УДК 517.97

ПОДВИЖНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ ТОЧЕЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ФРЕДГОЛЬМОВЫМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

А.Т. Эрмекбаева

Исследована задача оптимального управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями в случае, когда колебания происходят под действием точечного подвижного источника. Построен алгоритм полного решения задачи нелинейной оптимизации.

Ключевые слова: функционал; оптимальное управление; нелинейное интегральное уравнение; принцип сжимающих отображений; оптимальный процесс.

SOLUTION OF THE NONLINEAR OPTIMIZATION TASK OF HEAT PROCESSES DESCRIBED BY FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THE MOVABLE CONTROL

A.T. Erkembaeva

It was investigated the problem of optimal control of heat processes, described by integro-differential equations when heat conduction occur under the movable point control. The algorithm of complete solution of nonlinear optimization problem was constructed.

Keywords: functional; optimal control; nonlinear integral equation; contraction mapping principle; optimal process.

1. Постановка нелинейной задачи оптимального управления. Рассмотрим задачу минимизации обобщенного квадратичного функционала

$$I[u(t)] = \int_0^1 [v(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T p^2 [t, u(t)] dt, \quad \beta > 0 \quad (1)$$

на множестве решений краевой задачи

$$v_t = v_{xx} + \lambda \int_0^T K(t, \tau) v(\tau, x) d\tau + \delta(x - x_0(t)) f[t, u(t)], \quad x \in (0, 1), \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

$$v(0, x) = \psi(x), \quad x \in (0, 1), \quad (3)$$

$$v_x(t, 0) = 0, \quad v_x(t, 1) + \alpha v(t, 1) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (4)$$

где $K(t, \tau)$ – заданная функция, она определена в области $D = \{0 \leq t \leq 1, 0 \leq \tau \leq 1\}$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^T \int_0^T K^2(t, \tau) d\tau dt = K_0 < \infty, \quad (5)$$

т. е. $K(t, \tau) \in H(D)$; $\xi(x) \in H(0, 1)$, $\psi(x) \in H(0, 1)$ – заданные функции; $f[t, u(t)] \in H(0, T)$ – заданная функция внешнего источника, которая нелинейно зависит от функции управления $u(t) \in H(0, T)$ и удовлетворяет условию

$$f_u[t, u(t)] \neq 0, \quad \forall t \in (0, T); \quad (6)$$

$\delta(x)$ – дельта-функция Дирака; $x_0(t)$ – заданная функция, которая описывает закон движения точки приложения внешней силы и принимает значения от 0 до 1; λ – параметр; T – фиксированный момент времени, постоянная $\alpha > 0$; $H(Y)$ – гильбертово пространство квадратично суммируемых функций, определенных на множестве Y .

2. Нелинейное интегральное уравнение оптимального управления. Здесь мы продолжаем исследование, начатое в статье [1]. Поэтому сохранены те же обозначения.

В [1] было установлено, что оптимальное управление определяется из соотношения

$$2\beta \frac{p[t, u(t)] \cdot p_u[t, u(t)]}{f_u[t, u(t)]} = \omega(t, x_0(t)). \quad (7)$$

Выписываем функцию $\omega(t, x_0(t))$ ([1], формула (39))

$$\omega(t, x_0(t)) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[-h_n + \int_0^T \varepsilon_n(T, \tau, \lambda) z_n(x_0(\tau)) f[\tau, u(\tau)] d\tau \right] G_n(T, t, \lambda) z_n(x_0(t)),$$

где

$$h_n = \xi_n - \psi_n \left[e^{-\lambda_n^2 T} + \lambda \int_0^T R_n(T, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right], \quad G_n(T, t, \lambda) = e^{-\lambda_n^2 (T-t)} + \lambda \int_0^T Q_n(s, t, \lambda) e^{-\lambda_n^2 (T-s)} ds.$$

Введем обозначение

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T, t, \lambda) z_n(x_0(t)) h_n, \quad (8)$$

$$G[u(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T, t, \lambda) z_n(x_0(t)) \int_0^T \varepsilon_n(T, \tau, \lambda) z_n(x_0(\tau)) f[\tau, u(\tau)] d\tau \quad (9)$$

и $\omega(t, x_0(t))$ перепишем в виде

$$\omega(t, x_0(t)) = 2[h(t) - G(u(t))]. \quad (10)$$

Лемма 1. Функция $h(t)$ является элементом гильбертова пространства $H(0, T)$, т. е. $h(t) \in H(0, T)$.

