УДК 517.968.2, 517.956.22

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ГЕОЭЛЕКТРИКИ С ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕЙ И ШНУРОВЫМ ИСТОЧНИКОМ

А.Дж. Сатыбаев, Ю.В. Анищенко

Рассмотрена прямая задача геоэлектрики, которая используется при исследовании обратной задачи геоэлектрики. Обосновано существование решения поставленной задачи.

Ключевые слова: прямая задача; геоэлектрика; уравнения Максвелла; плоская граница; шнуровой источник; корректность задачи; существование решения.

EXISTENCE SOLUTION OF THE DIRECT PROBLEM GEOELECTRICIAN WITH FLAT AND ABROAD SOURCE CORDED

A.Dzh. Satybaev, Yu.V. Anishchenko

In this article, the geoelectrician direct problem which is used in the reverse geoelectrician research task is considered. The existence of the solution objective is proved.

Keywords: direct problem; geoelectrician; maxwell's equation; flat border; corded power; the problem is correct; the existence of solutions

Введение. Прямые и обратные задачи геоэлектрики, описываемые системой уравнений Максвелла, имеют большое значение в практике геологии для электроразведки. Например, для определения напряженности электромагнитных полей в прямых задачах или определения электродинамических параметров по наблюдениям электромагнитных волн – в обратных задачах.

Исследования распространения электромагнитных волн в однородных и неоднородных средах рассмотрены в работах [1, 2]. А прямые и обратные задачи электродинамики, системы уравнений Максвелла, изучены в [3, 4].

Постановка задачи. Решение прямой задачи для системы уравнений Максвелла сводится к решению задачи Коши для компонента электрической напряженности (см. [4]):

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\varepsilon}(z,y)\bar{\mu}(z,y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\bar{\sigma}(z,y)\bar{\mu}(z,y)\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta_{z,y}u(z,y,t)-\\&-\nabla_{z,y}\ln\bar{\mu}(z,y)\nabla_{z,y}u(z,y,t),\quad t\in R_-,\quad z\in R_+,\quad y\in R,\\&u(z,y,t)\big|_{t\langle 0}\equiv 0,\quad z\in R_+,\quad y\in R,\\&\frac{\partial u(z,y,t)}{\partial z}\Big|_{z=0}=h(y)\delta(t)+r(y)\theta(t),\quad t\in[0,T],\quad y\in(-D,D),\end{aligned}\right\},\tag{1}$$

$\bar{\varepsilon}(z,y)$ – диэлектрическая проницаемость; $\bar{\mu}(z,y)$ – магнитная проницаемость; $\bar{\sigma}(z,y)$ – электропроводимость среды.

Прямая задача. Найти из задачи (1) обобщенного решения $u(z,\ y,\ t)$ – электрическую напряженность среды, при известных значениях диэлектрической и магнитной проницаемости, электрической проводимости среды, а также при известных значениях функций $h(y)$, $r(y)$.

Отметим, что $h(y)$, $r(y)$ в условии задачи (1) означает, что это задача с плоской границей и шнуровым источником.

Пусть относительно параметров уравнения и начального условия выполнены следующие условия:

$$\bar{\varepsilon}(z,y),\ \bar{\mu}(z,y),\ \bar{\sigma}(z,y),\tag{2}$$

$$h(y),\quad r(y)\in\wedge_2,\tag{3}$$

где
$$\wedge_1 = \left\{ \begin{matrix} \rho_1(x,y) \in C^6((0,d)\times(-D_1,D)), & \sup p\{\rho_1(x,y)\} \in ((0,d)\times(-D_1,D)), \\ a = \left\|\rho_1\right\|_{C^2((0,d)\times(-D_1,D_1))}, & a\langle\langle M \end{matrix} \right\},$$

$$\wedge_2 = \left\{ \sup p \quad h(y) \in (-D,D), h(y) \in C^5(-D,D) \right\}, \quad 0 < M_1, M_2, M_3, D_1, d = const,$$

