

УДК 539.3

**РАВНОВЕСИЕ ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННЫХ ПО ВНЕШНЕЙ ПОВЕРХНОСТИ  
ТЯЖЕЛЫХ УПРУГИХ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ  
В ПОЛЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ СИЛ**

*А.В. Зайцев, Ю.В. Соколкин, А.А. Фукалов*

Получено новое точное аналитическое решение задачи о равновесии толстостенных тяжелых анизотропных тел с центральной симметрией, жестко закрепленных по внешней поверхности и находящихся под действием равномерного внутреннего давления. Проведена оценка начальной прочности монолитных железобетонных крепей сферических горных выработок.

*Ключевые слова:* толстостенная трансверсально-изотропная сфера; упругое равновесие; поле гравитационных сил; точное аналитическое решение; железобетонная крепь; сферическая горная выработка; механизмы начального разрушения.

**EQUILIBRIUM STATE OF HEAVY ANISOTROPIC CENTRAL-SYMMETRIC BODIES  
WHICH ARE FIXED ON THE EXTERNAL SURFACES**

*A. V. Zaitsev, Yu. V. Sokolkin, A. A. Fukalov*

The new exact analytical solutions to problems on equilibrium state of thick-walled heavy anisotropic central-symmetric bodies, which are fixed on the external surfaces and are subject to the action of uniform internal lateral pressure, are obtained. The estimation of an initial strength of spherical solid-cast mine working supports is carried out on the basis of a multicriteria approach.

*Keywords:* thick-walled transversally-isotropic sphere; elastic equilibrium state; gravity forces; exact analytical solution; reinforced concrete monolithic supports for spherical mine workings; mechanisms of initial stage of damage evolution.

В различных отраслях промышленности, строительстве, геологии, на нефте-газо-химических предприятиях находят применение конструкции и сооружения сферической формы (монолитные крепи горных выработок, контейнеры для длительного хранения и транспортировки высоко-агрессивных и реакционно-способных веществ и др.), изготовленные из анизотропных материалов, весом которых нельзя пренебречь. Поэтому весьма актуален поиск новых точных аналитических решений задач о равновесии тяжелых толстостенных анизотропных упругих тел с центральной симметрией, находящихся под действием равномерно распределенного внутреннего давления, и разработка на основе этих решений инженерных методов уточненного прочностного анализа. Кроме того, аналитические зависимости важны и для тестирования численных алгоритмов решения более сложных задач, в которых отдельные элементы конструкций и сооружений имеют аналогичную геометрию и граничные условия, а также для отработки методик эксперимента с тяжелыми телами простейшей геометрии.

Рассмотрим в сферической  $(\rho, \theta \text{ и } \varphi)$  системе координат равновесие толстостенных упругих тяжелых анизотропных центрально симметричных тел, жестко закрепленных по внешней поверхности, и находящихся под действием равномерно распределенных внутренних давлений  $p$ . Будем считать, что однородный материал, из которого изготовлены тела, трансверсально-изотропный относительно любого радиус-вектора, проведенного из центра. Перемещения, напряжения и деформации в точках, принадлежащих сфере (в силу симметрии тела и внешней нагрузки), не зависят от координаты  $\varphi$ , удовлетворяют геометрическим соотношениям Коши:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\rho\rho} &= \partial_{\rho} u_{\rho}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{\rho} (\partial_{\theta} u_{\theta} + u_{\rho}), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\rho} (u_{\theta} \operatorname{ctg} \theta + u_{\rho}), \\ \gamma_{\rho\theta} &= \partial_{\rho} u_{\theta} + \frac{1}{\rho} (\partial_{\theta} u_{\rho} - u_{\theta}), \end{aligned} \quad (1)$$

