ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

УДК 517.962, 517.956.3

А.Ж. КОКОЗОВА
A.ZH. KOKOZOVA
E.mail. ksucta@elcat.kg

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВУМЕРНОЙ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ И ИХ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

MATHEMATICAL MODELS OF TWO-DIMENSIONAL DIRECT AND INVERSE PROBLEMS OF TELEGRAPH EQUATIONS AND THEIR NUMERICAL METHODS OF DECISION

Бул макалада экилик телеграфтык теңдеменин математикалык модели тургузулган. Баштапкы жана чектик шарттары түзүлгөн. Экилик телеграфтык тендемеге түз жана тескери маселе коюлган. Телеграфтык теңдеменин экилик түз жана тескери маселелеринин сандык усулдары изилденген жана анализденген. Практикалык көз караштa бул маселелердин чечими ченем айырмалык усул менен чыгарылышы эң жакшы усул экени аныкталган, анткени ал усул телеграфтык теңдеменин мүнөздөмөсүн колдонот.

Чечүүчү сөздөр: *математикалык модель, электромагниттик толкундар, телеграфтык тендеме, түз жана тескери маселелер, ченем айырмалык усул, усулдарды анализдөө.*

В данной статье построена математическая модель двумерного телеграфного уравнения. Составлены начальные и граничные условия. Ставится прямая и обратная задача для двумерного телеграфного уравнения. Изучены и проанализированы численные методы решения двумерных прямых и обратных задач телеграфного уравнения. Выяснено, что с практической точки зрения численное решение этих задач конечно-разностным методом является наиболее лучшим методом, т.к. он использует характеристики телеграфного уравнения.

Ключевые слова: *математическая модель, электромагнитные волны, телеграфное уравнение, прямая и обратная задача, конечно-разностный метод, анализ методов.*

In this paper, a mathematical model of two-dimensional telegraph equation.Compiled by the initial and boundary conditions.The putsa direct and inverse problem for the two-dimensional telegraph equation. Studied and analyzed numerical methods solving two-dimensional direct and inverse problems of the telegraph equation. It found that from a practical point of view of the numerical solution of these tasks, the finite difference method is the most best method, because it uses characteristics of the telegraph equation.

Key words: *mathematical model, electromagnetic waves, telegraph equation, direct and inverse problems, finite difference method, methods of analysis.*

Введение. Волноводы образованные двумя изолированными друг от друга проводниками в виде пластин называются двухпроводными поверхностными волноводами. А когда двухпроводный волновод очень тонкий, т.е. когда расстояние между этими проводниками малы по сравнению с длиной волн, то в таком волноводе распространения волн описываются телеграфным уравнением. Телеграфное уравнение также является одним из упрощенных видов системы уравнения Максвелла.

Математическая модель двумерного телеграфного уравнения

Если верхний проводник электрически изолирован от нижнего проводника, то в таком случае в нижнем проводнике будет отсутствовать ток, тогда распространение волн описывается основой двумерного телеграфного уравнения

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$\frac{\partial}{\partial t} q + \frac{\partial}{\partial x} j_x + \frac{\partial}{\partial y} j_y = 0, \qquad (1)$$

j_x j_y - поверхностные плотности токов,

где ***q***- поверхностная плотность заряда,

$$q = \int_{-\infty}^{0} \rho \partial z, \qquad j_x = \int_{-\infty}^{0} i_x \partial z, \quad j_y = \int_{-\infty}^{0} i_y \partial z,$$

ρ - объемная плотность заряда, i_x, i_y - проекции объемной плотности тока.

Объемная плотность заряда в проводнике дается формулой

$$\rho = divD, \qquad (2)$$

Если ток проводимости преобладает над токами смещения в проводнике, то второе уравнение Максвелла будет в виде

$$rot\, H = i, \qquad (3)$$

где ***D*** – электрическая индукция, ***H***- напряженность магнитного поля, ***i*** – объемный ток.

