УДК 519.3:62 – 50

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БЕЛЛМАНА

Т.П. Самохвалова

Построено приближенное решение функционального уравнения Беллмана в линейной системе с сосредоточенными параметрами методом характеристик.

Ключевые слова: синтез оптимального управления; функциональное уравнение Беллмана; метод характеристик.

THE APPROACHED DECISION OF BELLMAN EQUATION

T.P. Samokhvalova

The approached decision of functional Bellman equation in linear lamped parameters system a method of characteristics is constructed.

Keywords: optimal control; synthesis; functional of Bellman equation; method of characteristics.

Введение. Известно, что в линейно-квадратичных задачах оптимального управления по принципу обратной связи при их решении методом динамического программирования сначала нужно решить функциональное уравнение Беллмана. Решение этого уравнения строят в виде формы второго порядка относительно функции состояния управляемого объекта, это приводит к уравнениям типа Риккати, которые решаются приближенно. Алгоритм управления строится по этому приближенному решению. Свойства приближенных функций Риккати можно увидеть на графиках, но аналитическое выражение этих функций остается скрытым. В данной работе предпринята попытка получить приближенное решение функционального уравнения Беллмана в аналитическом виде с помощью метода характеристик [1–3].

Постановка задачи. Пусть дано линейное неоднородное уравнение в частных производных с начальным условием [1–3]:

$$U_t(t,x)+axU_x(t,x)=f(x), \quad U(0,x)=\phi(x). \qquad (1)$$

Составим соответствующее (1) однородное уравнение:

$$u_t(t,x)+axu_x(t,x)=0, \quad u(0,x)=\phi(x). \qquad (2)$$

Функции $f(x), \phi(x)$ заданы и удовлетворяют условиям, изложенным в [1], $a=const$, $t,x\in R_1$. Учитывая вид уравнения (2), обозначим $P=1$, $Q=ax$ и составим уравнения характеристик в параметрической форме:

$$\frac{dt}{d\tau}=P, \quad \frac{dx}{d\tau}=Q, \quad \tau\in R_1,$$
$$t\big|_{\tau=0}=t_0, \quad x\big|_{\tau=0}=x_0.$$

Запишем уравнение $\frac{dx}{dt}=\frac{Q}{P}=ax$, и решим его.

Получим $x=ce^{at}$, где c – постоянная интегрирования, $c=xe^{-at}$. В однородном уравнении (2)

$$u(t,x)=\phi(xe^{-at}), \qquad (3)$$

выражение xe^{-at} является аргументом функции $\phi(\bullet)$ при построении решения $u(t,x)$. Далее построим функцию $p(\tau,t,x)$ [1–3], которая удовлетворяет следующему уравнению с условием при $\tau=t$:

$$p_t(\tau,t,x)+axp_x(\tau,t,x)=0, \quad p(t,t,x)=x. \qquad (4)$$

Функция $p(\tau,t,x)=xe^{-a(t-\tau)}$ удовлетворяет уравнению (4) и является аргументом для построения решения $U(t,x)$ [1–3]:

$$U(t,x)=\phi(p(0,t,x))+\int_0^t f(p(s,t,x))ds. \qquad (5)$$

В данном случае решение уравнения (1) равно

$$U(t,x)=\phi(xe^{-at})+\int_0^t f(xe^{-a(t-s)})ds. \qquad (6)$$

Теперь запишем модель в обыкновенных производных нагрева токопроводящего стержня с учетом излучения тепла с его поверхности:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + bp(t) + D - \gamma\sigma x^4(t), \quad x(0) = x_0. \quad (7)$$

Функция $x(t)$ характеризует температуру стержня в момент времени t, абсолютно непрерывна, $x(t) \in R_1$, $\forall t \in [0, t_k]$; $p(t)$ – управляющая функция из множества допустимых управлений, удельная мощность постоянного электрического тока, пропускаемого через стержень; x_0 – начальное условие, температура среды, окружающей стержень; A, b – заданные постоянные; D характеризует температуру в цехе (0° C или 20° C); σ – коэффициент Больцмана интегральной излучательной способности материала; γ – вспомогательный множитель.

