

УДК 539.374

## РЕШЕНИЯ В РАЗДЕЛЯЮЩИХСЯ ПЕРЕМЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СТЕПЕННЫХ СРЕД И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

*Д.С. Петухов, И.Э. Келлер*

Изучаются уравнения плоских квазистатических движений степенной среды, допускающие решения в разделяющихся переменных. При задании подходящих граничных условий появляются содержательные и недостаточно исследованные задачи, описывающие течения в сходящихся каналах либо распределение напряжений вблизи кончика трещины.

*Ключевые слова:* степенная среда; ползущие течения; решения в разделяющихся переменных.

## SOLUTIONS WITH SEPARABLE VARIABLES OF MOTION EQUATIONS FOR POWER LAW MEDIA AND THEIR APPLICATIONS

*D.S. Petuhov, I.E. Keller*

The equations of plane creeping motions of power law medium are studied, which admit variable separation. The substantial and insufficiently investigated problems described converging channel flows or stress distribution near the crack tip are appeared under suitable boundary conditions.

*Keywords:* power law medium; creeping flows; solutions with separable variables.

**Введение.** В работе изучается класс инвариантных решений плоских уравнений равновесия несжимаемой среды со степенным реологическим законом, допускающий естественную запись в разделяющихся полярных координатах. Рассматриваемые уравнения в равной степени применимы для описания ползущих течений вязкой степенной жидкости либо деформирования пластического твердого тела со степенным упрочнением. Подобные решения представляют ценность для определения расходно-напорных характеристик ползущих течений ньютоновских жидкостей, энергосиловых параметров процессов обработки металлов давлением [1], концентрации напряжений у кончика трещины в условиях ползучести и пластичности [2, 3]. В настоящей работе уравнения равновесия и совместности записываются в виде однородной квазилинейной системы, что существенно упрощает операции с ними [4] и позволяет качественно исследовать решения нелинейных краевых задач для более глубокого понимания упомянутых выше процессов.

**Представление системы уравнений.** Рассматриваются плоские квазистатические движения несжимаемой нелинейно-вязкой среды со

степенным законом вязкости, подчиняющиеся обезразмеренным уравнениям:

$$\begin{aligned} \partial_x \sigma_x + \partial_y \tau &= 0, \quad \partial_x \tau + \partial_y \sigma_y = 0, \\ \partial_x u + \partial_y v &= 0, \quad \sigma_x = -p + \frac{1}{2} \xi^{m-1} \partial_x u, \\ \sigma_y &= -p - \frac{1}{2} \xi^{m-1} \partial_x u, \quad \tau = \frac{1}{4} \xi^{m-1} (\partial_y u + \partial_x v), \\ \xi &= ((\partial_x u)^2 + \frac{1}{4} (\partial_y u + \partial_x v)^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau$  – компоненты тензора напряжений;  $p$  – гидростатическое давление;  $u$  и  $v$  – компоненты вектора скорости;  $x$  и  $y$  – декартовы ортогональные координаты;  $\partial_x, \partial_y$  – частные производные по ним. Значения показателя степени  $m = 0$  соответствуют идеально пластическому твердому телу,  $m = 1$  – линейно вязкой (ньютоновской) жидкости; между ними располагаются значения, соответствующие реологии некоторых жидкостей и металлов в условиях ползучести при повышенных температурах. В работе будут рассматриваться значения показателя степени  $m \in [0, 1]$ . При необходимости уравнения (1) можно трактовать как уравнения движения несжимаемой пластической среды со степенным упрочнением.

Из уравнений (1) удобно исключить радикал. С этой целью для компонент тензоров напряжений и деформаций скорости записываются выражения

$$\sigma_x = -p - \frac{1}{2}\xi^m \sin\phi, \quad \sigma_y = -p + \frac{1}{2}\xi^m \sin\phi, \quad (2)$$

$$\tau = \frac{1}{2}\xi^m \cos\phi,$$

$$\begin{aligned} \partial_x u &= -\xi \sin\phi, & \partial_y v &= \xi \sin\phi, \\ \partial_y u + \partial_x v &= 2\xi \cos\phi, \end{aligned} \quad (3)$$

гарантирующие пропорциональность этих тензоров и несжимаемость поля скоростей перемещений. Здесь  $\phi$  – удвоенный угол между одной из линий максимальных касательных напряжений и осью  $x$ . Зависимости (2) подставляются в уравнения равновесия, а соотношения (3) совместно с выражением для вихря скорости

$$q = \frac{1}{2}(\partial_x v - \partial_y u) \quad (4)$$

разрешаются в виде

$$\partial_x v = \xi \sin\phi + q, \quad \partial_y u = \xi \sin\phi - q,$$

и трансформируются с помощью соотношений

$$\partial_y(\partial_x u) = \partial_x(\partial_y u), \quad \partial_x(\partial_y v) = \partial_y(\partial_x v),$$

в уравнения совместности деформаций скорости.

