УДК: 373.851(575.2)(04)

Аалиева Б.А., Аскарбек кызы Лира
К.Карасаев атындагы БГУнун ага окутуучулары

ТОЛУК ЫКТЫМАЛДУУЛУКТУН ЖАНА БЕЙЕСТИН ФОРМУЛАЛАРЫН МАСЕЛЕ ЧЫГАРУУДА КОЛДОНУУ МЕТОДИКАСЫ

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФОРМУЛЫ ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И БЕЙЕСА

METHODOLOGY OF TEACHING WHILE SOLVING PROBLEMS WITH THE USE OF THE FORMULA OF THE COMPLETE PROBABILITY AND BAYES

Аннотация: *Бул макалада ыктымалдуулуктар теориясы жана математикалык статистика сабагы боюнча студенттердин маселе чыгарууда, толук ыктымалдуулуктун жана Бейестин формуласын колдонуу методикасын иликтейт. Жогорку окуу жайда ыктымалдуулуктар теориясы жана математикалык статистиканы окутуу методологиясынын айрым көйгөйлөрүн мүмкүн болгон чечүү жолдорун сунуштайт.*

Түйүндүү сөздөр: *толук ыктымалдуулуктун формуласы, Бейестин формуласы, методика, теорема, гипотеза, шарттуу ыктымалдуулук, окуя.*

Аннотация: *В настоящей статье исследуются методика преподавания при решении задач с использованием формулы полной вероятности и Бейеса. Предлагаются возможные пути решения некоторых проблем методики преподавания теория вероятности и математических статистике в вузе.*

Ключевые слова: *формула полнойвероятности, формула Бейеса, методика, теорема, гипотеза, условная вероятность, событие.*

Annotation: *In this paper, we study the teaching methodology for solving problems using the full probability formula and Bayes. Possible ways of solving some problems of the methodology of teaching probability theory and mathematical statistics in the university are suggested.*

Key words: *total probability formula, Bayes formula, technique, theorem, hypothesis, conditional probability, event.*

Бизге $B_1, B_2, ...B_n$ - биргелешпеген жана толук топту түзүүчү окуялар берилсин. A окуясы $B_1, B_2, ...B_n$ - окуяларынын биринин аткарылышынан келип чыгат. Мындай $B_1, B_2, ...B_n$ -окуялардын толук тобун гипотезалар (божомолдор) депатайбыз.

Бул гипотезалар дын ар биринин ыктымалдуулугу жана А окуясынын шарттуу ыктымалдуулуктары $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), \ldots, P_{B_n}(A)$ белгилуу болсо, анда A -окуясынын ыктымалдуулугун төмөнкү теореманын негизинде табууга болот.

Теорема: Толук топту түзгөн гипотезалардын биринин аткарылышынан келип чыккан A - окуясынын ыктымалдуулугу ал гипотезалардын ар биринин ыктымалдуулугун тиешелүү түрдө A - окуясынын шарттуу ыктымалдуулуктарына болгон көбөйтүндүлөрүнүн суммасына барабар, б.а.

$$\boldsymbol{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P\,(Bi) \cdot P_{Bi}(A); \sum_{i=1}^{n} P\,(Bi) = 1}$$

Бул формула толук ыктымалдуулуктун формуласы деп аталат.

Далилдөө: Теореманын шарты боюнча A -окуясы $B_1, B_2, \ldots, B_n$-гипотезаларынын биринин аткарылышынан келип чыгат. Демек, A -окуясы бирге аткарылбаган $B_1A, B_2A, \ldots B_nA$ -окуяларынын бирөөсүнүн аткарылышынан (алардын кайсынысы айырмасы жок) келип чыгат.

Анда: $A = B_1A + B_2A + \cdots + B_nA$

Кошуунун теоремасынын негизинде төмөнкүгө ээ болобуз:

$P(A) = P(B_1A) + P(B_2A) + \cdots + P(B_nA)$. Көбөйтүүнүн теоремасын (көз каранды окуялар үчүн) пайдаланып,

$P(B_1A) = P(B_1)P_{B_1}(A), \ldots P(B_nA) = P(B_n)P_{B_n}A$

$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(Bi)P_{Bi}(A)$ барабардыктарын табабыз. Анда теорема далилденди.