В этом случае горизонтальные компоненты уравнения (3) будут в следующем виде

$$\frac{\partial}{\partial y} H_z - \frac{\partial}{\partial z} H_y = i_x, \qquad \frac{\partial}{\partial z} H_x - \frac{\partial}{\partial x} H_z = i_y, \qquad (4)$$

где H_z, H_y, H_x - проекции напряженности магнитного поля H.

При $H_z = 0$, означает электромагнитное поле вертикально поляризовано, проинтегрируем (4) по вертикальной толщине проводника и получим на его поверхности выражения

$$H_x(0) = j_y, \qquad H_y(0) = -j_x, \qquad (5)$$

Соотношения формул (1)-(5) выведены для одного проводника, теперь рассмотрим эти параметры для двух проводников.

Введем напряжения $u(x, y)$, когда плоская модель волновода определена по формуле

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} E_z(x, y, z) dz, \qquad (6)$$

где E_z - проекция объемной напряженности электрического поля E.

Поверхностная плотность заряда q и $u(x, y)$ - напряжения нижнего проводника относительно верхнего проводника связана по формуле

$$q = Cu(x, y), \qquad (7)$$

где ***C*** - поверхностная плотность емкости, и она является первым параметром телеграфного уравнения.

Вторым параметром телеграфного уравнения является ***L***- локальная индуктивность и она с $u(x, y)$ связана по формуле

$$gradu = -L \frac{\partial}{\partial t} j, \qquad (8)$$

$$gradu = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y},$$ e_x, e_y - орты по x и y.

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com
ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Локальная индуктивность относится к точке на общей поверхности проводников и меняется при переходе от одной точки к другой.

L - матрица из-за анизотропии и в этом случае необходимы две различные электромагнитные поля.

Дифференцируем уравнении (7) и (8) по времени $\boldsymbol{t}$ и подставим в них вместо поверхностей заряд $q = Cu$ и при этом учитываем формулу (1) и формулу $\frac{\partial}{\partial t} j = -L^{-1} grad\ u$ и получим двумерное телеграфное уравнение:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} Cu(x,y,t) = div j \cdot L^{-1} grad\, u(x,y,t), \tag{9}$$

где $\quad divj = \frac{\partial}{\partial x} j_x + \frac{\partial}{\partial y} j_y.$

Поверхностная плотность емкости $\boldsymbol{C}$ связана с $\boldsymbol{\varepsilon_0}$- диэлектрическая проницаемость вакуума формулой

$$C = \varepsilon_0 / h_c \tag{10}$$

где $\boldsymbol{h_c}$ – емкостная высота и она равна

$$h_C = \frac{1}{E_z(0)} \int_0^\infty E_z(z) dz. \tag{11}$$

А локальная индуктивность $\boldsymbol{L}$ связана с h_L – индуктивной высотой формулой

$$L = \mu_0 \cdot h_L, \tag{12}$$

где μ_0 - магнитная проницаемость вакуума.

Если h_L – скалярное и рассматриваем изотропную модель индуктивности, то двумерное телеграфное уравнение в гармонической во времени полей будет

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{1}{h_L(x,y)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{1}{h_L(x,y)} \cdot \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) + k^2 \cdot \frac{1}{h_C(x,y)} u(x,y) = 0, \tag{13}$$

В двумерном телеграфном уравнении переменными являются напряжения, поверхностные плотность емкости и локальная индуктивновность.

Индуктивная высота и емкостная высота связаны формулой

$$h_L = h_C + \frac{i}{k}\left(\delta_g + \delta_i\right) - \frac{h}{2}\delta_i\left(\delta_i - \delta_g\right), \tag{14}$$

где $\boldsymbol{i}$- ток, δ_g, δ_i - приведенные поверхностные импедансы нижнего и верхнего проводника соответственно, $\boldsymbol{h}$- расстояние между обкладками.