В численных расчетах для удовлетворительного достижения заданной температуры используем минимизацию квадратичного критерия качества:

$$J = \gamma_1 \int_0^{t_k} Q\left(x(t) - g\right)^2 dt + \\ + \gamma_2 F\left(x(t_k) - g\right)^2 + \beta \int_0^{t_k} u^2(t) dt, \quad (8)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, Q, F, g \geq 0, \quad t_k, \beta > 0$ – постоянные.

Оптимальное управление определяется по формуле [4]

$$p^0(t, x(t)) = -\frac{b}{2\beta} \frac{\partial S(t, x(t))}{\partial x}, \quad (9)$$

где $S(t, x(t))$ – функционал Беллмана, сложная функция от двух функций, $\psi_1(t) \equiv t$, $\psi_2(t) \equiv x(t)$. Уравнение Беллмана при отсутствии излучения тепла ($\gamma = 0$, $D = 0$ в модели (7)) и постоянно действующих возмущений с обращенным временем t имеет вид [4]

$$\frac{\partial S(t, x(t))}{\partial t} = Ax \frac{\partial S(t, x(t))}{\partial x} + \\ + \gamma_1 Q(x - g)^2 - \frac{b^2}{4\beta} \left(\frac{\partial S(t, x(t))}{\partial x} \right)^2 \quad (10)$$

с условием

$$S(0, x) = \gamma_2 F(x(0) - g)^2. \quad (11)$$

Задача. Найти приближенное решение функционального уравнения Беллмана (10), (11) в системе с сосредоточенными параметрами (7)–(9) по формуле (5).

Решение задачи. Используем последовательные приближения и линеаризацию. Первое приближение в (10) выразим по условию (11):

$$S_1(t, x) = \gamma_2 F(x - g)^2. \quad (12)$$

Дифференцируем $S_1(t, x)$ по x и по (10) запишем уравнение для второго приближения

$$\frac{\partial S(t, x(t))}{\partial t} = Ax \frac{\partial S(t, x(t))}{\partial x} + \\ + \gamma_1 Q(x - g)^2 - \frac{b^2}{\beta} \gamma_2^2 F^2 (x - g)^2$$

с условием (11). Это выражение запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial S(t, x(t))}{\partial t} - Ax \frac{\partial S(t, x(t))}{\partial x} = \\ = \left(\gamma_1 Q - \frac{b^2}{\beta} \gamma_2^2 F^2 \right) (x - g)^2, \quad (13)$$

$$S(0, x) = \gamma_2 F(x - g)^2.$$

Уравнение (13) совпадает с уравнением (1) при обозначениях

$$a = -A, \; k = \gamma_1 Q - \frac{b^2}{\beta} \gamma_2^2 F^2, \; f(x) = k(x - g)^2, \\ \phi(x) = \gamma_2 F(x - g)^2, \; U = S. \quad (14)$$

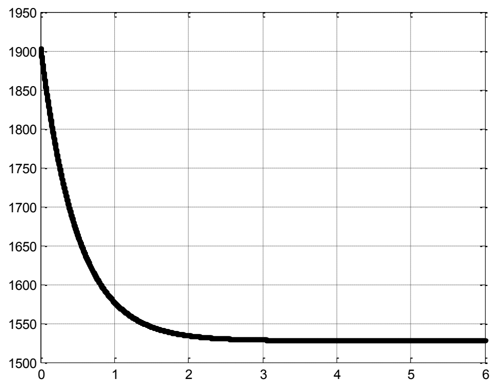

Рисунок 1 – Управление $p(x(t))$

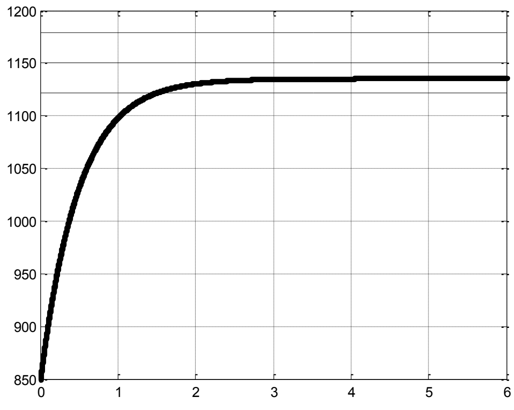

Рисунок 2 – Температура $x(t)$ внутри 5 %-ной зоны

По формулам (5), (6) запишем решение уравнения (1) в случае (14):

$$U(t,x)=\gamma_2 F\left(xe^{-at}-g\right)^2+ \\ +\int_0^t k\left(xe^{-a(t-s)}-g\right)^2 ds. \quad (15)$$