Мисалы:1)Эки топтон турган тетиктер берилген. 1-топтун тетигиги «стандарттуу» деген окуянын ыктымалдуулугу 0,8, ал эми 2-топтун тетиктери үчүн 0,9. Эки топтун биринен туш келди суурулуп алынган тетик стандарттуу экендигинин ыктымалдуулугун тапкыла.

Чыгару: Төмөнкүдөй белгилүүлөрдү киргизебиз. A -суурулган тетик стандарттуу. Тетикти 1чи же 2чи топтон сууруп алууга болот. B_1 окуясы-тетик биринчи топтон суурулган B_2 окуясы-тетик экинчи топтон суурулган. Бул гипотезалардын ыктымалдуулуктары: $P(B_1) = P(B_2) = 0{,}5$

A -окуясынын шарттуу ыктымалдуулуктары: $P_{B_1}(A) = 0{,}8; P_{B_2}(A) = 0{,}9$. Анда толук ыктымалдуулуктун формуласынын негизинде $P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 0{,}85$

2) Биринчи кутудагы 20 лампочканын 18-и стандарттуу, ал эми экинчи кутудагы 10 лампочканын 9-у стандарттуу. Экинчи кутудан туш келди бир лампочканы алып чыгып, биринчи кутуга салышат. Андан кийин биринчи кутудан бир лампочканы сууруп чыгышкан. Суурулуп алынган лампочка стандарттуу экендигинин ыктымалдуулугун тапкыла. Суурулган лампочка стандарттуу экендигин A - окуясы деп белгилейбиз. Экинчи кутудан стандарттуу лампочка суурулган - B_1 ₁ окуясы; экинчи кутудан стандарттуу эмес лампочка суурулган – B_2 окуясы.

Анда

$$P(B_1) = \frac{9}{10}\ , \ P(B_2) = \frac{1}{10}$$
$$P_{B_1}(A) = \frac{19}{21}; P_{B_2}(A) = \frac{18}{21}$$
$$P(A) = 0{,}9 \cdot \frac{19}{21} + 0{,}1 \cdot \frac{18}{21} = 0{,}9$$

Мисал: I урнада 7 ак жана 9 кара шар, II урнада 6 ак жана 4 кара шар болгон. I урнадан II урнага 2 шар салышты, анда кийин II урнада 1 шар алып чыкты. Алынган шардын ак болушунун ыктымалдуулугун тапкыла.

Биз үч байкоо жүргүзөбүз:

1) I урнадан 1- шарды алып жана II урнага салдык;
2) I урнадан 2- шарды алып жана II урнага салдык;
3) II урнадан бир шар алдык.