Индуктивная высота в кусочно-однородной ионосфере определяется по формуле

$$h_L = h + \frac{i}{k}\left(\delta_g + \delta_i\right) - \frac{h}{3}\left(\delta_g^{\,2} + \delta_i^{\,2} - \delta_g \delta_i\right), \tag{15}$$

В однородной анизотропной среде двумерное телеграфное уравнение будет

$$\frac{1}{h_{L,xx}} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{1}{h_{L,yy}} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \left(\frac{1}{h_{L,xy}} + \frac{1}{h_{L,yx}}\right) \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{k^2}{h_C}\left(u + u_{cm}\right) = 0 \tag{16}$$

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com
ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

где $h_L = \dfrac{L}{\mu_0}$, $h_C = \dfrac{\varepsilon_0}{C}$, $h_{L,xx}$ - элементы матрицы высоты h_L по xx, $u_{cm}(x,y) = u_{cm,0}\delta(x)\delta(y)$,

$u_{cm,0}$ - сторонний источник в точке 0, $\delta(x)$- дельта функция Дирака.

В случае сторонним током выступает e_{cm} - стороннее векторное удельное напряжение, формула (16) имеет вид

$$\frac{1}{h_{L,xx}}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{h_{L,yy}}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{1}{h_{L,xy}} + \frac{1}{h_{L,yx}}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{k^2}{h_C}u(x,y) + \frac{1}{h_{L,xx}}\cdot\frac{\partial e_{cm,x}}{\partial x} + \tag{17}$$

$$+\frac{1}{h_{L,yx}}\cdot\frac{\partial e_{cm,x}}{\partial y} + \frac{1}{h_{L,xy}}\frac{\partial e_{cm,y}}{\partial x} + \frac{1}{h_{L,yy}}\frac{\partial e_{cm,y}}{\partial y} = 0$$

где $e_{cm,x,y} = e_{cm,0,x,y}\cdot\delta(x)\delta(y)$.

Двумерное телеграфное уравнение относительно $\boldsymbol{D}$ имеет вид

$$D_{xx}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial D_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial D_{xy}}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial D_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial D_{xy}}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + k^2 Q u(x,y) = 0, \tag{18}$$

где $D_{xx} = \dfrac{\partial}{\partial x}(F_{xx})$, $F_{xx} = \dfrac{1}{NS^2}$, $Q = \dfrac{1}{N}$, $S^2 = 1 - C^2$.

Если источник является вертикальным, то задача двумерного телеграфного уравнения будет в виде

$$div\ \frac{1}{h_L} gradu\ (x,y) + \frac{k^2}{h_C}\left(u(x,y) + u_{cm}(x,y)\right) = 0, \tag{19}$$

где $u_{cm}(x,y) = \dfrac{P_0}{\varepsilon_0}\delta(x)\delta(y)$, P_0- амплитуда дипольного момента вертикального электрического диполя, $u(x,y)$- напряжения, $u_{cm}(x,y)$- сторонние напряжения.

Если h_L^{-1}- горизонтально однородная матрица, то уравнение (19) имеет вид

$$\frac{1}{h_{L,xx}}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{1}{h_{L,yy}}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \frac{k^2}{h_C}\left(u(x,y) + u_{cm}(x,y)\right) = 0, \tag{20}$$

Резюмируя, если напряжение зависит от времени $\boldsymbol{t}$, т.е. $u(x,y,t)$, в случае плоского волновода, двумерное телеграфное уравнение выводится на основе поверхностной формы уравнения заряда в одном из проводников:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{L_{xx}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{L_{xy}}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{L_{yx}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{L_{yy}}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}C\right]u(x,y,t) = 0, \tag{21}$$

где $L_{xx}^{-1}, L_{xy}^{-1}, L_{yx}^{-1}, L_{yy}^{-1}$ - элементы матрицы, обратной матрицы локальной индуктивности.

В случае L и **C** получены из рассматриваемого электромагнитного поля, двумерное телеграфное уравнение будет точным, L и $\boldsymbol{C}$ в уравнении Максвелла являются диэлектрической и магнитной проницаемости.