$$D = D_1 + T(M_2 + a), \quad T = 2d/(M_1 - a).$$

Регулярная задача. Введем новую переменную $\alpha(z, y)$, которая задается задачей Эйконала:
$$\left. \begin{matrix} \alpha_z^2(z,y) + \alpha_y^2(z,y) = \overline{\varepsilon}(z,y)\cdot\overline{\mu}(z,y) \\ \alpha(z,y)\big|_{z=0} = 0, \quad \alpha_z(z,y)\big|_{z=0} = \overline{\varepsilon}(0,y)\cdot\mu(0,y) \\ \alpha_z(z,y) > 0, \quad \lim\limits_{z\to\infty}\alpha(z,y) = \infty. \end{matrix} \right\},$$
и введем новые функции: $\mu(\alpha, y) = \overline{\mu}(z, y), \quad \varepsilon(\alpha, y) = \overline{\varepsilon}(z, y),$
$$\sigma(\alpha, y) = \overline{\sigma}(z, y), \quad \vartheta(\alpha, y, t) = u(z, y, t).$$

Тогда, используя результаты [5], получим прямую задачу с данными на характеристиках:
$$\left. \begin{matrix} \dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial\alpha^2} + L_1\vartheta(\alpha,y,t), \quad |\alpha|\langle t\langle T, \quad y \in (-D,D), \\ \vartheta\big|_{|\alpha|=t} = S(t,y), \quad t\in[0,T], \quad y\in(-D,D), \\ \vartheta\big|_{y=-D} = \vartheta\big|_{y=+D} = o. \end{matrix} \right\}. \tag{4}$$

Определим некоторые равенства, которые понадобятся в дальнейшем:
$$\left. \begin{matrix} \dfrac{\partial\vartheta}{\partial y}\Big|_{|\alpha|=t} = S_y(t,y), \quad t\in[0,T], \quad y\in(-D,D), \\ \dfrac{\partial\vartheta}{\partial t}\Big|_{|\alpha|=t} = S_t(t,y) + R(t,y), \quad t\in[0,T], \quad y\in(-D,D), \\ \dfrac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\Big|_{|\alpha|=t} = -sign\alpha R(t,y), \quad t\in[0,T], \quad y\in(-D,D). \end{matrix} \right\}. \tag{5}$$

$$L_1\vartheta(\alpha,y,t) = \frac{1}{\varepsilon(\alpha,y)\mu(\alpha,y)}\left[\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} + \Delta\alpha\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha} + \alpha_y\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\alpha\partial y}\right] -$$

$$-\frac{\mu'_\alpha(\alpha,y)}{\mu(\alpha,y)}\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha} - \frac{1}{\varepsilon(\alpha,y)\mu(\alpha,y)}\left[\frac{\mu'_\alpha(\alpha,y)}{\mu(\alpha,y)}\alpha_y\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + \frac{\mu'_y(\alpha,y)}{\mu(\alpha,y)}\alpha_y\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha} + \frac{\mu'_y(\alpha,y)}{\mu(\alpha,y)}\alpha_y\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right] - \frac{\sigma(\alpha,y)\partial\vartheta}{\varepsilon(\alpha,y)\partial t}. \tag{6}$$

Обобщенным решением задачи (4) назовем функцию $\vartheta(\alpha, y, t)$, удовлетворяющую:
$$\int\limits_0^t\int\limits_{|\alpha|}^t\int\limits_{-D}^D\left[\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\frac{\partial\phi}{\partial\tau} + \frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\frac{\partial\phi}{\partial\alpha} + L\vartheta(\alpha,y,t)\phi(\alpha,y,t)\right]dyd\alpha d\tau = \int\limits_{|\alpha|}^t\int\limits_{-D}^D S(\tau,y)\phi(\alpha,y,t)dyd\tau, \quad t\in(0,T),$$
где $\phi(\alpha,y,t) \quad \in C^2(\Omega(T,D))$.
$$\Omega(T,D) = \{(\alpha,y,t) : \alpha\in(-T,T), y\in(-D,D), |\alpha| < t < T\}.$$

Для выделения регулярных и сингулярных частей решения представим теперь решение задачи (1) в следующем виде:
$$\vartheta(\alpha,y,t) = S(\alpha,t)\theta(t-|\alpha|) + R(\alpha,y)\theta_1(t-|\alpha|) + \widetilde{\vartheta}(\alpha,y,t), \tag{*}$$
где $\widetilde{\vartheta}(\alpha, y, t)$ – непрерывная функция.