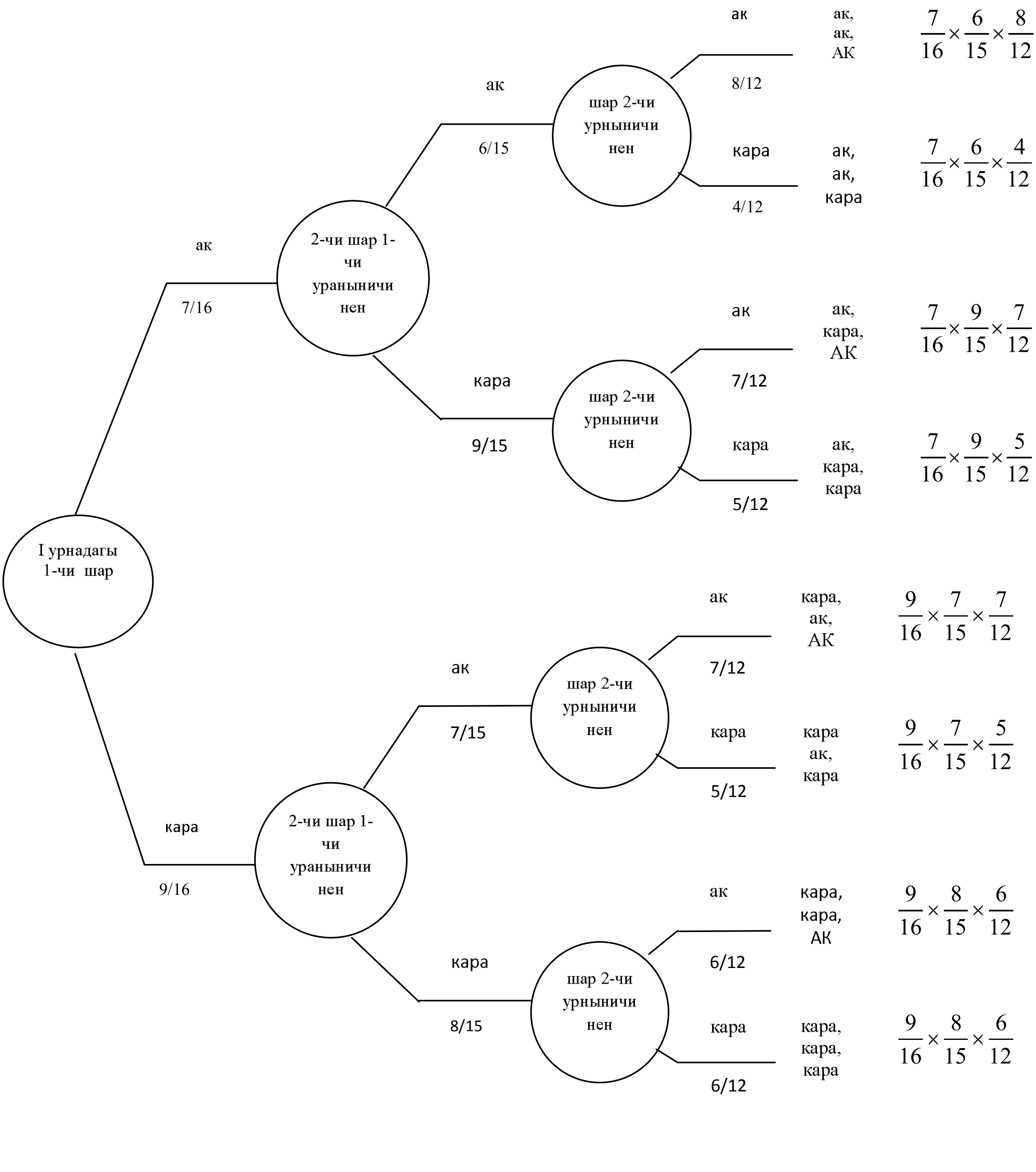
Ошондуктан дарак ыктымалдуулугу үч деңгээлдеги бийиктикти камтыйт: (схема -1)

