



УДК 517.956.22



Ю. В. АНИЩЕНКО
YU. V. ANISHENKO
E.mail. ksucta@elcat.kg

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ГЕОЭЛЕКТРИКИ С МГНОВЕННЫМ И ШНУРОВЫМ ИСТОЧНИКАМИ

FINITE-DIFFERENCE ALGORITHM SOLVING TWO-DIMENSIONAL GEOELECTRIC DIRECT PROBLEMS WITH INSTANT AND CORDED SOURCE

Бул макалада геоэлектриканын, электродинамиканын түз маселелери үчүн сандык чыгарылыштырынын жалпы көрүнүшү берилген жана чектүү-айырмалардын алгоритми, маселени удаалаш эсептөөнүн алгоритми түзүлгөн.

Чечүүчү сөздөр: геоэлектрика, түз маселелер, чектүү-айырмалар, алгоритм, булактар.

В данной статье дан обзор численных решений для прямых задач геоэлектрики, электродинамики и построен конечно-разностный алгоритм, алгоритм последовательного вычисления задачи.

Ключевые слова: геоэлектрика, прямые задачи, конечно-разностное, алгоритм, источники.

This article provides an overview of the numerical solutions of direct problems of geoelectric, electrostatics and constructed finite-difference algorithm, the algorithm of sequential computation tasks.

Key words: geoelectrics direct problems, finite-difference algorithm, sources.

Введение. Многие задачи практических приложений приводятся к решению уравнений математической физики с начальными и граничными условиями, такие задачи иногда называют задачами дифференциальных уравнений с частными производными.

В таких задачах обычно определяют возмущения физических или волновых процессов и эти задачи относятся к классу прямых задач математической физики.

В практических приложениях в последнее время возникают так называемые обратные задачи.

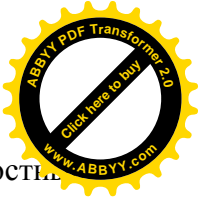
Примерами обратных задач являются восстановления неизвестных граничных условий, восстановления начальных условий, начального времени, определения коэффициентов или физических параметров уравнений, конечно при этом должны задаваться дополнительные условия для решения обратных задач.

Разработка приближенных, в том числе численных методов решения прямых задач ведется давно и ко многим таким задачам построены устойчивые и условно-устойчивые приближенные методы решения (см. монографии [1], [2], [3]).

А разработка численных методов решения обратных задач ведется недавно и здесь литератур по построению условно-устойчивых решений обратных задач, особенно гиперболических обратных задач, очень мало. К ним относятся монографии [4], [5], [6].

Отметим, что обратные задачи математической физики принадлежат к классу некорректных задач. Задача называется корректной, если решение задачи: существует, единственно и устойчиво. Во многих случаях в обратных задачах нарушается устойчивость решения. В этих случаях построят условно-устойчивое решение обратных задач.

Таким образом, в обратных задачах некорректность задачи обусловлена отсутствием непрерывной зависимости решения от входных данных.



При численных решениях, в одномерных обратных задачах используют разностные методы, дело в том, что в этих методах решения задачи во-первых наглядно, а во-вторых легко реализуемо и в-третьих алгоритм демонстративен [7, 8, 9].

В многомерных обратных задачах численное решение реализуется с помощью разностных и проекционных методов, и этот метод обоснован в монографиях [10-15].

Распространение волновых процессов с точки зрения сейсмологии и их практическое значение изложено в работе Baranovet V., Kunetz G. [16].

Б. Г. Михайленко в статье [17] анализировал и проводил математический эксперимент, провел математические расчеты существования интенсивных волн и доказал, что при этом необходимо учитывать интерпретацию полевых наблюдений.

Постановка задачи. Определить функцию $u(z, y, t)$ – электромагнитное давление среды из задачи геоэлектрики

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varepsilon}(z, y) \bar{\mu}(z, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \bar{\sigma}(z, y) \bar{\mu}(z, y) \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta_{z, y} u(z, y, t) - \\ - \nabla_{z, y} \ln \bar{\mu}(z, y) \nabla_{z, y} u(z, y, t), \quad t \in R_+, \quad z \in R_+, \quad y \in R, \\ u(z, y, t) \Big|_{t < 0} &\equiv 0, \quad z \in R_+, \quad y \in R, \\ \frac{\partial u(z, y, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} &= h(y) \delta(t) + r(y) \theta(t), \quad t \in (0, T), \quad y \in (-D, D), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где, $\bar{\varepsilon}(z, y)$ - диэлектрическая проницаемость, $\bar{\mu}(z, y)$ - магнитная проницаемость, $\bar{\sigma}(z, y)$ - электропроводимость среды $h(y)$, $r(y)$ - заданные функции, $\delta(t)$, $\theta(t)$ - дельта-функция Дирака и тета-функция Хевисайда соответственно.