В итоге уравнения (1) с учетом (2)–(4) записываются в виде системы однородных квазилинейных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} 2\partial_x p + m\xi^{m-1} \sin\phi \partial_x \xi + \xi^m \cos\phi \partial_x \phi - \\ - m\xi^{m-1} \cos\phi \partial_y \xi + \xi^m \sin\phi \partial_y \phi = 0 \\ 2\partial_y p - m\xi^{m-1} \cos\phi \partial_x \xi + \xi^m \sin\phi \partial_x \phi - \\ - m\xi^{m-1} \sin\phi \partial_y \xi - \xi^m \cos\phi \partial_y \phi = 0 \\ \partial_x q - \cos\phi \partial_x \xi + \xi \sin\phi \partial_x \phi - \sin\phi \partial_y \xi - \\ - \xi \cos\phi \partial_y \phi = 0 \\ \partial_y q - \sin\phi \partial_x \xi - \xi \cos\phi \partial_x \phi + \cos\phi \partial_y \xi - \\ - \xi \sin\phi \partial_y \phi = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Система (5) инвариантна относительно преобразования  $\bar{\xi} = a\xi$ ,  $\bar{q} = aq$ ,  $\bar{p} = a^m p$ ,  $\bar{\phi} = \phi$  с параметром  $a > 0$ , а также поворотов и растяжений в плоскости независимых переменных. Произвольной комбинации таких преобразований соответствует инфинитезимальный оператор

$$X = \beta r \partial_r + \alpha \partial_\phi + 2\alpha \partial_\phi + \xi \partial_\xi + q \partial_q + m p \partial_p, \quad (6)$$

где  $r$ ,  $\phi$  – полярные координаты;  $\alpha$ ,  $\beta$  – произвольные параметры. Оператор (6) при заданных

параметрах  $\alpha$ ,  $\beta$  генерирует подалгебру – элемент оптимальной системы одномерных подалгебр алгебры Ли инфинитезимальных операторов преобразований, допускаемых системой (5).

В работе рассматривается случай  $\alpha = 0$ ,  $\beta \neq 0$ , для которого набор базисных инвариантов преобразования с инфинитезимальным оператором (6) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} z &= -\phi, & f &= r^{-\frac{1}{\beta}} \xi, & h &= r^{-\frac{1}{\beta}} q, \\ g &= r^{-\frac{m}{\beta}} p, & w &= \phi - 2\phi. \end{aligned}$$

Неособенное инвариантное решение

$$f = f(z), \quad h = h(z), \quad g = g(z), \quad w = w(z) \quad (7)$$

удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} 2mg + m\beta f^{m-1} f' \cos w - \beta f^m w' \sin w + \\ + (2\beta + m) f^m \sin w = 0, \\ 2\beta g' - m\beta f^{m-1} f' \sin w - \beta f^m w' \cos w + \\ + (2\beta + m) f^m \cos w = 0, \\ h + \beta f' \sin w + \beta f w' \cos w - \\ - (2\beta + 1) f \cos w = 0, \\ \beta h' + \beta f' \cos w - \beta f w' \sin w + \\ + (2\beta + 1) f \sin w = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Система (8) содержит параметр материала  $m$  и произвольный параметр  $\beta$ .

**Напряжения у кончика трещины.** Представление (7) позволяет изучить асимптотику поля напряжений вблизи кончика трещины в материале со степенной реологией [2, 3]. Система уравнений (8) переписывается в виде

$$\begin{aligned} f' &= \Delta^{-1}((1-m)f \sin w \cos w - \\ - 2mf^{1-m} g \cos w - h \sin w), \\ w' &= \Delta^{-1}(mf^{-1} h \cos w - 2mf^{-m} g \sin w) - \\ - (2 + \beta^{-1}m), \\ g' &= \frac{1}{2}m(1-m)(f^m \cos w + g \sin w) - f^{m-1}g, \\ h' &= (1-m)(f \sin w - h \sin w \cos w) - 2mf^{1-m}g, \end{aligned} \quad (9)$$

удобном для численного решения, где  $\Delta = \beta(m \cos^2 w + \sin^2 w) \neq 0$ . К (9) присоединяются граничные условия на свободных границах разреза

$$(2g - f^m \sin w)|_{z=\pm\pi} = 0, \quad (f^m \cos w)|_{z=\pm\pi} = 0. \quad (10)$$