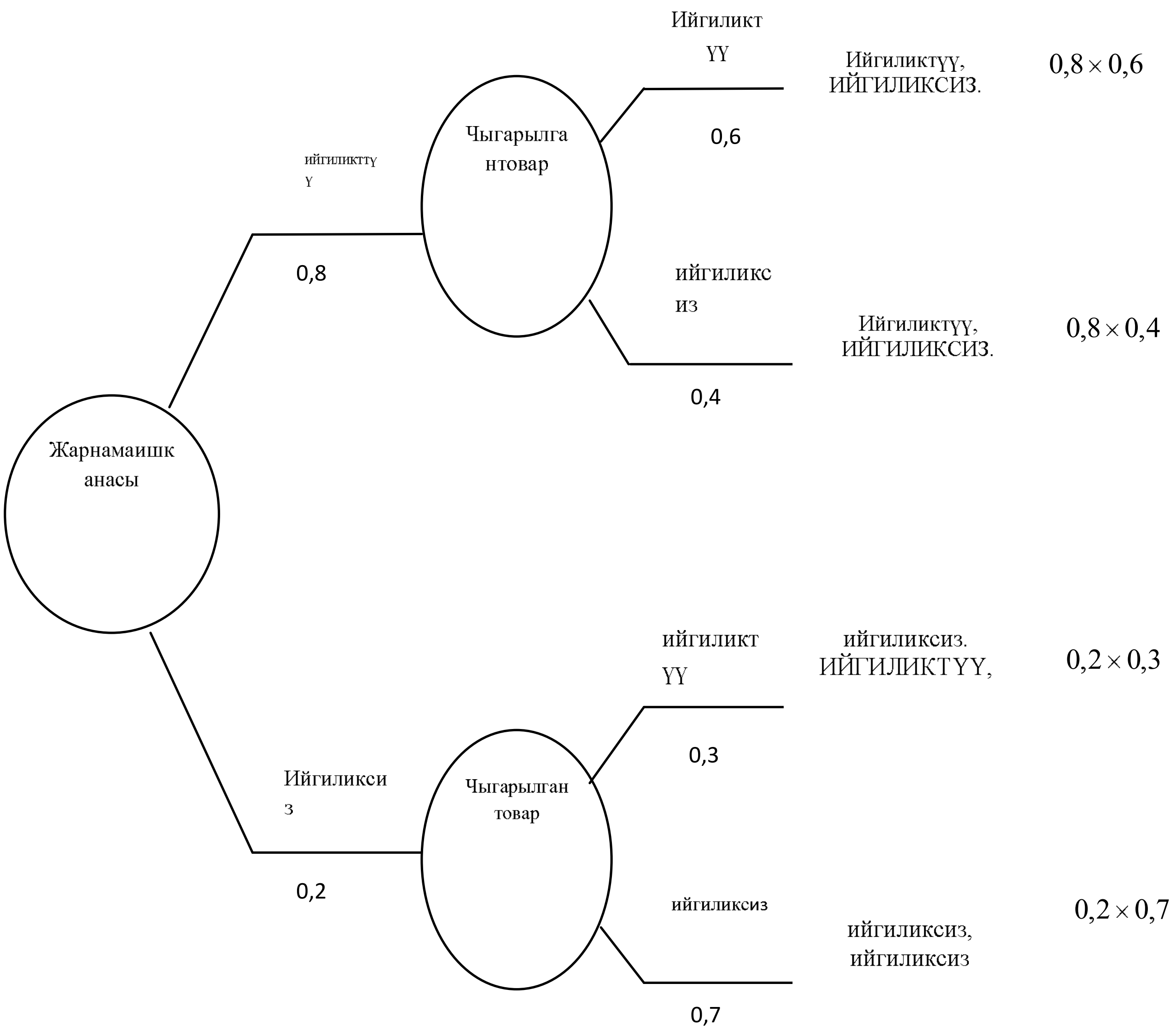
Мисал: Компания жаңы товарды рынокко чыгарууну карап жатат. Жарнамалоо компаниясынын ийгилигинин ыктымалдыгы 0,8 бааланат. Ийгиликтүү жарнамалоо компаниясынын учурунда, рынокто товардын ийгиликтүү ишке ашуусунун ыктымалдуулугу 0,6. Жарнамалоо компаниясынын ийгиликтүү эмес учурунда товардын ийгиликтүү ишке ашуусунун ыктымалдуулугу 0,3 болот. Биз рынокто товардын ийгиликтүү ишке ашуусун ыктымалдыгын аныктайлы.

Биз эки тажрыйба жүргүздүк:

1) жарнамалык компания ишке ашырылат;
2) товардын рынокко чыгуусу.

Ошондуктан, дарактын ыктымалдуулугунун эки деңгээлдүү чокулары бар. Ар бир жолкуда эки себеп бар, ошондуктан ар бир чокудан экиден бутак чыгат. Ар бир бутагынын жогору жагына тиешелүү жыйынтыгын жазып, ал эми бутактын төмөн жагына – булл жыйынтыктын пайда болу ыктымалдуулугун жазабыз:


I урнадагы 1-чи шар
ак
7/16
2-чи шар 1-чи уранычи нен
ак
6/15
шар 2-чи урнычи нен
ак
8/12
ак, ак, АК
$\frac{7}{16}\times\frac{6}{15}\times\frac{8}{12}$
кара
4/12
ак, ак, кара
$\frac{7}{16}\times\frac{6}{15}\times\frac{4}{12}$
кара
9/15
шар 2-чи урнычи нен
ак
7/12
ак, кара, АК
$\frac{7}{16}\times\frac{9}{15}\times\frac{7}{12}$
кара
5/12
ак, кара, кара
$\frac{7}{16}\times\frac{9}{15}\times\frac{5}{12}$
кара
9/16
2-чи шар 1-чи уранычи нен
ак
7/15
шар 2-чи урнычи нен
ак
7/12
кара, ак, АК
$\frac{9}{16}\times\frac{7}{15}\times\frac{7}{12}$
кара
5/12
кара ак, кара
$\frac{9}{16}\times\frac{7}{15}\times\frac{5}{12}$
кара
8/15
шар 2-чи урнычи нен
ак
6/12
кара, кара, АК
$\frac{9}{16}\times\frac{8}{15}\times\frac{6}{12}$
кара
6/12
кара, кара, кара
$\frac{9}{16}\times\frac{8}{15}\times\frac{6}{12}$