Доказательство. Учитывая представление (8), и используя неравенство Коши–Буняковского, для суммы имеем неравенство:

$$\int_0^T h^2(t) dt \leq \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} G_n(T, t, \lambda) z_n(x_0) h_n \right)^2 dt \leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2(T, t, \lambda) z_n^2(x_0) \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 dt.$$

Далее на основе следующих вычислений

$$\begin{aligned} & 1) \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2(T, t, \lambda) z_n^2(x_0) dt \leq 2 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\lambda_n^2 (T-t)} + \lambda \int_0^T Q_n(s, t, \lambda) e^{-\lambda_n^2 (T-s)} ds \right)^2 dt \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^T e^{-2\lambda_n^2 (T-t)} dt + \lambda^2 \int_0^T \int_0^T Q_n^2(s, t, \lambda) ds \int_0^T e^{-2\lambda_n^2 (T-s)} ds dt \right) \leq \\ & \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_n^2} \left[1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_n^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T})^2} \right] \leq 2 \left[1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T})^2} \right] \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right); \\ & 2) \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi_n - \psi_n \left[e^{-\lambda_n^2 T} + \lambda \int_0^T R_n(T, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right] \right)^2 \leq 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi_n^2 + 2\psi_n^2 \left[e^{-2\lambda_n^2 T} + \lambda^2 \int_0^T R_n^2(T, s, \lambda) ds \int_0^T e^{-2\lambda_n^2 s} ds \right] \right) \leq \\ & \leq 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi_n^2 + 2\psi_n^2 \left[e^{-2\lambda_n^2 T} + \lambda^2 \frac{K_0}{(\sqrt{2\lambda_n^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T})^2} \frac{1}{2\lambda_n^2} \right] \right) \leq 3 \left\{ \|\xi(x)\|_{H(0,1)}^2 + 2 \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0}{2\lambda_1^2 (\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T})^2} \right) \|\psi(x)\|_{H(0,1)}^2 \right\}, \end{aligned}$$

имеем неравенство

$$\int_0^T h^2(t) dt \leq 2 \left[1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T})^2} \right] \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \times 3 \left\{ \|\xi(x)\|_{H(0,1)}^2 + 2 \left[1 + \frac{\lambda^2 K_0}{2\lambda_1^2 (\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T})^2} \right] \|\psi(x)\|_{H(0,1)}^2 \right\} < \infty,$$

из которого следует утверждение леммы.

Лемма 2. Оператор $G[u(t)]$ переводит пространство $H(0, T)$ в себя.

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$\begin{aligned} \int_0^T G^2[u(t)] dt &= \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} G_n(T, t, \lambda) z_n(x_0(\tau)) \int_0^T \varepsilon_n(T, \tau, \lambda) z_n(x_0(\tau)) f[\tau, u(\tau)] d\tau \right)^2 dt \leq \\ &\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2(T, t, \lambda) z_n^2(x_0(\tau)) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \varepsilon_n^2(T, \tau, \lambda) z_n^2(x_0(\tau)) d\tau \int_0^T f^2[\tau, u(\tau)] d\tau dt \leq \\ &\leq \int_0^T \varepsilon_n^2(T, \tau, \lambda) z_n^2(x_0(\tau)) d\tau \leq 2 \int_0^T \left(e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda \int_0^T R_n(t, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} ds \right)^2 d\tau \leq 4 \int_0^T \left(e^{-2\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda^2 \int_0^T R_n^2(t, s, \lambda) ds \int_0^T e^{-2\lambda_n^2(s-\tau)} ds \right) d\tau \leq \\ &\leq 4 \left(\frac{1}{2\lambda_n^2} + \lambda^2 \frac{K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_n^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T})^2} \frac{1}{2\lambda_n^2} \right) = \frac{2}{\lambda_n^2} \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_n^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T})^2} \right) \\ &\leq 2 \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T})^2} \right) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \times 2 \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T})^2} \right) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \|f[t, u(t)]\|_{H(0,T)}^2 = \\ &= \left(2 \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T})^2} \right) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right)^2 \|f[t, u(t)]\|_{H(0,T)}^2 < \infty, \end{aligned}$$

которое получено непосредственным вычислением.