Последнее граничное условие моделирует, так называемую, плоскую границу и шнуровой источник. Относительно коэффициентов уравнения $\bar{\varepsilon}(z, y)$, $\bar{\mu}(z, y)$, $\bar{\sigma}(z, y)$ и источников $h(y)$, $r(y)$ предположим, что выполнены

$$\bar{\varepsilon}(z, y), \quad \bar{\mu}(z, y), \quad \bar{\sigma}(z, y) \in \Lambda_1, \quad (2)$$

$$h(y), r(y) \in \Lambda_2. \quad (3)$$

$$\Lambda_1 = \left\{ \begin{aligned} \varepsilon(z, y) \in C^6((0, d) \times (-D_1, D_1)), \quad \text{supu}\{\varepsilon(z, y)\} \subset ((0, d) \times (-D_1, D_1)), \\ a = \|\varepsilon(z, y)\|_{C^2((0, d) \times (-D_1, D_1))}, \quad a \ll M_1 \end{aligned} \right\},$$

$$\Lambda_2 = \left\{ \text{sup } p h(y) \in (-D, D), h(y) \in C^5(-D, D) \right\}, \quad 0 < M_1, M_2, M_3, D_1, d = \text{const.}$$

$$D = D_1 + T(M_2 + a), \quad T = 2d / (M_1 - a)$$

Введя новые переменные, новые функции, а также выделяя особенности решения задачи, прямую задачу (1) можно привести к задаче с данными на характеристиках (см. [15]):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 g}{\partial \alpha^2} + L_1 \mathcal{G}(\alpha, y, t), \quad |\alpha| < t < T, \quad y \in (-D, D), \\ \mathcal{G} \Big|_{|\alpha|=t} &= S(t, y), \quad t \in [0, T], \quad y \in (-D, D), \\ \mathcal{G} \Big|_{y=-D} &= \mathcal{G} \Big|_{y=+D} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь $L_1 \mathcal{G}(\alpha, y, t)$, $S(t, y)$, $R(t, y)$ выражается следующими функциями:



$$L_1 \mathcal{G}(\alpha, y, t) = \frac{1}{\varepsilon(\alpha, y)\mu(\alpha, y)} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial y^2} + \Delta \alpha \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \alpha} + \alpha_y \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \alpha \partial y} \right] - \frac{\mu'_\alpha(\alpha, y)}{\mu(\alpha, y)} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \alpha} - \frac{1}{\varepsilon(\alpha, y)\mu(\alpha, y)} \left[\frac{\mu'_\alpha(\alpha, y)}{\mu(\alpha, y)} \alpha_y \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + \frac{\mu'_y(\alpha, y)}{\mu(\alpha, y)} \alpha_y \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \alpha} + \frac{\mu'_y(\alpha, y)}{\mu(\alpha, y)} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} \right] - \frac{\sigma(\alpha, y)}{\varepsilon(\alpha, y)} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}. \quad (5)$$

$$S(t, y) = \frac{h(y)\mu(o, y)\varepsilon(o, y)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^t \left\{ \frac{1}{\varepsilon(\tau, y)\mu(\tau, y)} [\alpha_y S(\tau, y) + \Delta \alpha S(\tau, y)] - \left[\frac{\mu'_\tau(\tau, y)}{\mu(\tau, y)} + \frac{\mu'_y(\tau, y)}{\mu(\tau, y)} \cdot \alpha_y \cdot \frac{1}{\varepsilon(\tau, y)\mu(\tau, y)} \right] * S(\tau, y) - \frac{\sigma(\tau, y)}{\varepsilon(\tau, y)} S(\tau, y) \right\} d\tau, \quad t \in [0, T], \quad y \in (-D, D), \quad (6)$$