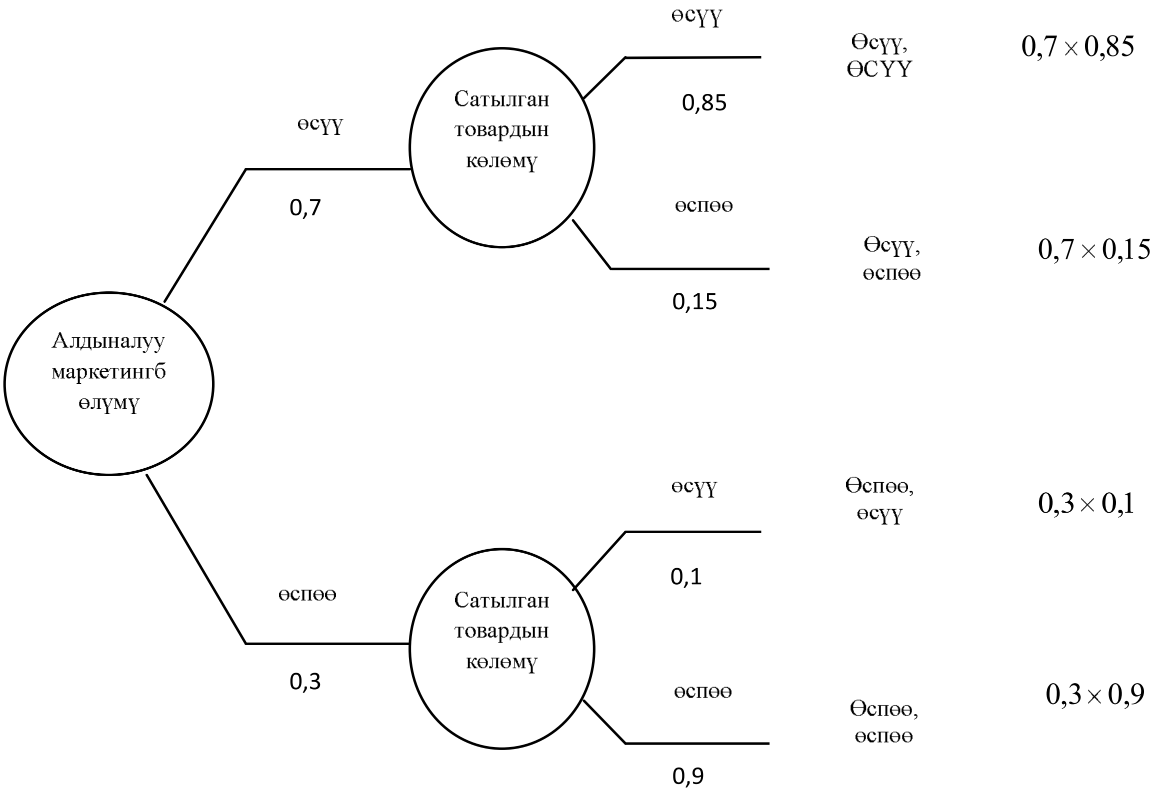
Бизге товардын рынокко ийгиликтүү чыгарылышы кызыктырат. Андыктан «ийгиликтүү» деген эки жазуу бар ыктымалдыктарды кошуу керек: $0{,}8 \times 0{,}6 + 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}54$.

Мисал: Маркетинг жакынкы келечекте ишкананын сатуу өсүү ыктымалдыгы 0,7 ге барабар деп эсептейт. Өткөн окуялардан биз билгендей маркетингдин оң алдын алуу учурларда 85%, терс алдын алуулары 90% аткарылаары белгилүү. Жакынкы келечекте ишкананын сатуу өсүш ыктымалдуулугун аныктайлы.

Биз эки тажрыйба жүргүздүк.

1) Маркетинг бөлүмүнүн алдын алуусу;
2) Сатылуу көлөмүн байкоо.

Ошондуктан, дарактын ыктымалдуулугу эки деңгээл чокулары бар. Ар бир жолкуда эки себеп бар, ошондуктан ар бутакта экиден бутак чыгат. Ар бир бутактын жогору жагына тиешелүү жыйынтыгын жазып, бир бутакты бул жыйынтыктын пайда болуу ыктымалдуулугун жазабыз:



Бизге сатуунун өсүшү иш жүзүндө өзү кызыктырат. Андан соң «өсүү» деген жазуу бар ыктымалдуулуктарды кошуу керек. $0{,}7 \times 0{,}85 + 0{,}3 \times 0{,}1 = 0{,}625$.