Лемма 3. Функция $\omega(t, x_0(t))$ является элементом гильбертова пространства квадратично суммируемых функций $H(0, T)$.

Доказательство. Утверждение леммы 3, в силу линейности пространства $H(0, T)$, следует из лемм 1, 2.

Равенство (7), с учетом (8)–(10), перепишем в виде

$$\beta \frac{p[t, u(t)] p_u[t, u(t)]}{f_u[t, u(t)]} + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T, t, \lambda) z_n(x_0) \int_0^T \varepsilon_n(T, \tau, \lambda) z_n(x_0) f[\tau, u(\tau)] d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T, t, \lambda) z_n(x_0) h_n, \quad (11)$$

которое является нелинейным интегральным уравнением. Это уравнение исследуем согласно методике, разработанной проф. А. Керимбековым [2]. Положим:

$$\beta \frac{p[t, u(t)] p_u[t, u(t)]}{f_u[t, u(t)]} = q(t). \quad (12)$$

Лемма 4. Пусть для функций $f(t, u(t))$ и $p(t, u(t))$ выполнено условие

$$\mu_0 = \sup_{t \in (0, T)} \left(\frac{p_u(t, u(t))}{f_u(t, u(t))} \right).$$

Тогда функция $q(t)$ является элементом гильбертова пространства $H(0, T)$, т. е. $q(t) \in H(0, T)$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из неравенства

$$\int_0^T q^2(t) dt = \beta^2 \int_0^T \left(\frac{p[t, u(t)] p_u[t, u(t)]}{f_u[t, u(t)]} \right)^2 dt = \beta^2 \int_0^T \frac{1}{f_u^2[t, u(t)]} p_u^2[t, u(t)] p^2[t, u(t)] dt = \beta \mu_0^2 \int_0^T p^2[t, u(t)] dt < < \beta \mu_0^2 \|p[t, u(t)]\|_{H(0, T)}^2 < \infty.$$

Равенство (12), в силу условия [1]

$$f_u[t, u(t)] \left(\frac{p[t, u(t)] p_u[t, u(t)]}{f_u[t, u(t)]} \right)_u > 0,$$

однозначно разрешается относительно $u(t)$ (см. теорему о неявно заданной функции [3]), т. е. существует функция φ , такая, что

$$u(t) = \varphi[t, q(t), \beta]. \tag{13}$$

Уравнение (11) с учетом (12), (13) перепишем в виде

$$q(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T, t, \lambda) z_n(x_0(t)) \int_0^T \varepsilon_n(T, \tau, \lambda) z_n(x_0(\tau)) f[\tau, \varphi(\tau, q(\tau), \beta)] d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T, t, \lambda) z_n(x_0(t)) h_n$$

или в операторной форме

$$q(t) = \bar{G}[q(t)] = h(t) - G_0[q(t)], \tag{14}$$

где

$$G_0[q] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T, \tau, \lambda) z_n(x_0(t)) \int_0^T E_n(T, \tau, \lambda) f[\tau, \varphi(\tau, q(\tau), \beta)] d\tau.$$

Лемма 5. Оператор $G_0[q]$ отображает пространство $H(0, T)$ в себя.

Доказательство. Утверждение леммы 5 следует из леммы 2.

Лемма 6. Пусть функции $f(t, u(t))$ и $\varphi(t, q(t), \beta)$ удовлетворяют условиям Липшица:

$$\|f[t, u(t)] - f[t, \bar{u}(t)]\|_{H(0, T)} \leq f_0 \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{H(0, T)}, \quad f_0 > 0$$

$$\|\varphi[\tau, q(t), \beta] - \varphi[\tau, \bar{q}(t), \beta]\|_{H(0, T)} \leq \varphi_0(\beta) \|q(t) - \bar{q}(t)\|_{H(0, T)}, \quad \varphi_0(\beta) > 0.$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = 2 \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T})^2} \right) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) f_0 \varphi_0(\beta) < 1$$

оператор $\bar{G}[q]$ является сжимающим.