и уравнениям равновесия в сферических координатах:

$$\begin{aligned} \partial_\rho \sigma_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} (\partial_\theta \tau_{\rho\theta} + 2\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\phi\phi} - \sigma_{\theta\theta} + \tau_{\rho\theta} \operatorname{ctg} \theta) + F_\rho = 0, \\ \partial_\rho \sigma_{\rho\theta} + \frac{1}{\rho} [\partial_\theta \sigma_{\theta\theta} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi}) \operatorname{ctg} \theta + 3\sigma_{\rho\theta}] + F_\theta = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $F_\rho = -\gamma \cos \theta$  и  $F_\theta = \gamma \sin \theta$  – компоненты вектора массовых сил;  $\gamma$  – удельный вес материала, а  $\partial_x = \partial/\partial x$ .  
 Определяющие соотношения для трансверсально-изотропного тела:

$$\sigma_{\rho\rho} = A_{11} \varepsilon_{\rho\rho} + A_{12} \varepsilon_{\theta\theta}, \quad \sigma_{\phi\phi} = \sigma_{\theta\theta} = A_{12} \varepsilon_{\rho\rho} + (A_{22} + A_{23}) \varepsilon_{\theta\theta}, \quad \sigma_{\rho\theta} = A_{44} \gamma_{\rho\theta} \quad (3)$$

содержат следующие коэффициенты:

$$A_{11} = \frac{E_p}{\nu} (1 - \mu_{\theta\phi}), \quad A_{12} = \frac{E_\theta}{\nu} \mu_{\rho\theta}, \quad A_{22} = \frac{E_\theta}{\nu + \mu_{\theta\phi} \nu} \left( 1 - \mu_{\rho\theta}^2 \frac{E_\theta}{E_p} \right), \quad A_{23} = \frac{E_\theta}{\nu + \mu_{\theta\phi} \nu} \left( \mu_{\theta\phi} + \mu_{\rho\theta}^2 \frac{E_\theta}{E_p} \right), \quad A_{44} + G_{\rho\theta}, \quad \nu = 1 - \mu_{\theta\phi} - 2\mu_{\rho\theta}^2 \frac{E_\theta}{E_p},$$

определяемые модулями Юнга  $E_p$  и  $E_\theta$ ; коэффициентами Пуассона  $\mu_{\rho\theta}$  и  $\mu_{\theta\phi}$ , а также модулем сдвига в диаметральной плоскости  $G_{\rho\theta}$ .

Последовательная подстановка геометрических соотношений (1) в определяющие (3), а затем полученного результата – в уравнения равновесия (2) позволяет записать неоднородные системы дифференциальных уравнений Ламе в частных производных:

$$\begin{aligned} A_{11} \partial_r^2 u_r + \frac{1}{r} [2A_{11} \partial_r u_r + (A_{12} + A_{44}) (\partial_{r\theta}^2 u_\theta + \partial_r u_\theta \operatorname{ctg} \theta)] + \\ + \frac{1}{r^2} [A_{44} (\partial_\theta^2 u_r + \partial_\theta u_r \operatorname{ctg} \theta) + (A_{12} - A_{22} - A_{23} - A_{44}) (\partial_\theta u_\theta + u_\theta \operatorname{ctg} \theta) + 2(A_{12} - A_{22} - A_{23}) u_r] = \gamma \cos \theta, \\ A_{44} \partial_r^2 u_\theta + \frac{1}{r} [2A_{44} \partial_r u_\theta + (A_{12} + A_{44}) \partial_{r\theta}^2 u_r] + \frac{1}{r^2} [A_{22} (\partial_\theta^2 u_\theta + \partial_\theta u_\theta \operatorname{ctg} \theta) + \\ + (A_{22} + A_{23} + 2A_{44}) \partial_\theta u_r - (A_{23} + 2A_{44} + A_{22} \operatorname{ctg}^2 \theta) u_\theta^{(i)}] = -\gamma \sin \theta. \end{aligned}$$