Гипотезанын (божомолдоонун) ыктымалдуулугу. Бейестин формуласы

A - Окуясы толук топту түзгөн $B_1, B_2, \ldots B_n$ окуяларынын биринин аткарылышынан келип чыгат дейли. Бул окуялардын кайсынысы мурун аткарылары белгисиз болгондуктан, алар гипотезалар деп аталышат. A -окуясынын келип чыгуу ыктымалдуулугу толук ыктымалдуулуктун формуласынын негизинде табылат.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P\,(Bi)P_{Bi}(A)$$

Эми төмөндөгүчө болжолдойбуз.

Сыноонун жыйынтыгында окуясы келип чыкты дейли. Анда гипотезалардын $P_A(B_1), \ldots, P_A(P_n)$ыктымалдуулуктарын табуу үчүн пайдаланабыз.

$$P(AB_1) = P(A)P_A(B_1) = P(B_1)P_{B_1}(A)$$

Мындан $\mathrm{P_A}(B_1) = \frac{P(B_1)\cdot P(A)}{P(A)} = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{\sum P(Bi)P_{Bi}(A)}$

Ушундай эле жол менен калган шарттуу ыктымалдуулуктарды табабыз.

$\boldsymbol{P_A(Bi) = \frac{P(Bi)P_{Bi}(A)}{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(B_k)P_{B_k}(A)}\,;(i = \overline{1,n})}$

<u>Бул формула Бейестин формуласы деп аталат.</u> [2]

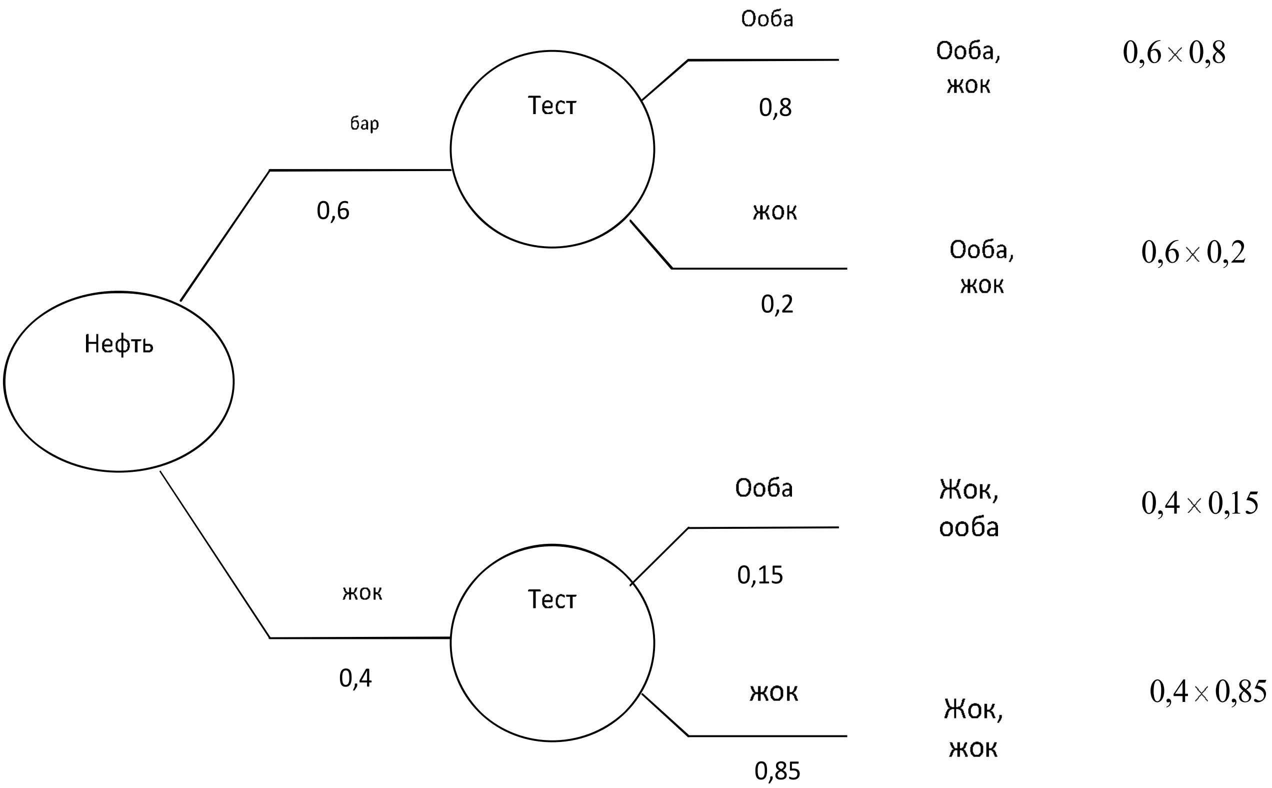
Мисалы: Цехтен чыккан тетиктер эки текшерүүчүнүн бирине текшерүүгө түшөт. Тетиктин биринчи текшерүүчүгө түшө тургандыгынын ыктымалдуулугу 0,6, экинчи текшерүүчүгө түшүүсүнүн ыктымалдуулугу-0,4. Пайдалануучу тетик 1-текшерүүчү аркылуу стандарттуу деп табылгандарынын ыктымалдуулугу 0,94, экинчиси үчүн 0,98. Пайдалануучу тетик стандарттуу деп табылган - (А-окуясы). Тетикти 1-текшерүүчү текшергендигинин ыктымалдуулугун тапкыла.