Решение задачи (1) по формуле Даламбера имеет вид:
$$\vartheta(\alpha,y,t) = \frac{\varepsilon(0,y)\mu(0,y)h(y)}{2}\delta(t-|\alpha|) + \frac{1}{2}\int\limits_o^t\int\limits_{\alpha-t+\tau}^{\alpha+t-\tau}L_1\vartheta(\xi,y,t)d\xi d\tau.$$

Подставляя это представление (*) в формулу Даламбера, и приравнивая коэффициенты перед одинаковыми сингулярными частями, получим:

$$S(t,y)=\frac{h(y)\mu(0,y)\varepsilon(0,y)}{2}+\frac{1}{2}\int_0^t\left\{\frac{1}{\varepsilon(\tau,y)\mu(\tau,y)}\left[\alpha_y S(\tau,y)+\Delta\alpha S(\tau,y)\right]-\right.$$
$$\left.-\left[\frac{\mu'_\tau(\tau,y)}{\mu(\tau,y)}+\frac{\mu'_y(\tau,y)}{\mu(\tau,y)}\cdot\alpha_y\cdot\frac{1}{\varepsilon(\tau,y)\mu(\tau,y)}\right]*S(\tau,y)-\frac{\sigma(\tau,y)}{\varepsilon(\tau,y)}S(\tau,y)\ \right\}d\tau, \tag{7}$$
$$t\in[0,T],\qquad y\in(-D,D).$$

$$R(t,y)=\frac{1}{2}\int_0^\alpha\frac{1}{\varepsilon(\tau,y)\mu(\tau,y)}\left\{S_{yy}-\frac{\mu'_y(\tau,y)}{\mu(\tau,y)}S_y-\frac{\mu'_\tau(\tau,y)}{\mu(\tau,y)}\alpha_y S_y+\alpha_y R_y+\right.$$
$$\left.+\Delta\alpha R(\tau,y)-\left[\frac{\mu'_\tau}{\mu(\tau,y)}+\frac{\mu'_y(\tau,y)}{\mu(\tau,y)}*\frac{1}{\varepsilon(\tau,y)\mu(\tau,y)}-\frac{\sigma(\tau,y)}{\varepsilon(\tau,y)}\right]*R(\tau,y)\right\}d\tau, \tag{8}$$
$$t\in[0,T],\qquad y\in(-D,D).$$

Из равенства $u(z,y,t)=\vartheta(\alpha(z),y,t)$, дифференцируя и приравнивая $z=0$, получим:

$$u'_z(z,y,t)\big|_{z=0}=\vartheta'_\alpha(\alpha(z),y,t)\cdot\alpha'_z\big|_{z=0}=\vartheta'_\alpha(\alpha,y,t)\big|_{\alpha=0}*\alpha'_z\big|_{z=0}=\vartheta'_\alpha(\alpha,y,t)\big|_{\alpha=0}*\varepsilon(0,y)\mu(0,y)=h(y)\delta(t)+r(y)\theta(t).$$

С другой стороны,

$$u'_z(z,y,t)\big|_{z=0}=\left[S'_z(0,y)-R(0,y)\right]\theta(t)-S(0,y)\delta(t)+R'_z(0,y)\theta_1(t).$$

Отсюда

$$S(0,y)=h(y),\qquad R(0,y)=S'_z(0,y)-r(y),\qquad S'_z(0,y)=\frac{h(y)\cdot\varepsilon(0,y)\cdot\mu(0,y)}{2},\qquad R(0,y)=0.$$

Таким образом, функция $r(y)$ не может быть произвольной, она должна быть равна: $r(y)=\dfrac{h(y)\cdot\varepsilon(0,y)\cdot\mu(0,y)}{2}$.

Конечно-разностный аналог задачи:

$$\left.\begin{aligned}&V_{t\bar t}=V_{\alpha\bar\alpha}+L_1V_{ij}^k,\quad (ih_1,jh_2,k\tau)\in\Omega_{ij}^k,\\&V_{\pm i,j}^{|2i|}=S_j^{|2i|},\quad i=\overline{-N,N},\quad j=\overline{-L,L}\\&V_{i,L}^k=V_{i,-L}^k=0,\quad i=\overline{-N,N};\quad k=\overline{|2i|,2N},\end{aligned}\right\}, \tag{9}$$