Граничные условия на внешней и внутренней поверхности тяжелой сферы, ограниченной радиусами  $R$  и  $r$ , запишем следующим образом:

$$u_\rho|_{\rho=R} = 0, \quad u_\theta|_{\rho=R} = 0, \quad \sigma_{\rho\rho}|_{\rho=r} = -p, \quad \sigma_{\rho\theta}|_{\rho=r} = 0. \quad (4)$$

В силу того, что граничные условия (4) не нарушают осевую симметрию задачи, компоненты вектора перемещений могут быть разложены по окружной и радиальной координате в тригонометрические и обобщенные степенные ряды [1–5]. Учитывая однородность граничных условий для  $i > 0$  [5], получим точные аналитические решения задач о равновесии толстостенной тяжелой трансверсально-изотропной сферы [3]:

$$\begin{aligned} u_\rho = \left( \frac{d_2 C_2}{\rho} + d_3 C_3 \rho^{-1/2+t} + d_4 C_4 \rho^{-1/2-t} + \gamma \frac{H_\rho}{H_1} \rho^2 - C_1 \right) \cos \theta + D_1 \rho^{-1/2-s} + D_2 \rho^{-1/2+s}, \\ u_\theta = \left( C_1 + \frac{C_2}{\rho} + C_3 \rho^{-1/2+t} + C_4 \rho^{-1/2-t} + \gamma \frac{H_\theta}{H_1} \rho^2 \right) \sin \theta, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $t = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{A_{11} A_{44}} [(A_{22} + A_{23})(A_{11} + 2A_{44}) - 2A_{12}(H_3 + 2A_{44})]}$ ,

$$s = \sqrt{\frac{1}{4} + 2 \frac{H_4}{A_{11}}}, \quad H_\rho = H_4 - H_3 - A_{44}, \quad H_\theta = 2A_{11} - H_2,$$

$$H_1 = 2A_{11}(A_{22} + A_{23} - 4A_{44}) + 2A_{44}(H_4 - 2A_{12}) - 2A_{12}^2,$$

$$H_2 = A_{22} + A_{23} + 2A_{44}, \quad H_3 = A_{12} + A_{44}, \quad H_4 = A_{22} + A_{23} - A_{12},$$

$$d_2 = -\frac{H_2}{H_4 + A_{44}}, \quad d_3 = \frac{A_{44} [H_3(1+2t) - 2H_2]}{2H_3^2 - A_{11}H_2}, \quad d_4 = \frac{A_{44} [H_3(1-2t) - 2H_2]}{2H_3^2 - A_{11}H_2}$$

$$Ld_3 = Y + 2A_{44}H_3t, \quad Ld_4 = Y - 2A_{44}H_3t, \quad Y = -A_{44}(H_2 + H_4 + A_{44}), \quad L = 2H_3^2 - A_{11}H_2.$$

Постоянные интегрирования  $D_1, D_2, C_1, C_2, C_3$  и  $C_4$ , входящие в выражения (5), определяются из граничных условий (4) и не приводятся ввиду громоздкости.

Последовательная подстановка (5) в геометрические (1) и определяющие соотношения (3) позволяет записать выражения для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & \frac{1}{2} r^{-3/2-s} \left\{ D_1 [4A_{12} - A_{11}(1+2s)] + D_2 [4A_{12} - A_{11}(1-2s^{(i)})] r^{2s} \right\} + \\ & + \left\{ 2A_{12} [(1+d_2)C_2 r^{-2} + (1+d_3)C_3 r^{-3/2+t} + (1+d_4)C_4 r^{-3/2-t} + (H_r + H_\theta)r] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} A_{11} [2d_2 C_2 r^{-2} + (1-2t)d_3 C_3 r^{-3/2+t} + (1+2t)d_4 C_4 r^{-3/2-t} - 4H_r r] \right\} \cos \theta, \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = & \frac{1}{2} r^{-3/2-s} \left\{ D_1 [2(A_{22} + A_{23}) - A_{12}(1+2s)] + D_2 [2(A_{22} + A_{23}) - A_{12}(1-2s)] r^{2s} \right\} + \\ & + \left\{ (A_{22} + A_{23}) [(1+d_2)C_2 r^{-2} + (1+d_3)C_3 r^{-3/2+t} + (1+d_4)C_4 r^{-3/2-t} + (H_r + H_\theta)r] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} A_{12} [2d_2 C_2 r^{-2} + (1-2t)d_3 C_3 r^{-3/2+t} + (1+2t)d_4 C_4 r^{-3/2-t} - 4H_r r] \right\} \cos \theta, \\ \sigma_{r\theta} = & -A_{44} \left[ (2+d_2)C_2 r^{-2} + \left( \frac{3}{2} + d_3 - t \right) C_3 r^{-3/2+t} + \left( \frac{3}{2} + d_4 + t \right) C_4 r^{-3/2-t} + (H_r - H_\theta)r \right] \sin \theta. \end{aligned}$$

