ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА И ФИЗИКА

УДК 519.6:550.34(575.22)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН ЮГА КЫРГЫЗСТАНА

Алимканов Амангелди Арапбаевич, *аспирант кафедры «ИТиУ» ОшТУ Кыргызстан, 714018, г.Ош, ул.Исанова 81, ОшТУ, Моб:0554554954,* e-mail: dr.amangeldy78@mail.ru

Аннотация. В данной статье разработана математическая модель волновых процессов землетрясений Юга Кыргызстана. Построены постановка и начальные, граничные условия задачи. Приведены численные методы решения прямых и обратных сейсмических задач, а также эти методы проанализированы.

Автором выявлен, с точки зрения практической задачи сейсмики, наиболее лучшим методом является конечно-разностный метод, у которого необходимо установить устойчивость решения.

Ключевые слова. Математическая модель, сейсмические волны, уравнение сейсмики, прямые и обратные задачи, численные методы, анализ методов.

MATHEMATICAL MODELS OF PROCESSES DISTRIBUTION SEISMIC WAVES IN SOUTHERN KYRGYZSTAN

Alimkanov Amangeldi Arapbaevich, *a graduate student named OshTU, Kaf. «ITandM» Kyrgyzstan, 714018, Osh, st.Isanova 81 OshTU, Моб:0554554954,*
e-mail: dr.amangeldy78@mail.ru

Abstract. This article developed a mathematical model of wave processes of earthquakes south of Kyrgyzstan. We construct the initial and boundary conditions of the problem. Numerical methods for solving direct and inverse seismic problems, and these methods are analyzed.

Revealed, from the point of view of the practical problems of seismology, the best is the most finite-difference method, in which the need to establish sustainability solutions.

Keywords: A mathematical model of seismic wave equation seismic, direct and inverse problems, numerical methods, methods of analysis.

Введение. Землетрясение. Землетрясения активно продолжают действовать на поверхности Земли нашей страны, где местоположение расположено в горном массиве. Известно, что землетрясение – это тектонические деформации земной коры, из-за накапливающегося напряжения, которые выходят на поверхность Земли в виде толчков в разных силах.

Внутренние процессы Земли постоянно и непрерывно меняются и конечно они происходят очень медленно, постепенно, а земные поверхности то поднимаются, то опускаются.

Известно, что вся территория Кыргызстана находится под угрозой землетрясения, а Юг Кыргызстана еще более под угрозой, т.к. на Юге находятся относительно молодые Алайские, Памирские хребты.

Задачи возникновения землетрясений и их решения до сих пор остаются не решенными, хотя этой проблемой занимаются многие ведущие ученые мира, проводят исследования со всеми возможностями и техникой, аппаратурой, приборами, даже животными и природными явлениями.

Активность землетрясений связана с сейсмоактивными молодыми, горными массивами на территории Кыргызской Республики и для изучения их создана единая служба сейсмических наблюдений состоящих из многих сейсмостанций.

На активных участках Юга Кыргызстана также расположены сейсмические станции – ЕССН, которые ведут записи магнитуды сейсмического процесса, параметры земной среды при ощущении амплитуды землетрясения.

Конечно, природные катаклизмы, в том числе землетрясения, приносят невосполнимый ущерб: материальный, экономический, психологический, а самое главное приносят человеческие жертвы.

О мощных землетрясениях и о разрушениях будет отдельный разговор и отдельная статья.

Постановка задачи. ***Исследовать сейсмические активности Южного региона Кыргызстана, сейсмические зоны территории, включающих в себя Алайские, Памирские, даже Гималайские горные хребты.***

Цель настоящей работы является построение математических моделей сейсмических волн происходящих при землетрясении на Юге Кыргызстана, выявить их особенность от других регионов Кыргызстана, а также создать вычислительный алгоритм математических моделей, написать компьютерные программы для их реализации, построения графиков.

Походу, конечно разработать новые долгосрочные прогнозы и создать безопасность от землетрясений.

Обзор исследований. От очагов землетрясений распространяются сейсмические волны на поверхности Земли, в основном два вида волн: поперечные и продольные. Эти волны фиксируются в сейсмограмме первыми, в начале продольные волны, затем поперечные S-волны.

Кроме них имеются сейсмические волны Рэлея и Лява (L-волны).

Наука о землетрясениях, об их очагах, о распространении сейсмических волн в среде называют сейсмологией, и она изучает также место, силу, и время возникновения этих явлений, ход исследований прогнозируемых процессов.

Разработка математических моделей землетрясений одна из актуальных проблем, но вместе с тем очень трудная задача, так как они происходят быстро, внезапно, продолжаются короткое время.