Доказательство.

Поскольку

$$\|\bar{G}[q] - \bar{G}[\bar{q}]\|_{H(0, T)} = \|h - G_0[q] - h + G_0[\bar{q}]\|_{H(0, T)} = \|G_0[q] - G_0[\bar{q}]\|_{H(0, T)},$$

то утверждение леммы 6 следует из неравенства

$$\|G_0[q] - G_0[\bar{q}]\|_{H(0, T)} \leq 2 \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T})^2} \right) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) f_0 \varphi_0(\beta) \|q(t) - \bar{q}(t)\|_{H(0, T)},$$

которое доказывается непосредственными вычислениями (см. доказательство леммы 2).

Теорема. При выполнении условий Лемм 4–6 операторное уравнение (14) имеет единственное решение в гильбертовом пространстве квадратично суммируемых функций $H(0, T)$.

Доказательство. Пусть выполнены условия лемм 4–6. Тогда оператор $\bar{G}[\cdot]$ переводит полное метрическое пространство $H(0, T)$ в себя, и является сжимающим. Поэтому оператор $\bar{G}[\cdot]$, согласно известной

теореме [3] о принципе сжимающих отображений, имеет единственную неподвижную точку, которая является решением операторного уравнения (14).

Решение операторного уравнения (14) строится методом последовательных приближений по следующей схеме:

$$q_n(t) = \bar{G}[q_{n-1}(t)] = h(t) - \bar{G}_0[q_{n-1}(t)] \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

и точное решение определяется по формуле

$$q^0(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n(t).$$

Имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|q^0(t) - q_n(t)\|_{H(0,T)} &= \|\bar{G}[q^0(t)] - \bar{G}[q_n(t)]\|_{H(0,T)} = \|h(t) - G_0[q^0(t)] - h(t) + G_0[q_n(t)]\| = \\ &= \|G_0[q^0(t)] - G_0[q_n(t)]\|_{H(0,T)} \leq \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \|G_0[q_0(t)] - q_0(t)\|_{H(0,T)}. \end{aligned}$$

Эта оценка позволяет определить номер приближения, обеспечивающего заданную точность ε , т. е. номер приближения может быть определен из неравенства

$$\frac{\gamma^n}{1-\gamma} \|G_0[q_0(t)] - q_0(t)\|_{H(0,T)} \leq \varepsilon.$$

Подставляя найденное решение $q^0(t)$ в (13), находим оптимальное управление

$$u^0(t) = \varphi[t, q^0(t), \beta],$$

которое является решением нелинейного интегрального уравнения (11).

3. Построение решения нелинейной задачи оптимизации. После определения оптимального управления, соответствующего оптимальному управлению $u^0(t)$, решение краевой задачи находим по формуле (см. [1]):

$$v^0(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda \int_0^T R_n(t, s, \lambda) a_n^0(s) ds + a_n^0(t) \right) z_n(x),$$

где

$$a_n^0(t) = e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} z_n(x_0) f[\tau, u^0(\tau)] d\tau.$$

Это решение называется *оптимальным процессом*.

После определения оптимального управления и оптимального процесса, минимальное значение функционала (1) вычислим по формуле

$$I[u^0(t)] = \int_0^1 [v^0(T, x) - \xi(x)]^2 + \beta \int_0^T p^2[t, u^0(t)] dt.$$

Найденная тройка $(u^0(t), v^0(t, x), I(u^0))$ определяет полное решение задачи нелинейной оптимизации (1)–(6).

Литература

1. Керимбеков А. Условия оптимальности в задаче подвижного точечного управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями / А. Керимбеков, А.Т. Эрмебаева // Вестник КPCУ. 2016. Т. 16. № 5.
2. Керимбеков А. Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: автореф. дис.... д-ра физ.-мат. наук / А. Керимбеков. Бишкек, 2003. 21 с.
3. Люстерник Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М.: Наука, 1965. 520 с.