Задача (9), (10) решалась методом Рунге-Кутты в сочетании с методом пристрелки, для чего решалась начальная задача с двумя условиями (10) в точке  $\phi = -\pi$ , условием нормировки  $f(-\pi) = 1$  и условием

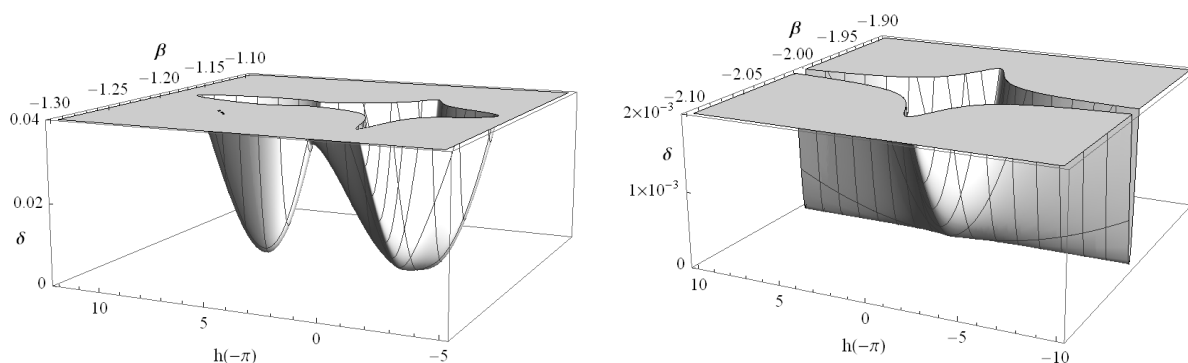


Рисунок 1 – Невязка граничных условий при  $\varphi = \pi$  в зависимости от значений  $h(-\pi) = \lambda$  и  $\beta$  для  $m = 0,2$  (вверху) и  $m = 1$  (внизу)

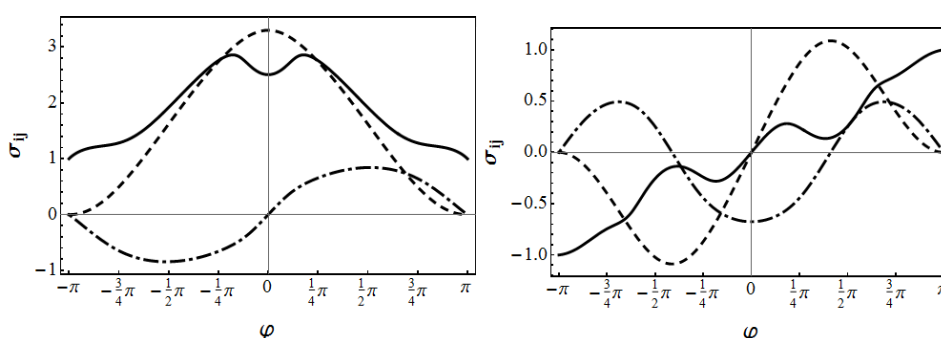


Рисунок 2 – Распределения напряжений для мод нагружения I (слева) и II (справа),  $m = 0,2$ . Сплошная линия – радиальное, пунктирная – окружное, штрихпунктирная – сдвиговое напряжения

$h(-\pi) = \lambda$  для значений параметров из области  $\beta \in [-5, -0.5]$ ,  $\lambda \in [-10, 10]$ . На рисунке 1 приведена невязка граничных условий (10) в точке  $\varphi = \pi$  как функция параметров  $\beta$  и  $\lambda$  для  $m = 0,2$ . Нули невязки позволяют установить два собственных решения (рисунок 2), соответствующих модам I и II нагружения тела с трещиной и отвечающих собственному числу  $\beta = -6/5$ . Эта ситуация является типичной для  $m \neq 1$ . Для сравнения на том же рисунке приведена невязка для  $m = 1$ , линейного случая, имеющего одномерное пространство собственных функций, отвечающее собственному числу  $\beta = -2$ .

Полученный результат означает, что ни при каких нагружениях физически нелинейного тела с трещиной напряженное состояние вблизи кончика трещины не может иметь смешанный характер, что находится в противоречии с общепринятой точкой зрения [5].

