z_1 + D_1 = 0 \Rightarrow D_1 = D_2 = 0. \quad (12)$$

При  $Z_1 = l$ , тогда  $y = 0$ .

$$\frac{P_y Z_2^3}{12} - \frac{P_y \left(Z_2 - \frac{l}{2}\right)^3}{6} + C_2 Z_2 + D_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{P_y l^3}{12} - \frac{P_y l^3}{48} + C_2 \cdot l = 0 \Rightarrow \frac{3P_y l^3}{48} + C_2 l = 0 \Rightarrow$$

$$C_2 = C_1 = -\frac{P_y l^2}{16}.$$

Уравнение (3) для левой части вала при  $Z_1 = \frac{l}{2}$  будет:

$$\begin{aligned} \frac{P_y}{12} \cdot Z_1^3 - \frac{P_y l^2}{16} \cdot \frac{l}{2} + 0 &= E J y_1(Z_1) \\ -\frac{P_y l^3}{48} &= E J y_1\left(\frac{l}{2}\right), \Rightarrow y_1\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{P_y l^3}{48 E J}, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $y_1\left(\frac{l}{2}\right)$  – прогиб середины вала под действием радиальной составляющей силы резания. Знак «-» означает, что вал прогибается вниз.

Уравнение (7) для правой части вала при  $Z_2 = \frac{l}{2}$  примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{P_y}{12} \cdot Z_2^3 - \frac{P_y}{6} \cdot \left(Z_2 - \frac{l}{2}\right)^3 - \frac{P_y l^2}{16} \cdot Z_2 + 0 &= E J y_2(Z_2) \\ -\frac{P_y l^3}{48} &= E J y_2\left(\frac{l}{2}\right), \Rightarrow y_2\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{P_y l^3}{48 E J}. \end{aligned} \quad (15)$$

Получили то же значение прогиба, которое было получено в (14).

Правильность уравнения (7) можно проверить величиной прогиба при  $Z = \frac{l}{2}$ :  $y_2\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{P_y}{48 E J} \left( l^3 + 3l^3 - \frac{1}{2}l^3 - 9\frac{l^3}{2} \right) = -\frac{P_y l^3}{48 E J}$ , т.е. получили то же значение прогиба, которое было получено ранее (3).

**Выводы:** Таким образом, проведя математическое преобразование, общее уравнение прогиба нежесткого вала от действия силы резания будет:

$$y = \frac{P_y}{48 E J} \left[ 4Z^3 - 8\left(Z - \frac{l}{2}\right)^3 - 3l^2 Z \right] \quad (16)$$

Полученное математическое уравнение позволяет определить величину прогиб вала по всей длине заготовки в любой фиксированной точке в зависимости от радиальной составляющей силы резания  $P_y$  и, изменяя ее значение автоматически по длине обработки существенно повысить точность обработки.

### Список литературы

1. Александров А.В. Сопротивление материалов. Учебник для вузов/А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин; Под ред. А.В. Александрова. – 3 изд. испр. – М.: высшая школа, 2003. – 560 с.
2. Барановский М.А., Белькевич Б.А., Тимашков В.Д. Книга молодого токаря. – Мн.: «Беларусь», 1971. – 272 с.
3. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. Главная редакция физико-математической литературы изд-во «Наука», 1976. – 608 с.
4. Колев К.С. Технология машиностроения. Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1977. – 256 с.
5. Подпоркин В.Г. Обработка нежестких деталей. – М.: Л.: Машгиз, 1959. – 208 с.
6. Работнов Ю.Н. Сопротивление материалов. – М.: Физматгиз, 1962. – 456 с.