$$R(t, y) = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{\varepsilon(\tau, y)\mu(\tau, y)} \left\{ S_{yy} - \frac{\mu'_y(\tau, y)}{\mu(\tau, y)} S_y - \frac{\mu'_\tau(\tau, y)}{\mu(\tau, y)} \alpha_y S_y + \alpha_y R_y + \Delta \alpha R(\tau, y) - \left[\frac{\mu'_\tau(\tau, y)}{\mu(\tau, y)} + \frac{\mu'_y(\tau, y)}{\mu(\tau, y)} \right] * \frac{1}{\varepsilon(\tau, y)\mu(\tau, y)} - \frac{\sigma(\tau, y)}{\varepsilon(\tau, y)} \right\} * R(\tau, y) \right\} d\tau, \quad t \in [0, T], \quad y \in (-D, D). \quad (7)$$

Для дальнейших исследований получены также следующие соотношения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} \Big|_{|\alpha|=t} &= S_y(t, y), \quad t \in [0, T], \quad y \in (-D, D), \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \Big|_{|\alpha|=t} &= S_t(t, y) + R(t, y), \quad t \in [0, T], \quad y \in (-D, D), \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \alpha} \Big|_{|\alpha|=t} &= -\text{sign} \alpha R(t, y), \quad t \in [0, T], \quad y \in (-D, D). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Конечно-разностный аналог прямой задачи.

Введя сеточную область

$$\Omega_{ij}^k = \{ \alpha_i = ih_1, y_j = jh_2, t_k = k\tau : ih_1 \in (-T, T), |ih_1| < 2\tau k < T, ih_2 \in (-D, D) \},$$

$$h_1 = \frac{T}{N}, h_2 = \frac{D}{L}, \tau = \frac{T}{2N}, D = D_1 + T(M_2 + a), T = 2d(M_1 - a),$$

таким же образом как в работе А. А. Самарского [1], можно получить конечно-разностный аналог дифференциальной задачи [4] (при этом отброшены малые члены $O(h_1^2, h_2^2, \tau^2)$):

$$\left. \begin{aligned} V_{\bar{i}\bar{i}} &= V_{\alpha\bar{\alpha}} + L_1 V_{ij}^k, \quad (ih_1, jh_2, k\tau) \in \Omega_{ij}^k, \\ V_{\pm k, j}^{|\pm k|} &= S_j^{|\pm k|}, \quad i = \overline{-N, N}; \quad j = \overline{-L, L}, \\ V_{i, L}^k &= V_{i, -L}^k = 0, \quad i = \overline{-N, N}; \quad k = \overline{2i, 2N}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \partial \partial e \quad L_1 V_{ij}^k &= \frac{1}{\mu_{ij} \varepsilon_{ij}} \left[V_{y\bar{y}} + \alpha_{ij} V_{\alpha\bar{y}} + \Delta \alpha_{ij} V_{\alpha}^0 \right] - \frac{(\mu_{ij})_{\alpha}^0}{\mu_{ij}} V_{\alpha}^0 - \\ &- \frac{1}{\mu_{ij} \varepsilon_{ij}} \left[\frac{(\mu_{ij})_{\alpha}^0}{\mu_{ij}} \alpha_{yij} V_y^0 + \frac{(\mu_{ij})_y^0}{\mu_{ij}} \alpha_{yij} V_{\alpha}^0 + \frac{(\mu_{ij})_y^0}{\mu_{ij}} V_y^0 \right] - \frac{\sigma_{ij}}{\varepsilon_{ij}} V_{\alpha}^0. \\ S_{kj} &= \frac{h_j \mu_{0j} \varepsilon_{0j}}{2} + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^k \left\{ \frac{1}{\varepsilon_{lj} \mu_{lj}} \left[(\alpha_y)_j S_{lj} + (\Delta \alpha)_j S_{lj} \right] - \right. \\ &- \left. \left[\frac{(\mu'_{\tau})_{lj}}{\mu_{lj}} + \frac{(\mu'_y)_{lj}}{\mu_{lj}} \cdot (\alpha_y)_j \frac{1}{\varepsilon_{lj} \mu_{lj}} \right] S_{lj} - \frac{\tau_{lj}}{\varepsilon_{lj}} S_{lj} \right\} \cdot h_1; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} R_{kj} &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^k \frac{1}{\varepsilon_{lj} \mu_{lj}} \left\{ (S''_{yy})_{lj} - \frac{(\mu'_y)_{lj}}{\mu_{lj}} (S'_y)_{lj} - \frac{(\mu'_{\tau})_{lj}}{\mu_{lj}} (\alpha_y)_j (S'_y)_{lj} + (\alpha_y)_j (R_y)_j + \right. \\ &+ (\Delta \alpha)_j R_{lj} - \left. \left[\frac{(\mu'_{\tau})_{lj}}{\mu_{lj}} + \frac{(\mu'_y)_{lj}}{\mu_{lj}} \cdot \frac{1}{\varepsilon_{lj} \mu_{lj}} - \frac{\delta_{lj}}{\varepsilon_{lj}} \right] R_{lj} \cdot h_1; \end{aligned} \quad (11)$$