где

$$L_1V_{ij}^k=\frac{1}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}}\left[V_{y\bar y}+\alpha_{ij}V_{\alpha\bar y}+\Delta\alpha_{ij}V_{\underset{\alpha}{0}}\right]-\frac{(\mu_{ij})_{\underset{\alpha}{0}}}{\mu_{ij}}V_{\underset{\alpha}{0}}-\frac{1}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}}\left[\frac{(\mu_{ij})_{\underset{\alpha}{0}}}{\mu_{ij}}\alpha_{ij}V_{\underset{y}{0}}+\frac{(\mu_{ij})_{\underset{y}{0}}}{\mu_{ij}}\alpha_{ij}V_{\underset{\alpha}{0}}+\frac{(\mu_{ij})_{\underset{y}{0}}}{\mu_{ij}}\alpha_{ij}V_{\underset{y}{0}}\right]-\frac{\sigma_{ij}}{\varepsilon_{ij}}V_{\underset{i}{0}}.$$

$$\Omega_{ij}^k=\left\{x_i=ih_1,y_j=jh_2,t_k=k\tau: ih_1\in(-T,T),\quad |ih_1|<2\tau k<T, ih_2\in(-D,D)\right\}\quad h_1=\frac{T}{N},\quad h_2=\frac{D}{L},\quad \tau=\frac{T}{2N}.$$

Теорема. Пусть выполнены условия (2)–(3), (11)–(14) и функция $u(\alpha, y, t)$ непрерывна и имеет непрерывные производные первого порядка в $\Omega(T, D)$, и пусть $S(t,y)\in L_2(\Omega(T,D))$. Тогда существует обобщенное решение задачи (4) в пространстве $W_2^1(\Omega(T,D))$.

Доказательство теоремы. В этой области определим кусочно-непрерывную функцию $\tilde u(\alpha,y,t)$ внутри параллелепипеда:

$$\prod=\left\{k\tau\le t\le(k+1)\tau,\ ih_1\le\alpha\le(i+1)h_1,\ jh_2\le y\le(i+1)h_2\right\},$$

$$\tilde u(\alpha,y,t)=u_{ij}^k\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)\left(k+1-\frac{y}{\tau}\right)+u_{ij}^{k+1}\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)\left(\frac{t}{\tau}-k\right)+$$
$$+u_{i+1j}^k\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right)+u_{ij+1}^k\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right)+$$

$$+u_{i+1j+1}^{k}\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right)+u_{i+1j}^{k+1}\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)\left(\frac{t}{\tau}-k\right)+$$

$$+u_{ij+1}^{k+1}\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\left(\frac{t}{\tau}-k\right)+u_{i+1j+1}^{k+1}\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\left(\frac{t}{\tau}-k\right). \tag{10}$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

$$\left.\begin{aligned}
&\max_{|i|\le k\le M;} h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(u_{ij}^{k}\right)^2\le A, &&\max_{|i|\le k\le M;} h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(\frac{u_{i+1j}^{k}-u_{ij}^{k}}{h_1}\right)^2\le B_2,\\
&\max_{|i|\le k\le M;} h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(\frac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k}}{\tau}\right)^2\le B_1, &&\max_{|i|\le k\le M;} h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(\frac{u_{ij+1}^{k}-u_{ij}^{k}}{h_2}\right)^2\le B_3,
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\max h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}(v_{ij}^{k})^2\le A; &&\max h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(\frac{v_{ij}^{k}-v_{ij}^{k}}{\tau}\right)^2\le B_1\\
&\max h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(\frac{v_{i+1j}^{k}-v_{ij}^{k}}{h_1}\right)^2\le B_2; &&\max h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(\frac{v_{ij+1}^{k}-v_{ij}^{k}}{h_2}\right)^2\le B_3.
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\max_{|i|\le k\le M} h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(P_{2ij}^{k}\right)^2\le \mathrm{A}, &&\max_{|i|\le k\le M} h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(\frac{P_{2i+j}^{k}-P_{2ij}^{k}}{h_1}\right)^2\le B_2,\\
&\max_{|i|\le k\le M} h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(\frac{P_{ij}^{k+1}-P_{ij}^{k}}{\tau}\right)^2\le B_1, &&\max_{|i|\le k\le M} h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(\frac{P_{ij+1}^{k+1}-P_{ij}^{k}}{h_2}\right)^2\le B_3.
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\max_{|i|\le k\le M} h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(P_{2ij}^{k}\right)^2\le \mathrm{A}, &&\max_{|i|\le k\le M} h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(\frac{P_{2i+j}^{k}-P_{2ij}^{k}}{h_1}\right)^2\le B_2,\\
&\max_{|i|\le k\le M} h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(\frac{P_{ij}^{k+1}-P_{ij}^{k}}{\tau}\right)^2\le B_1, &&\max_{|i|\le k\le M} h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(\frac{P_{ij+1}^{k+1}-P_{ij}^{k}}{h_2}\right)^2\le B_3,
\end{aligned}\right. \tag{14}$$

где $v_{ij}^{k}, \vartheta_{2ij}^{k}, \mathrm{P}_{ij}^{k}$ – сеточные функции, которые определены в [6].