Для получения математических моделей сейсмических волн очень важны данные сейсмограмм, которые фиксируются при землетрясениях.

На основе результатов полевых условий сейсмичности зон и сопоставления опыта лабораторного моделирования составляются модели землетрясений.

Приведем основные модели последствий этого явления в краткости.

1. Модель лавинно-устойчивого трещинообразования - суть состоит в том, что изучаются последствия на основе трещин Земной поверхности в различных масштабах.

2. Дилатантно-диффузионная модель – основана на поступлении воды в очаговую зону будущего землетрясения.

3. Алгоритм КН – ретроспективный анализ – основан на ретроспективном анализе каталогов землетрясений.

Все изученные исследования происхождения землетрясений сводятся к тому, что необходимо анализировать, затем прогнозировать будущие такие явления. Различают три вида прогнозов: долгосрочный, среднесрочной и краткосрочный, что и названия говорят сами за себя..

Математические модели процесса распространения сейсмических волн.

Для составления математических моделей изучают объемные силы, напряжения и смещения поверхности Земли.

Смещения от сейсмического источника представляет собой функцию Грина динамической теории упругости.

Пусть единичный пульс приложен в точке $x = \xi$ и в момент времени $t = \tau$ в направлении $\vec{n}$. Тогда функция Грина $G_i(x, t, \xi, \tau)$ будет i компонентной смещения поверхности Земли.

А математическая модель смещения почвы при землетрясении задается уравнением [7]:

$$\rho * \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{ijkl} \frac{\partial G_k}{\partial x_j} \right) + \delta_i \delta(x - \xi)\delta(t - \tau), \tag{1}$$

где ρ – плотность среды.

Чтоб однозначно определить решение уравнения (1) необходимо задать начальные и граничные условия.

Когда граничные условия не зависят от времени, то граничные условия записываются в виде:

$$G(x, t, \xi, \tau) = G(x, t - \tau, \xi, o) = G(x, -\tau, \xi, -t) \tag{2}$$

Конечно, практическое вычисление функции G динамической теории упругости связаны с большими трудностями, поэтому решают уравнения (1) для простейших случаев (однородная среда, изотропные тела, неограниченность и т.д.), а в неоднородных средах расстояния между источником и сейсмограмм при больших расстояниях.

Рассмотрим в упругом теле объемом V два поле смещений при различных начальных условиях в момент времени $t = 0$:

№ п/п	Поля смещения	Объемные силы	Граничные условия	Напряжение на поверхностях
1	$u(x,t)$	f	S	$\mathrm{T}(u,n)$
2	$v(x,t)$	g	S	$\mathrm{T}(v,n)$

Пусть существует момент времени τ_0, для которого $u(x,t) = 0$, $v(x,t) = 0$ в V, следовательно $\dfrac{du(x,y)}{dt} = \dfrac{dv(x,y)}{dt} = 0$, тогда свертка равно нулю, т.е.

$$\int_{-x}^{x} \rho[u''(t) * v(\tau - t) - u(t) * v(\tau - t)]dt = 0 \tag{3}$$

Пусть поле смещения $u(x,t)$ удовлетворяют условию

$$\rho u'' = f + (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla u) - \mu \nabla X(\nabla X u) \tag{4}$$

λ, μ – коэффициенты Ламэ, f – сила, ∇ - оператор. Пусть также

$$f = \nabla \Phi + \nabla X \psi;\ u'(x,o) = \nabla X \mathrm{B};\ u(x,o) = \nabla C + \nabla X D, \tag{5}$$

Тогда существуют потенциалы φ, ψ для $u(x,t)$, обладающие следующими потенциалами:

$$u = \nabla \varphi + \nabla X \psi; \tag{6}$$

$$\nabla u = 0; \tag{7}$$

$$\ddot{\varphi}=\frac{\Phi}{\rho}+\alpha^2\nabla^2\varphi,\quad \alpha^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho}, \tag{8}$$

$$\ddot{\varphi}=\frac{\psi}{\rho}+\beta^2\nabla^2\psi,\quad \beta^2=\frac{\mu}{\rho}, \tag{9}$$

$\nabla\varphi$ и $\nabla X\psi$ называются соответственно P и S - компонентами поля смещения u.

В изотропной среде из упругих модулей остается только λ, μ - и они называются коэффициентами Ламэ.

E – модуль Юнга, связь между нормальным напряжением и продольной деформацией в стержне;

σ – коэффициент Пуассона, отношение поперечной и продольной деформацией стержня при его продольном расторжении или сжатии.

μ – коэффициент Ламэ – связь между деформацией скошения прямого угла;

λ – коэффициент Ламэ – связь между деформациями сжатия – расширения и нормальными напряжениями.

