УДК 517. 927.21:550.34
А.ДЖ. САТЫБАЕВ, А.А. АЛИМКАНОВ
A.J. SATYBAEV, A.A. ALIMKANOV
E.mail. ksucta@elcat.kg

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ СЕЙСМИКИ С МГНОВЕННЫМ И ШНУРОВЫМ ИСТОЧНИКОМ

UNIQUENESS OF SOLUTIONS TWO-DIMENSIONAL DIRECT SEISMIC PROBLEM STRAIGHT WITH INSTANT AND CORDED SOURCE

Бул макалада сейсмиканын экилик түз маселеси каралган. Сейсмика тендемесинин параметрлерине, баштапкы жана чектик шарттарына кандайдыр шарттар коюлганда чечимдин жалгыздык теоремасы далилденген.
Ачкыч сөздөр: *Математикалык моделдер, түз маселе, сейсмика, чечим, жалгыздык.*

Рассматривается двумерная прямая задача сейсмики. При определенных условиях относительно параметров уравнения сейсмики, начальных и граничных условий доказана теорема единственности решения.
Ключевые слова. *Математические модели, прямая задача, сейсмика, решение, единственность.*

The two-dimensional seismic direct problem. Under certain conditions regarding the seismic parameters of the equation, initial and boundary conditions proved the uniqueness theorem for the solution.
Keywords. *Mathematical models, direct problem, seismic, solution uniqueness.*

Введение. Причиной возникновения землетрясений является разрядка напряжений периодически накапливающихся в земной коре и верхней мантии. Накопления напряжений связано с силами трения, сдерживающими раздвиг, поддвиг или смещения движений тектонических плит земли.

Изучение процессов землетрясений проводятся различными методами, одним из основных методов являются геофизические методы.

Геофизические методы разведки основаны на изучении физических полей, как естественных, так и искусственных: магниторазведка, грави-разведка, электроразведка, сейсморазведка и радиометрическая разведка.

Исследования сейсмических явлений с помощью моделирования намного ближе описывают этих процессов и изучение математических моделей намного упрощает решения сейсмических задач.

Постановка задачи. Математические модели сейсмических волн в двумерном случае, происходящих в результате землетрясений, выражаются дифференциальным уравнением в частных производных [1]:

$$\rho(x,y)\frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x,y)\frac{\partial U(x,y,t)}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(2\mu(x,y)+\lambda(x,y))\frac{\partial U(x,y,t)}{\partial y}\right], \qquad (1)$$

$x\in R_+,\quad y\in R,\ t\in R_+,$

где $\rho(x,y)$, $\mu(x,y)$, $\lambda(x,y)$ - плотность и коэффициенты Ламэ, $U(x,y,t)$ - возмущение двумерной среды.

Прямая задача. Определить функцию $U(x,y,t)\in W_2^1$ при известных функциях $\rho(x,y),\ \ \mu(x,y),\ \lambda(x,y)$, а также при заданных начальных и граничных условиях следующего вида:

$$U\big|_{t<0}\equiv 0,\ x\in R_+,\quad y\in R, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}=-\frac{1}{2}r(y)\,\delta(t)+h(y)\theta(t),\quad y\in(-D,D), \tag{3}$$

где *r(y)*, $h(y)$ - источники - заданные функции, $\delta(t)$ - дельта функция Дирака, $\theta(t)$ - тета функция Хевисайда.

Сведение задачи к регулярной задаче с данными на характеристиках

Так как уравнение (1) гиперболическое, то можно установить, что решение задачи (1)-(3) равно нулю при $y\ge\pm D,\quad D=D_1+M_1T,$ T- фиксированное число из R_+. Пусть, для сокращения изложений, $\mu(x,y)=-\lambda(x,y)$, тогда уравнение (1) имеет вид:

$$\frac{\partial^2U(x,y,t)}{\partial t^2}=\frac{\mu(x,y)}{\rho(x,y)}\left[\frac{\partial^2U(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U(x,y,t)}{\partial y^2}\right]+$$
$$+\frac{\mu'_x(x,y)}{\rho(x,y)}\frac{\partial U(x,y,t)}{\partial x}+\frac{\mu'_y(x,y)}{\rho(x,y)}\frac{\partial U(x,y,t)}{\partial y}. \tag{4}$$