Вычислив интеграл в (15), получим второе приближение $S_2(t,x)$:

$$S(t,x)=\gamma_2 F\left(xe^{-at}-g\right)^2+\left(\gamma_1 Q-\frac{b^2}{\beta}\gamma_2^2F^2\right)\times \\ \times\left[\frac{x^2}{2a}\left(1-e^{-2at}\right)-\frac{2gx}{a}\left(1-e^{-at}\right)+g^2t\right]. \quad (16)$$

Соответствующее второе приближение управляющей функции (9) равно

$$p^0(t,x)=-\frac{b}{2\beta}\left\{\;2\gamma_2F\left(xe^{-at}-g\right)e^{-at}+\right. \\ \left.+\left(\gamma_1Q-\frac{b^2}{\beta}\gamma_2^2F^2\right)\left[\frac{x}{a}\left(1-e^{-2at}\right)-\frac{2g}{a}\left(1-e^{-at}\right)\right]\right\}. \quad 17)$$

Получили форму второго порядка (16) для $S_2(t,x)$ и форму первого порядка (17) для $p_2(t,x)$ относительно $x(t)$. Это согласуется с методом, приводящим к уравнениям Риккати в линейной модели (7) при $\gamma = 0$.

Численные расчеты. В данном примере в (16), (17) $a>0$. Перейдем в (17) к пределу по $\psi(t)\equiv t$ в сложной функции $p^0(t,x(t))$:

$$\lim_{t\to\infty}p^0(t,x)=-\frac{b}{2\beta}\left(\gamma_1Q-\frac{b^2}{\beta}\gamma_2^2F^2\right)\times \\ \times\left(\frac{x(t)}{a}-\frac{2g}{a}\right). \quad (18)$$

По правой части (18) построим приближенный алгоритм управления:

$$p(x(t))=-\frac{b}{2a\beta}\left(\gamma_1Q-\frac{b^2}{\beta}\gamma_2^2F^2\right)x(t)+ \\ +\frac{bg}{a\beta}\left(\gamma_1Q-\frac{b^2}{\beta}\gamma_2^2F^2\right). \quad (19)$$

Управление (19) построено для линейной модели нагрева ($\gamma = 0$). Применим (19) в нелинейной модели нагрева ($\gamma = 1$). Расчеты показывают, что управление (19) переводит температуру нагреваемого стержня в заданную 5 %-ную зону от g = 1150° С (см. рисунки 1, 2).

Величины управления и температуры на интервалах стационарности равны $\tilde{p}=1529.0$; $\tilde{x}=1135.0^0C.$ Эти величины удовлетворительно совпадают с расчетами в [5] по бесконечной системе Риккати, где получено $\overline{p}=1539.7$; $\overline{x}=1149.1^0C.$

Выводы. Методом характеристик во втором приближении функционала Беллмана $S(t,x(t))$ и управления $p^0(t,x(t))$ получено явное выражение от времени *t*, параметров управляемой системы и параметров минимизируемого критерия качества.

Литература

1. *Иманалиев М.И.* Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными / М.И. Иманалиев. Бишкек: Илим, 1992. 112 с.
2. *Иманалиев М.И.* // Доклады АН СССР / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко. 1992. Т. 323. № 3. С. 410–414; 1992. Т. 325. № 6. С. 111–115; 1993. Т. 329. № 5. С. 543–546.
3. *Иманалиев Т.М.* Обоснование и развитие метода дополнительного аргумента для решения дифференциальных уравнений в частных производных: автореф. дис… д-ра физ.-мат. наук / М.И. Иманалиев. Бишкек: Изд-во Турар, 2000. 25 с.
4. *Ройтенберг Я.Н.* Автоматическое регулирование / Я.Н. Ройтенберг. М.: Наука, 1975.
5. *Самохвалова Т.П.* Обоснование алгоритма управления нагревом стержня поликремния с излучением тепла / Т.П. Самохвалова // Труды XI межд. азиатской школы-сем. «Проблемы оптимизации сложных систем», 27 июля – 7 авг. 2015. Новосибирск: ИВММГ СО РАН. 2015. Ч. II. С. 577–583.