$$i = \overline{1, N}; j = \overline{-L, L}.$$

Конечно-разностный алгоритм решения.

Из уравнения (9) получим при $h_1 = 2\tau$:

$$\frac{V_{i,j}^{k+1} - 2V_{i,j}^k + V_{i,j}^{k-1}}{\tau^2} = \frac{V_{i+1,j}^k - 2V_{i,j}^k + V_{i-1,j}^k}{4\tau^2} + L_1 V_{i,j}^k.$$

Отсюда имеем

$$V_{ij}^{k+1} = 2V_{i,j}^k - V_{i,j}^{k-1} + (V_{i+1,j}^k - 2V_{i,j}^k + V_{i-1,j}^k) / 4 + \tau^2 \cdot L_1 V_{i,j}^k; \quad (12)$$

Так как сеточная функция $S_{i,j}$ вычислена по квадратурной формуле (10), она известна, то можем найти (на рис.1. обозначены через о):

$$V_{\pm k, j}^{|\pm k|} = S_{k, j}, \quad k = \overline{-2N, 2N} \quad (13)$$

Узлы $V_{k,j}^{|\pm k|}$, $V_{k,j}^{|\pm k|} = V_{k,j}^{|\pm k|}$ обозначены \triangle и \square соответственно, можно определить двумя способами:

1 способ: Из второго соотношения формулы (8), то есть из

$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \Big|_{\alpha=t} = S_t(t, y) + R(t, y)$, можно получить следующие конечно-разностные выкладки

$$\frac{V_{k,j}^{|\pm k|} - V_{k,j}^{|\pm k|}}{\tau} = \frac{S_{k,j} - S_{k-1,j}}{\tau} + R_{k,j}, \quad \text{отсюда}$$

$$V_{k,j}^{|\pm k|} = V_{k,j}^{|\pm k|} + S_{k,j} - S_{k-1,j} + \tau \cdot R_{k,j}, \quad k = \overline{-2N-1, 2N-1}, j = \overline{-L, L}. \quad (14)$$



$$V_{k,j}^{|k \mp 2|} = V_{k,j}^{|k|} + S_{k,j} - S_{k-1,j} + h_1 R_{k,j} \quad k = \overline{-2N-1, 2N-1}, j = \overline{-L, L} \quad (15)$$

По формуле (14) вычисляются узлы Δ , а по формуле (15) вычисляются узлы \square
2 способ. По формуле Тейлора

$$v(\alpha, y, t) = v(\alpha_0, y, t) + \frac{v'(\alpha_0, y, t)}{1!} (\alpha - \alpha_0) + \frac{v''(\alpha_0, y, t)}{2!} (\alpha - \alpha_0)^2 + \dots$$

Если отбросим малые члены ниже $v''(\alpha_0, y, t)$, то получим

$$v(\alpha, y, t) = v(\alpha_0, y, t) + v'(\alpha_0, y, t)(\alpha - \alpha_0)$$

Конечно-разностный аналог этой формулы при $\tau = \alpha - \alpha_0$ будет формула (14), а при $h_1 = \alpha - \alpha_0$ будет формула (15).

Внутренние узлы вычисляются по формуле (12).

Алгоритм решения.

1 шаг. Задаем T, D, N, L и вычислим $h_1 = T/N, \tau = T/2N, h_2 = D/L$.

2 шаг. Вычислим сеточные функции $\varepsilon_{ij}, \mu_{ij}, \sigma_{i,j}$, а также $\alpha_{ij}, \Delta\alpha_{ij}, \alpha_{yij}, i = \overline{-N, N}, j = \overline{-L, L}$.