Доказательство теоремы можно провести по методике [6]. В этой работе в $L_1\vartheta(\alpha, y, t)$ присутствуют все члены, кроме члена $\frac{\sigma(\alpha, y)}{\varepsilon(\alpha, y)}\frac{\partial\vartheta}{\partial t}$. Покажем существование последнего производного. Обозначим его через $W_{ij}^k = \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau}$. Пусть для W_{ij}^k выполнены неравенства вида (11). Покажем, что справедливо равенство $W(\alpha, y, t) = \frac{\partial\widetilde{u}(\alpha, y, t)}{\partial t}$. Определим:

$$\widetilde{u}(\alpha, y, t_2) - \widetilde{u}(\alpha, y, t_1) = \widetilde{u}\left(\left[\frac{\alpha}{h_1}\right]h_1, \left[\frac{y}{h_2}\right]h_2, \left[\frac{t_2}{\tau}\right]\tau\right) - \widetilde{u}\left(\left[\frac{\alpha}{h_1}\right]h_1, \left[\frac{y}{h_2}\right]h_2, \left[\frac{t_2}{\tau}\right]\tau\right) +$$

$$+ O\left(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} + \sqrt{\tau}\right) = \sum_{k=\left[\frac{t_2}{\tau}\right]+1}^{\left[\frac{t_1}{\tau}\right]-1} \frac{\widetilde{u}_{ij}^{k+1} - \widetilde{u}_{ij}^{k}}{\tau} * \tau + O\left(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} + \sqrt{\tau}\right).$$

Отсюда при $h_1 \to 0$, $h_2 \to 0$, $\tau \to 0$, имеем:

$$\widetilde{u}(\alpha, y, t_2) - \widetilde{u}(\alpha, y, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} W(\alpha, y, t)dt. \qquad (15)$$

Дифференцируя формулу (15), получим: $W_{ij}^k = \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau}$ и т. д.

Таким образом, с учетом результатов [6] и полученных результатов, доказывается утверждение теоремы.

Из эквивалентности задач (4) и (1) вытекает и существование решения задачи (1).

Выводы. Доказано существование решения прямой задачи геоэлектрики. С помощью этой же методики можно доказать существование и других прямых задач волновых процессов.

Литература

1. *Жданов М.С.* Современные методы моделирования квазистационарных электромагнитных полей в трехмерно-неоднородных средах / М.С. Жданов, В.В. Спичак // Препринт ИЗМИРАН №45(519). М., 1984. 31 с.
2. *Дмитриев В.И.* Развитие математических методов исследования прямых и обратных задач электродинамики / В.И. Дмитриев и др. // УМН. 1976. Т. 31. Вып. 6. С. 123–141.
3. *Тихонов А.Н.* Некоторые общие алгоритмы решения прямых и обратных задач электродинамики / А.Н. Тихонов и др. // Вычислительные методы и программирование. М.: МГУ, 1973. Вып. XX. С. 3–11.
4. *Романов В.Г.* Обратные задачи электродинамики / В.Г. Романов, С.И. Кабанихин. М., 1991. 304 с.
5. *Сатыбаев А.Дж.* Единственность решения прямой задачи геоэлектрики с плоской границей / А.Дж. Сатыбаев // Межрегион. научн.-техн. конф. “Кыргызская государственность и проблема межкультурного диалога”: сб. научн. трудов. Вып. 3. Ош, 2003. С. 172–175.
6. *Сатыбаев А.Дж.* Существование решения прямой задачи волнового уравнения с плоской границей / А.Дж. Сатыбаев // Матер. II межд. научн.-метод. конф. “Математическое моделирование и информационные технологии в образовании и науке”. Том II. Алматы, 2003. С. 383–389.