Приводим зависимости модулей для изотропной среды:

$$\mathrm{K}=\frac{\mathrm{E}}{3(1-\sigma)}=\frac{2\mu(1+\sigma)}{2(1-\sigma)}=\lambda+\frac{2}{3}\mu; \tag{10}$$

$$\mu=\frac{\mathrm{E}}{2(1+\sigma)}=\frac{3\mathrm{K}(1-\sigma)}{2(1+\sigma)}=3(\mathrm{K}-\lambda)/2=\frac{\lambda(1-2\sigma)}{2\sigma}; \tag{11}$$

$$\lambda=\frac{\sigma\mathrm{E}}{(1+\sigma)(1-\sigma)}=\frac{3\mathrm{K}\sigma}{1+\sigma}=\mathrm{K}-\frac{2}{3}\mu=\frac{2\sigma\mu}{1-2\sigma}. \tag{12}$$

где K – модуль объемного сжатия.

Между дилатацией $\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial z}$ и составляющими внешними массовыми силами *X, Y, Z* существует связь:

$$(\lambda+\mu)*\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\Delta u+\rho\mathrm{X}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \tag{13}$$

$$(\lambda+\mu)*\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\Delta v+\rho\mathrm{Y}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \tag{14}$$

$$(\lambda+\mu)*\frac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\Delta\omega+\rho\mathrm{Z}=\rho\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}; \tag{15}$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

Отсутствие внешних сил следует *X=Y=Z=0*, а составляющие вектора $rot\,\vec{u}=\dot{\omega}$ определяются выражениями:

$$\omega_x=\frac{1}{2}*(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial\omega}{\partial y});\quad \omega_y=\frac{1}{2}*(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial\omega}{\partial x});\quad \omega_z=\frac{1}{2}*(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}), \tag{16}$$

тогда из (13) – (15) следует два уравнения

$$\Delta \upsilon = \frac{1}{v_p^2} * \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad ; \tag{17}$$

$$\Delta \upsilon = \frac{1}{v_S^2} * \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad ; \tag{18}$$

Уравнение (17), (18) являются волновыми уравнениями и описывают распространения продольных и поперечных волн соответственно, а скорости распространения волн определяются формулами:

$$\upsilon_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad ; \quad \upsilon_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad ; \tag{19}$$

Отметим, что

$$\frac{v_S}{v_p} = \gamma = \sqrt{\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}} \ . \tag{20}$$

В совокупности продольные и поперечные волны называют объемными волнами.

Т.о. уравнение движения идеально упругой изотропной среды (13) - (15) можно записать в виде:

$$(\lambda + \mu)\nabla div\vec{u} + \mu\Delta\vec{u} + \nabla\lambda div\vec{u} + [\nabla\mu rot\vec{u}] + 2(\nabla\mu, \nabla)\vec{u} = \rho\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad ; \tag{21}$$

где $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $divu = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$

$$rot = (\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z})\vec{i} + (\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial x})\vec{j} + (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})\vec{k} \ .$$

Уравнение (21) в однородной среде имеет вид

$$(\lambda + \mu)grad \cdot div\vec{u} - \mu rotrot\vec{u} = \rho^2 * \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} , \tag{22}$$

где $gradu = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z})$.

Двумерная задача сейсмики.

Из уравнения движения однородной среды (22) в некоторых упрощениях можно получить уравнение сейсмических волн в двумерном случае, т.е. уравнение зависит от двух пространственных переменных,

$$\rho(x,y) * \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} * (\mu(x,y) * \frac{\partial u(x,t,y)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left[(2\mu(x,y) + \lambda(x,y))\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}\right],$$

$$x \in R_+, \ \ y \in R, \ \ t \in R_+, \tag{23}$$

Для задания начальных и граничных условий рассмотрим широко распространенную в геофизике модель среды, состоящую из двух полупространств $x>0$ и $x<0$ и с границей на плоскости $x=0$. Здесь предположим, что коэффициенты Ламэ и плотность среды гладки в этих полупространствах и имеют конечный скачок при переходе из одного полупространства в другое полупространство.

В качестве начальных и граничных условий уравнения сейсмики (23) задаем следующее:

$$u(x,y,t)\big|_{t\langle 0} = 0, \ , \tag{24}$$

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2}\big[h(y)\delta(t) + r(y)\theta(t)\big], \ y \in [-D, D], \ \ t \in [0, \mathrm{T}], \tag{25}$$

где $h(y)$, $r(y)$ – некоторые функции, $\delta(t)$ - дельта функции Дирака, $\theta(t)$ - тета функция Хевисайда, D, T – некоторые постоянные.