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A)} = \frac{0{,}6\cdot 0{,}94}{0{,}6\cdot 0{,}94 + 0{,}4\cdot 0{,}98} \approx 0{,}59$$

Мисал: Геологдор аймактан өндүрүлгөн мунай затынын ыктымалдуулугу 0,6 деп эсептешет. Тест жүргүзүлдү. Эгерде бул аймакта мунайзаты бар болсо, анда окуянын 80% ин тест аныктайт. Эгерде аймакта мунай зат жок болсо, анда окуянын 15%ын тест көрсөтөт. Тест мунай затынын бар экендигин айгинелеп турат. Аймакта мунай затынын бар экендигинин ыктымалдуулугун аныктайбыз.
Эки тажрыйба жүргүзүлөт:

1) геологдор мунай затынын болушун баалайт;
2) тест.

Ыктымалдуулук дарагын курабыз.



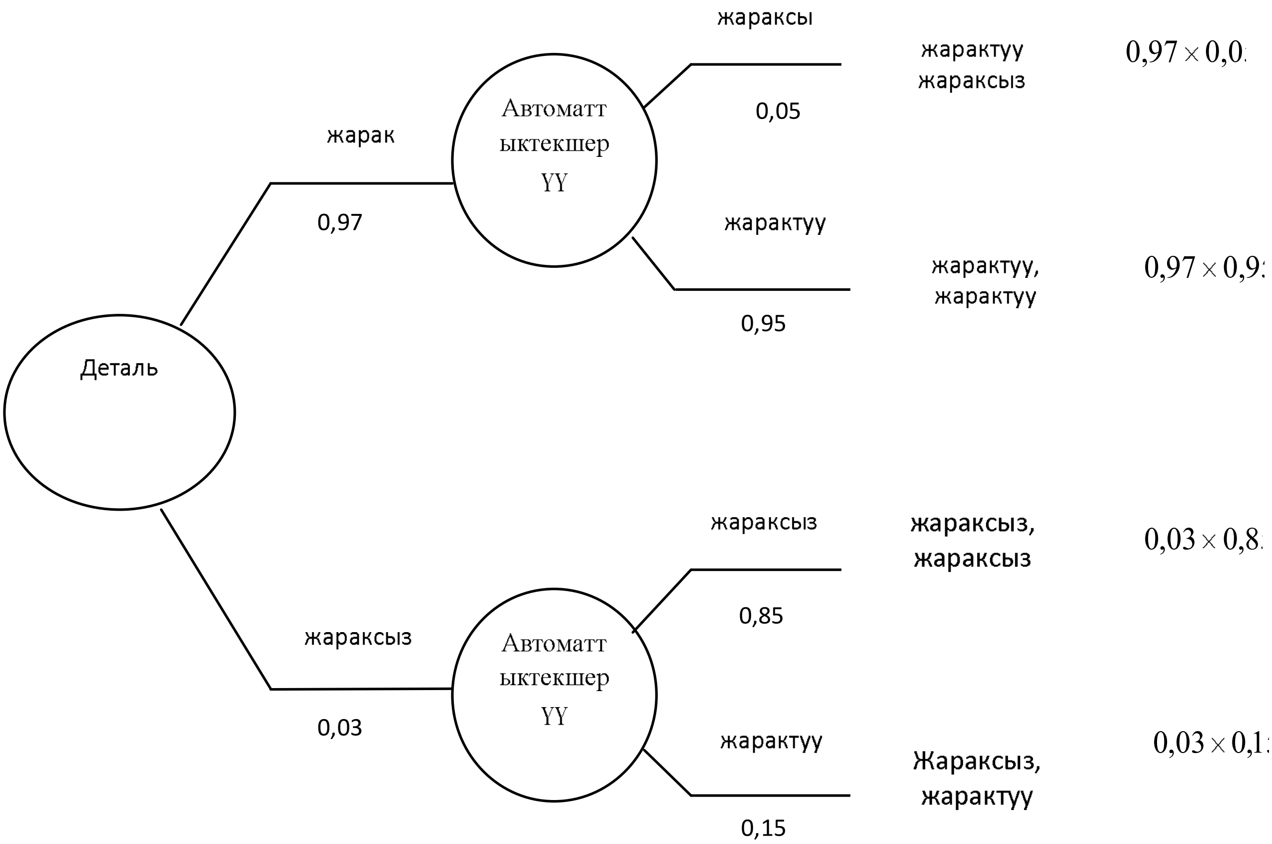
Тестин оң жыйынтыгынын ыктымалдуулугу төмөнкүгө барабар:

$$0,6 \times 0,8 + 0,4 \times 0,15 = 0,54.$$

Тестин оң жыйынтыгы боюнча аймакта мунай заттын болушунун ыктымалдуулугу төмөнкүгө барабар: $0,6 \times 0,8 = 0,48$.
Экинчи жыйынтыкты биринчи жыйынтыкка бөлүп маселенин жообун алабыз: $0,48 \div 0,54 = 8 \div 9 \approx 0,89$.[3].
Мисал: Деталдардын жараксыздыгын автоматтык түрдө аныктоо үчүн өндүрүш линиясы менен жабдылган. Өндүрүп чыгаруучу жараксыз деп табылган деталдардын үлүшү 3%га барабар деп аныктайт. Эгер детал жараксыз болсо, анда автомат деталдын жараксыздыгынын 85% аныктайт. Автоматика жарактуу деталдардын жараксыздыгын 5% аныктайт. Жараксыз деталдардын санына кезектеги деталдын тиешелүү экендигин аныктайт. Детал чындыгында жараксыз экендигинин ыктымалдуулугун аныктайбыз.
Эки тажрыйба жүргүзөбүз:

1. Деталдын тиби (жараксыз же жарактуу);
2. Деталды автоматтык түрдө текшерүү.

Ыктымалдуулук дарагын түзөбүз.



Автоматика жараксыз деталдардын санына тиешелүү деталдын ыктымалдуулугу төмөнкүгө барабар экендигин аныктайт: $0{,}97 \times 0{,}05 + 0{,}03 \times 0{,}85 = 0{,}074$.

Автоматика жараксыз деталдардын санына жараксыз деталдын тиешелүү экендигинин ыктымалдуулугу төмөнкүгө барабар: $0{,}03 \times 0{,}85 = 0{,}0255$.

Экинчи жыйынтыкты биринчи жыйынтыкка бөлүп төмөнкү жоопту алабыз:

$$0{,}0255 \div 0{,}074 \approx 0{,}345.$$

Адабияттар

1. *Аалиева Б.А., Аскарбек кызы Лира, Картанбаева Н.А. Ыктымалдуулук теориясы жана математикалык статистикасы. - Б., 2017.*
2. *Мамбеткулов Ж., Качкыналиев А. Ыктымалдуулук теориясы жана математикалык статистика. - Б.,1993.*
3. *Карабакиров Р.К., Карабакиров К.Р. Ыктымалдуулук теориясы жана математикалык статистика. - Б., 2005.*
4. *Просветов Г.И. Теория вероятностей и математическая статистика: задачи и решения. - М.: Альфа-Пресс, 2009.*