Электромагнитное поле $\boldsymbol{D}$ связано с напряжением $u(x,y,t)$, а плотность $\boldsymbol{j}$ с $\boldsymbol{H}$

$$D_z(0) = Cu(x,y,t), \quad -H(0) = j_x, \quad H_x(0) = j_y \tag{22}$$

Задачи двумерного телеграфного уравнения

Двумерное телеграфное уравнение (21) и начальные условия (22) можно получить из системы уравнений Максвелла. Выводим его.

E - напряженность электрического поля, ***H*** - напряженность магнитного поля, ***B*** - магнитная индукция, ***D*** - электрическая индукция, которые образуют электромагнитное поле. Они связаны полной системой уравнений Максвелла, которая дается следующей математической моделью:

$$rotH = \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j, \tag{23}$$

$$rotE = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}, \tag{24}$$

$$divB = 0, \tag{25}$$

$$divD = 4\pi\rho, \tag{26}$$

где j -объемная плотность токов проводимости, ρ - объемная плотность зарядов, ***c***-скорость распространения волн. Пусть ρ ***=0***. Параметры ***D, B, j*** связаны с ε, μ - электрическая и магнитная проницаемость, σ -проводимость среды следующими формулами

$$D = \varepsilon E, \tag{27}$$

$$B = \mu H, \tag{28}$$

$$j = \sigma E. \tag{29}$$

Применим операцию rot к (27) и (29), тогда $rotD = \varepsilon rotE$, $rotj = \sigma rotE$, а также к (23) $rotrotH = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(rotD) + \frac{4\pi}{c} rotj$, подставляя предыдущие полученные в последнее уравнение получим: $rotrotH = \frac{\varepsilon}{c} rotE + \frac{4\pi}{c}\sigma rotE$.

Учитывая, что $rotrotH = graddivH - \Delta H$, а также $divH = 0$ из последнего уравнения получим телеграфное уравнение

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\Delta H - \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{30}$$

c - скорость распространения электромагнитных волн в среде.

Постановка задачи двумерного телеграфного уравнения

Таким образом двумерная передача напряженности магнитного поля по пластинам, или двумерное телеграфное уравнение затухающего волнового процесса описывается через математическую модель следующего вида

$$H''_{tt}(x,y,t) = \frac{c^2(x,y)}{\varepsilon(x,y)\mu(x,y)}\Delta H - \frac{\sigma(x,y)}{\varepsilon(x,y)} H'_t(x,y,t), \tag{31}$$

где $\Delta H = H''_{xx} + H''_{yy}$ - оператор Лапласа.

Для нахождения единственного решения уравнения (31) задается начальное и граничное условие вида

$$H(x,y,t)\big|_{t<0} \equiv 0, \quad H'_x(x,y,t)\big|_{x=0} = h(y)\delta(t) + r(y)\theta(t), \quad y \in [D,D], t \in [0,T], \tag{32}$$

где $\delta(t)$, $\theta(t)$, - дельта и тета функция Дирака и Хевисайда соответственно.

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

Первое условие (32) означает, что до некоторого времени $t=0$ электромагнитная среда находится в состоянии покоя и с этого момента времени начнутся электромагнитные волновые процессы.

Второе условие (32) на границе $x=0$ действует мгновенный источник с функцией $r(y)$ и шнуровой источник с функцией $h(y)$, и вследствии чего начинаются электромагнитные процессы, волны.

Двумерная прямая задача телеграфного уравнения

Найти функцию $H(x,y,t)$ - напряженности магнитного поля из уравнений (31) и начальных условий (32) при известных значениях $c^2(x,y)$, $\varepsilon(x,y)$, $\mu(x,y)$ $\sigma(x,y)$, а также при известных функциях $h(y)$ и $r(y)$.

Двумерная обратная задача телеграфного уравнения

Найти один из физических параметров $\left(c^2(x,y)\middle|\varepsilon(x,y)\middle|\mu(x,y)\middle|\sigma(x,y)\right)$ при известных значениях функций $h(y)$, $r(y)$, а также при задании дополнительной информации о решении прямой задачи вида

$$H(x,y,t)\big|_{x=0} = f(y,t), \qquad y\in[-D,D], t\in[0,T]. \tag{33}$$

Численные методы решений прямых задач телеграфного уравнения рассмотрены в следующих монографиях [1,2], [3], [4], а сеточные разностные методы решения рассмотрены в монографиях [5],[6,7].