**Течения в сходящихся каналах.** При  $\beta = -\frac{1}{2}$  два последних уравнения системы (8) (уравнения

совместности) удовлетворяются тождественно при  $f \cos w = \frac{1}{2}v'(\varphi)$ ,  $f \sin w = v(\varphi)$ . Если рассмотреть течение с  $v_\varphi \equiv 0$ , радиальная компонента скорости представляется в виде  $v_r = r^{-1}v(\varphi)$ , тогда задача нахождения  $v(\varphi)$  сводится к решению уравнения Абеля II рода

$$a(u)t(u)t'(u) = b_2(u)t^2(u) + b_1(u)t(u) + b_0(u),$$

где

$$u'(\varphi) = t(u), \quad v'(\varphi) = u(\varphi)v(\varphi),$$

$$a(u) = -(4 + u^2)(4 + mu^2),$$

$$b_2(u) = (m - 1)u(12 + mu^2),$$

$$b_1(u) = u(4 + u^2)(8m^2 + 4 + (2m^2 + m)u^2),$$

$$b_0(u) = m^2u(4 + u^2)^3.$$

К данной системе присоединяются граничные условия прилипания на стенках канала  $\pm \vartheta$

$$v(\pm \vartheta) = 0.$$

В качестве третьего условия полагалось ограничение расхода

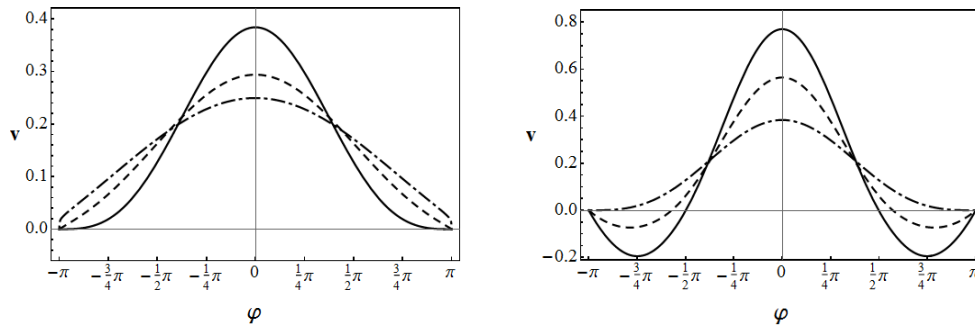


Рисунок 3 – Угловое распределение радиальной скорости в канале с углом раствора  $2\pi$ . Слева: штрихпунктирная линия –  $m = 0.01$ , пунктирная –  $m = 0.3$ , сплошная –  $m = 0.5$ ; справа: штрихпунктирная линия –  $m = 0.5$ , пунктирная –  $m = 0.6$ , сплошная –  $m = 0.62$

$$\int_{-g}^g v d\varphi = Q,$$

где  $Q$  – константа. На рисунке 3 представлены профили азимутального распределения радиальной скорости для  $Q = 1$  и различных значений  $m$ . Для  $m < 0.5$  расчеты показали, что качественный вид распределений не зависит от угла раствора, поэтому на рисунке 3 принято  $g = \pi$ . Установлено, что при превышении значения  $m = 0.5$  картина распределения скоростей качественно изменяется: при  $g \geq g_*(m)$  появляются противотоки. Для  $m = 0.5$  уравнение допускает дополнительное понижение порядка, его решение было исследовано в [1].

**Заключение.** Свойства подобия системы уравнений равновесия и совместности несжимаемой среды со степенной зависимостью интенсивности напряжений от интенсивности деформаций либо скорости деформаций для случая плоской деформации позволяют свести систему к четырем нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка относительно угловых распределений зависимых переменных. Данная запись оказывается оптимальной как для аналитических действий с системой, так и для численного решения краевых задач на ее основе. С ее помощью численно исследовано распределение напряжений у кончика трещины для нелинейного материала, свидетельствующее об отсутствии смешанных мод напряжений. Данный результат побуждает выполнить качественное исследование разрешимости нелинейной задачи на собственные значения. Также численно изучены ползущие те-

чения в сходящихся каналах, используемые при оценках энергосиловых параметров процессов обработки металлов давлением, не исследованные в широком диапазоне параметров материала и процесса, а также вне рамок довольно жесткой гипотезы о радиальном характере течения.

Работа выполнена по программе УрО РАН № 15-10-1-18.

#### Литература

1. Соколовский В.В. Плоское и осесимметричное равновесие пластической массы между жесткими стенками / В.В. Соколовский // Прикладная математика и механика. 1950. Т. 14. Вып. 1. С. 75–92.
2. Rice J.R. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material / J.R. Rice, G.F. Rosengren // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1968. V.16. No. 1. P. 1–12.
3. Hutchinson J.W. Plastic stress and strain fields at a crack tip / J.W. Hutchinson // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1968. V.16. No. 5. P. 337–347.
4. Келлер И.Э. Интегрируемость уравнений равновесия и совместности вязкопластической среды с отрицательной чувствительностью к скорости деформации / И.Э. Келлер // Доклады АН. 2013. Т. 451. № 6. С. 643–646.
5. Shlyannikov V.N. Elastic-plastic mixed-mode fracture criteria and parameters / V.N. Shlyannikov. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2003. 235 p.