Из полученных решений в частном случае, при замене деформационных постоянных  $E = E_\rho = E_\theta$ ,  $\mu = \mu_{\rho\theta} = \mu_{\theta\rho}$  и  $G = G_{\rho\theta} = E/(1+2\mu)$ , следуют выражения для перемещений:

$$u_\rho = D_1 \rho + D_2 \rho^{-2} + \left[ -C_1 + \frac{d_2 C_2}{\rho} + d_3 C_3 \rho^2 + \frac{2C_4}{\rho^3} + H_\rho \rho^2 \right] \cos \theta, \quad u_\theta = \left( C_1 + \frac{C_2}{\rho} + C_3 \rho^2 + \frac{C_4}{\rho^3} + H_\theta \rho^2 \right) \sin \theta,$$

где

$$D_1 = -pr^3 K, \quad D_2 = pr^3 R^3 K, \quad K = \frac{1 - \mu - 2\mu^2}{E [2(1 - 2\mu)R^3 + (1 + \mu)r^3]},$$

$$H_\rho = \frac{\gamma(1-\mu)}{3E}, \quad H_\theta = -\frac{2\gamma\mu}{3E}, \quad d_2 = \frac{4(1-\mu)}{4\mu-3}, \quad d_3 = \frac{4\mu-1}{2\mu-3}$$

$$C_1 = \gamma \frac{\mu+1}{3NMR} \left[ 2r^8 (6\mu^2 + \mu - 5) - 18R^8 (2\mu^2 - 3\mu + 1) + r^5 R^3 (6\mu^2 + \mu - 2) - 9r^3 R^5 (8\mu^2 - 12\mu + 5) \right],$$

$$C_2 = -\gamma r^3 (4\mu^2 + \mu - 3) N^{-1}, \quad C_4 = \gamma \frac{1+\mu}{3NM} \left[ 2R^3 (1-2\mu) + r^3 (1+\mu) \right] r^5 R^2,$$

$$C_3 = \gamma \frac{2\mu-3}{NM} \left[ r^5 (\mu^2 + \mu) - 2R^5 (3\mu^2 - 4\mu + 1) - r^3 R^2 (1+\mu) \right], \quad N = 6E(\mu-1), \quad M = 2(2-3\mu)R^5 + (1+\mu)r^5.$$

Подстановка этих выражений в геометрические (1) и определяющие (3) соотношения дают возможность записать выражения для деформаций и напряжений в точках тяжелых изотропных сфер с аналогичными граничными условиями [1].