3 шаг. Вычислим сеточные заданные функции h_j, r_j .

4 шаг. Вычислим $(\mu'_\alpha)_{ij}, (\mu'_y)_{ij}$ для дальнейших вычислений.

5 шаг. Вычислим сеточные функции $S_{ij}, R_{ij}, i = \overline{-N, N}, j = \overline{-L, L}$.

6 шаг. Присвоим $V_{kj}^{|k|} = S_{kj}, k = \overline{-2N, 2N}, j = \overline{-L, L}$.

7 шаг. Присвоим значения $V_{kj}^{|k+1|}, V_{kj}^{|k-1|}$ по формуле (14), (15).

8 шаг. Вычислим значения $V_{ij}^k, i = \overline{-N+1, N-1}, j = \overline{-L+1, L-1}, k = \overline{3, 2N}$ по формуле (12).

9 шаг. Присвоим $F(k, j) = V_{oj}^k$ для решения обратной задачи. Это сеточная функция является дополнительной информацией обратной задачи.

10 шаг. Выводим необходимые графики.

Заключение. Построен конечно-разностный алгоритм решения прямой задачи геоэлектрики с мгновенным и шнуровым источниками для дальнейшей численной реализации алгоритма.

Список литературы

1. Самарский А. А. Теория разностных схем [Текст] / А.А.Самарский. - М.: Наука, 1977. - 656 с.
2. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики [Текст] / О.А.Ладыженская. -М.: Наука. - 1983. - 407 с.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. - М.: Наука, 1988. - 728 с.
4. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач [Текст] / А.Н.Тихонов, В.Я.Арсенин. - М.: Наука, 1979. - 285 с.
5. Гончарский А. В., Черепашук А. М., Ягола А. Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики [Текст] / А.В.Гончарский, А.М.Черепашук. - М.: Наука, 1978. - 335 с.
6. Вабищевич П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики [Текст] / П.Н.Вабищевич. - М.: Наука, 2009. - 480 с.
7. Алексеев А. С., Михайленко Б. Г., Чеверда В. А. Численные методы решения прямых и обратных задач теории распространения волн [Текст] /



А.С.Алексеев, Б.Г.Михайленко, В.А.Чеведа // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики. – Новосибирск: ВЦ СОАН СССР, 1983. - С. 165-172.

8. Антоненко О. Ф. Обращение одной разностной схемы для решения одномерной динамической задачи сейсмологии [Текст] / О.Ф.Антоненко // Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. - М.: Наука, 1967. – С. 92-98.

9. Баев А. В., Бушков С. И. Численное решение обратной задачи для волнового уравнения методом регуляризованного обращения разностной схемы [Текст] А.В.Баев, С.И.Бушков // Вестник МГУ. Сер. 15. ВМК, 1986. - №4. - С. 52-54.

10. Кабанихин С. И. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений [Текст] С.И.Кабанихин. – Новосибирск: Наука, 1988. – 166 с.

11. Романов В. Г., Кабанихин С. И. Обратные задачи геоэлектрики [Текст] / В.Г.Романов, С.И.Кабанихин. – Новосибирск: Наука, 1991. -304 с.

12. Танана В. П. Проекционные методы и конечно-разностная аппроксимация линейных некорректных задач [Текст] / В.П.Танана // СМЖ. – 1975. – Т.16, №6.- С. 1301-1307.

13. Kabanikhin S. I., Satybaev A. D., Shishlenin M. A. Direct Methods of Solving Multidimensional Inverse Hyperbolic Problems. Leiden, Boston, 2004, 180 pages.

14. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи [Текст] С.И.Кабанихин. – Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009. -- 458 с.

15. Сатыбаев А. Дж. Конечно-разностное регуляризованное решение обратных задач гиперболического типа [Текст] А.Дж.Сатыбаев. – Ош: Ошоблтипография, 2001. - 143 с.

16. Baranovet V., Kunetz G. Film synthetique avec reflexions multiples theorie et calcul pratique. Geophysical prospecting , June. 1960, V. 8, №2, p. 315-325.

17. Михайленко Б.Г. Математические модели и численное моделирование в сейсморазведке [Текст] / Б.Г.Михайленко // Математическое моделирование в геофизике.- Новосибирск: Наука. Сиб.отд-ние, 1988. - С.51-64.