Численные методы решения обратных задач, в том числе для обратной задачи телеграфного уравнения, разрабатываются сравнительно недавно, поэтому и литератур, и монографий в этом направлении совсем немного.

Перечислим наиболее часто применяемые методы решения обратных задач [8].

- Итерационные методы решения обратных задач, метод Ньютона-Канторовича, метод Ландвебера, Зейделя и другие, являются последовательными решениями обратной задачи шаг за шагом, процесс можно наблюдать, но здесь количество итераций увеличивается на два раза чем например конечно-разностные методы.
- Оптимизационные методы решения обратных задач, также являются одним из видов итерационного метода, имеют все преимущества итерационного метода, последовательно находят наиболеее приближенные решения, но тоже включают в себя многократное решение соответствующих прямых задач.
- Решение обратных задач динамическим методом Гелфанда-Левитана, является наиболее приемлемым методом с точки зрения практики и приложения, но эти методы не работают на сложные многомерные задачи.
- Методы обращения разностных схем являются наиболее наглядным и удобным, решения обратной задачи, осуществляется шаг за шагом, процесс решения можно наблюдать, что очень удобно для прграммистов, операторов, пользователей.

Здесь необходимо ставить условие на шаг сетки для получения приближенного устойчивого решения.

- Для решения обратных задач существует метод решения уравнений Вольтерра.

Обычно, обратные задачи сводятся к операторному уравнению Вольтерра I рода, который является трудноpешаемым уравнением.

С другой стороны, при некоторых условиях, ограничениях обратные задачи сводят к операторному уравнению Вольтерра II рода, который является легко решаемым уравнением.

Численные методы решения обратных задач рассмотрены в монографиях [8], [9], [10].

Заключение. В данной работе подробно и полностью описан вывод двумерного телеграфного уравнения. По ходу в статье описана актуальность решения задач телеграфных уравнений и их применимость.

В данной статье разработана математическая модель двумерного телеграфного уравнения, составлены начальные и граничные условия уравнения.

Поставлены прямые и обратные задачи для двумерного телеграфного уравнения, подробно приведены их численные методы решения с указанием монографий, а также проанализированы эти методы.

Отметим, что с точки зрения приложения электродинамики наиболее приемлемым и наглядным методом является конечно-разностный метод. Но применение этого метода требует необходимость устанавления устойчивости решения.

Но для них отдельные статьи, работы и отдельный разговор.

Список литературы

1. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики [Текст] / О.А.Ладыженская. – М: Наука, 1983. – 407 с.
2. Ладыженская О.А. Глобально - устойчивые разностные схемы и их аттракторы [Текст] / О.А.Ладыженская. - М.: 1991.
3. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных [Текст] / В.П.Михайлов. – М.: Наука, 1976. - 391 с.
4. Годунов С.К. Уравнение математической физики [Текст] / С.К.Годунов. – М.: Наука, 1971. - 416 с.
5. Тихонов А.Н. Уравнение математической физики [Текст] / А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. - М.: Изд-во МГУ, 2004. - 798 с.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем [Текст] / А.А.Самарский. – М.: Наука, 1977.
7. Самарский А.А. Численные методы математической физики [Текст] / А.А.Самарский, А.В.Гулин. - М.: Научный мир, 2000.
8. Кабанихин С.И. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений [Текст] / С.И.Кабанихин. – Новосибирск: Наука, 1988. - 166 с.
9. Гончарский А.В. Численные методы решения обратных задач астрофизки [Текст] / А.В.Гончарский, А.М.Черепашук, А.Г.Ягола. – М.: Наука, 1978. - 335 с.
10. Самарский А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики [Текст] / Изд. 3-е// А.А.Самарский, П.Н.Вабишевич. –М.: Издательство ЛКИ, 2009. – 480с. djvu pdf.