В качестве примера использования полученного аналитического решения могут быть построены поля перемещений и напряжений в железобетонных монолитных креплениях подземных сферических горных выработок, а также проанализирован вклад массовых сил в напряженное состояние этих сооружений и проведена оценка начальной прочности по совокупности критериев [6]. На рисунке 1 показаны перемещения точек внутренних, свободных от закрепления, поверхностей монолитных железобетонных креплений, вызванные действием внутреннего равномерного давления  $p = 0$  МПа и  $p = 1$  МПа. Параметры геометрии и упругие модули железобетона были выбраны следующими:  $r = 3,0$  м,  $R = 6,0$  м;  $E_\theta = 50,0$  ГПа,  $E_\rho = 35,0$  ГПа,  $G_{\rho\theta} = 56,5$  ГПа,  $\mu_{\theta\rho} = 0,075$  и  $\mu_{\rho\theta} = 0,15$ . Удельный вес материала принимался равным  $\gamma = 40$  кН/м<sup>3</sup>.

Как видим, перемещения точек свободной поверхности в верхней полусфере при отсутствии давления отрицательные, а в нижней полусфере на расстоянии 0,23 м от горизонтальной плоскости, проходящей

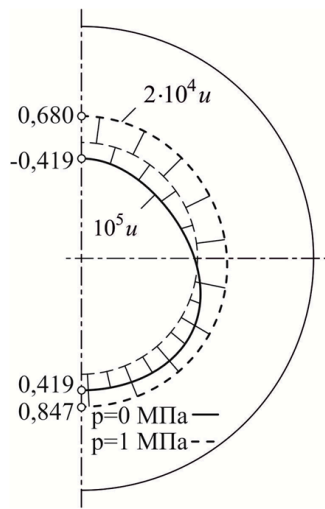


Рисунок 1 – Перемещения (м) точек свободной поверхности

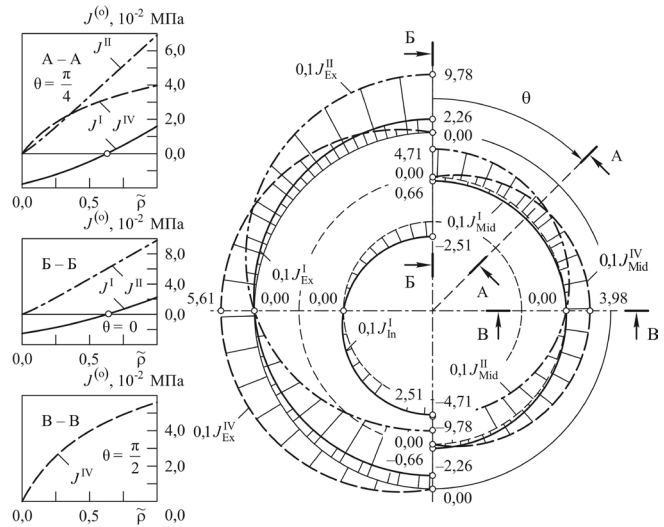


Рисунок 2 – Распределение инвариантов тензора напряжений (КПа) на закрепленной внешней ( $J_{Ex}^{(e)}$ ), свободной от нагрузок внутренней ( $J_{In}^{(e)}$ ) и серединной ( $J_{Mid}^{(e)}$ ) поверхности в монолитной крепи сферической горной выработки

через центр сферы, перемещения изменяют знак. Следует обратить внимание и на то, что под действием давления каждая точка свободной поверхности получает дополнительное, но только радиальное перемещение.

В работе [7] были введены независимые величины:

$$J_{\sigma}^I = \frac{1}{2}(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\theta\theta}), \quad J_{\sigma}^{II} = \sigma_{\rho\rho}, \quad (6)$$

$$J_{\sigma}^{III} = \sqrt{(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\sigma_{\varphi\theta}^2}, \quad J_{\sigma}^{IV} = \sqrt{\sigma_{\varphi\rho}^2 + \sigma_{\theta\rho}^2},$$

инвариантные относительно ортогональных преобразований, допустимых над сферически трансверсально-изотропным телом, и описывающих различные механизмы разрушения от растяжения или сжатия в окружном и радиальном направлении, от сдвигов по поверхности изотропии, а также в диаметральной плоскости.