Условие (24) означает, что до определенного времени $t=0$ среда находится в покое и начиная от этого времени начинается сейсмическое движение или волна.

Условие (25) означает, что граница является с мгновенным и шнуровым источником.

Двумерная прямая задача сейсмики. Определить функцию $u(x,y,t)$ из задачи (23) – (25) при известных функциях $\lambda(x,y), \mu(x,y)$ – коэффициентов Ламэ, $\rho(x,y)$ - плотность среды, а также при известных функциях $r(y)$, $h(y)$.

Двумерная обратная задача сейсмики. Определить один из коэффициентов Ламэ или плотность среды, при известных функциях $h(y)$, $r(y)$, а также при задании дополнительной информации о решении прямой задачи вида.

$$u(x,y,t)\big|_{x=0} = f(y,t), \quad y \in [-D, D], \quad t \in [0, \mathrm{T}]. \tag{26}$$

Общая постановка изучаемых обратных задач заключается в следующем: Параметры среды считаются известными в полупространстве $x \le 0$ и неизвестными в полупространстве $x>0$, и их требуется найти по наблюдениям приборов на границе двух сред $x=0$.

Обратная задача (23) – (26) называется коэффициентной обратной задачей, есть и другие обратные задачи, о них можно подробно ознакомиться в монографии [3].

Отметим, что при исследовании обратных задач, в начале необходимо изучить корректность (решение существует, единственно и устойчиво) соответствующих прямых задач.

Численные методы решения прямых задач сейсмики.

Методы решения прямых задач рассмотрены в монографиях О.А.Ладыженской [5], а также монографии В.П.Михайлова [6] и С.К.Годунова [1].

Разностные методы решения прямых задач рассмотрены в монографиях А.Н.Тихонова, А.А.Самарского [11], А.А.Самарского [8,10].

Численные методы решения обратных задач.

Численные методы решения обратных задач исследуются сравнительно недавно и их количество очень мало.

Одним из численных методов решения является конечно-разностный метод, иногда их называют методом обращения разностных схем, и этот метод является более наглядным и более удобным для программистов, т.к. он использует характеристики уравнений.

Конечно, в этом методе необходимо ставить условие на шаги сетки, если нет, то может получиться, что метод не является устойчивым.

Другим методом численных методов решения обратных задач является итерационные методы, такие как метод Ньютона-Канторовича, метод Ландвебера, в этих методах количество итераций увеличивается на два раза.

Динамический метод Гельфанд-Левитана с точки зрения практической задачи более приемлемый метод, но он не работает на сложные многомерные задачи.

Оптимизационные методы решения обратных задач, являясь итерационным методом, включает в себя многократное решение соответствующих прямых задач.

Известно также метод решения обратных задач, так называемый метод решения операторных уравнений Вольтерра. Обычно обратные задачи в некоторых условиях сводятся к операторным уравнения Вольтерра II рода и последнее решается численно.

Численные методы решения обратных задач рассмотрены в монографиях С.И.Кабанихина [4], А.В.Гончарского и др. [2], Самарского А.А., П.Н.Вабищевича [9].

Выводы. Землетрясения, как следует из вышеописанных, приносят человечеству огромный ущерб, вред, жертвы, это означает необходимо изучать их и информацию о них.

Материальный ущерб от землетрясения в Кыргызстане за последние 10 лет, составляет 70 млн.$, а землетрясения в большинство случаях происходят на Юге Кыргызстана, где проживают 51% населения Кыргызстана.

Это означает актуальность, необходимость изучения землетрясений Юга Кыргызстана.

В статье разработана математическая модель волновых процессов землетрясений и получено уравнение сейсмики, составлены также начальные и граничные условия задачи, учитывающие особенности сейсмических волн Юга Кыргызстана.

Подробно приведены численные методы решения прямых и обратных задач сейсмических волн, и они проанализированы.

С точки зрения практики авторы считают, что наиболее приемлемым методом для решения этих обратных задач является, конечно-разностный метод. В этом случае, конечно, необходимо установить устойчивость решения.

Список литературы

1. Годунов С. К. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971. — 416 с.
2. Гончарский А.В., Черепащук А.М., Ягола А.Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. -М.: Наука,1978. - 335 с.
3. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Сибирское научное издательство. Новосибирск, 2009. С.458.
4. Кабанихин С.И. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений - Новосибирск: Наука, 1988. –166 с.
5. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. –М.: Наука. –1983. – 407 с.
6. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1976. – 391 с.
7. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. Москва: Наука, 1981. С.688.
8. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977.
9. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. Изд. 3-е.- М.: Издательство ЛКИ, 2009. – 480с. djvu pdf.
10. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. М.: Научный мир, 2000.
11. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., Изд-во МГУ, 2004. 798с.