На рисунке 2 представлены распределения инвариантов тензора напряжений (6) в монолитных железобетонных крепях ( $p = 0$  МПа): вдоль меридиональной  $\theta$  и безразмерной радиальной  $\tilde{\rho} = (\rho - r)/(R - r)$  координаты. Как видим, в отличие от “классического” решения Ламе для анизотропных сфер [8] компоненты тензора напряжений являются ненулевыми даже при отсутствии внутреннего давления. Это объясняется тем, что полученное новое точное аналитическое решение (5) учитывает вклад массовых сил.

На внутренней свободной поверхности (рисунок 1) ненулевым является только первый инвариант тензора напряжений  $J_{\sigma}^I$ , который в верхней части сооружений всюду монотонно возрастает вдоль  $\tilde{\rho}$ , а в нижней – всюду монотонно убывает, принимая нулевое значение при  $\tilde{\rho} = 0,63$ . Следует отметить, что положение этих точек, разделяющих область положительных и отрицательных значений  $J_{\sigma}^I$ , не зависит от  $\theta$  (за исключением диаметральной плоскости, соответствующей  $\theta = \pi/2$ , где  $J_{\sigma}^I = 0,00$  КПа). При изменении радиальной координаты от свободной поверхности к закрепленной  $J_{\sigma}^{II}$  всюду возрастает по абсолютной величине. Поскольку свои наибольшие по абсолютной величине значения  $J_{\sigma}^I$  и  $J_{\sigma}^{II}$  достигают в точках вертикальной диаметральной оси, эти точки являются наиболее опасными с точки зрения возможности начала разрушения монолитных крепей, от растяжения или сжатия в окружном и радиальном направлении.

Четвертый  $J_{\sigma}^{IV}$  инвариант, который описывает разрушение от сдвига монолитных крепей сферической горной выработки, равен нулю в точках, расположенных в вертикальной диаметральной плоскости (рисунок 2).  $J_{\sigma}^{IV}$  возрастает по мере увеличения угла  $\theta$ , достигая своего максимального значения при  $\theta = \pi/2$ . Поэтому с точки зрения возможности разрушения монолитной крепи по механизмам сдвигов наиболее опасной является горизонтальная диаметральной плоскость, в которой  $J_{\sigma}^I$ ,  $J_{\sigma}^{II}$  и остальные инварианты принимают нулевые значения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ–Урал № 14–01–96029).

*Литература*

1. *Кожевникова Л.Л.* Аналитическое исследование упругого равновесия полой сферы, жестко закрепленной по внешнему контуру / Л.Л. Кожевникова, Г.Б. Кузнецов, В.П. Матвеев, И.Н. Шардаков // Пробл. прочности. 1974. № 9. С. 20–23.
2. *Кузнецов Г.Б.* Упругость, вязкоупругость и длительная прочность цилиндрических и сферических тел / Г.Б. Кузнецов. М.: Наука, 1979. 112 с.
3. *Зайцев А.В.* Упругое равновесие тяжелой трансверсально-изотропной толстостенной сферы с жестко закрепленной внутренней поверхностью / А.В. Зайцев, А.А. Фукалов // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2010. № 5(21). С. 85–95.
4. *Фукалов А.А.* Точные аналитические решения задач о равновесии упругих анизотропных тяжелых тел с центральной и осевой симметрией и их приложения / А.А. Фукалов, А.В. Кутергин // Вестник Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4–4. С. 1831–1833.
5. *Зайцев А.В.* Механизмы начального разрушения железобетонной крепи сферической горной выработки в массиве осадочных пород / А.В. Зайцев, Ю.В. Соколкин, А.А. Фукалов // Вестник ПНИПУ. Механика. 2013. № 4. С. 59–74.
6. *Вильдеман В.Э.* Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов / В.Э. Вильдеман, Ю.В. Соколкин, А.А. Ташкинов. М.: Наука, 1997. 288 с.
7. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов / Б.Е. Победря. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
8. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. М.: Наука, 1977. 416 с.