Для выпрямления характеристики введем новую переменную α(x,y) удовлетворяющее

$$\alpha_x^2(x,y)+\alpha_y^2(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{\mu(x,y)},\qquad \alpha(x,y)\big|_{x=0}=0,\ \ \alpha_x(x,y)\Big|_{x=0}=\frac{\rho(0,y)}{\mu(0,y)}, \tag{5}$$

$$\big|\alpha_x(x,y)\ >0\ ,\lim_{z\to\infty}\alpha(x,y)=\infty \tag{6}$$

и новые функции $\quad в(\alpha,y)=\mu(x,y),\ c(\alpha,y)=\rho(x,y),\ \vartheta(\alpha,y,t)=U(x,y,t),$

тогда задача (4), (2), (3) имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\vartheta(\alpha,y,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\vartheta(\alpha,y,t)}{\partial\alpha^2}+\frac{в(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\left[\frac{\partial^2\vartheta(\alpha,y,t)}{\partial y^2}+\alpha_y\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\alpha\partial y}+\Delta\alpha\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right]+\\
&+\left\{\left[\frac{в'_\alpha(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\frac{\partial\vartheta(\alpha,y,t)}{\partial\alpha}+\frac{в'_\alpha(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\cdot\alpha'_y\frac{\partial\vartheta(\alpha,y,t)}{\partial y}+\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{в'_y(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\alpha'_y\frac{\partial\vartheta(\alpha,y,t)}{\partial\alpha}+\frac{в_y(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\frac{\partial\vartheta(\alpha,y,t)}{\partial y}\right]\right\},\quad(\alpha,y,t)\in\Omega(T,D),\\
&\vartheta(\alpha,y,t)\Big|_{y=\pm D}=0,\ \ \vartheta(\alpha,y,0)=0,\ \ \vartheta_t(\alpha,y,t)\Big|_{t=0}=\frac{в(0,y)}{c(0,y)}\{r(y)\delta(\alpha)+h(y)\theta(\alpha)\}.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

По методике В.Г. Романова [2] выделим регулярные и сингулярные части решения задачи (7), представляя решение задачи в виде

$$\vartheta(\alpha,y,t)=\widetilde{\vartheta}(\alpha,y,t)+S(t,y)\theta(t-|\alpha|)+R(t,y)\theta_1(t-|\alpha|),$$

(8)

где $\widetilde{\vartheta}(\alpha,y,t)$ - непрерывная функция. Производим некоторые вычисления

$$\vartheta_t'(\alpha,y,t)=\widetilde{\vartheta}_t'(\alpha,y,t)+S_t'(t,y)\theta(t-|\alpha|)+S(t,y)\theta_t'(t-|\alpha|)+R_t'(t,y)\theta_1(t-|\alpha|)+R(t,y)\theta_{1t}'(t-|\alpha|)$$

$$\vartheta_{tt}''(\alpha,y,t)=\widetilde{\vartheta}_{tt}''(\alpha,y,t)+S_{tt}''(t,y)\theta(t-|\alpha|)+2S_t'(t,y)\theta_t'(t-|\alpha|)+S(t,y)\theta_{tt}''(t-|\alpha|)+$$

$$+R_{tt}''(t,y)\theta_1(t-|\alpha|)+2R_t'(t,y)\theta_{1t}'(t-|\alpha|)+R(t,y)\theta_{1tt}''(t-|\alpha|),$$

$$\vartheta_\alpha'(\alpha,y,t)=\widetilde{\vartheta}_\alpha'(\alpha,y,t)-S(t,y)\theta_\alpha'(t-|\alpha|)-R(t,y)\theta_{1\alpha}'(t-|\alpha|),$$

$$\vartheta_{\alpha\alpha}''(\alpha,y,t)=\widetilde{\vartheta}_{\alpha\alpha}''(\alpha,y,t)+S(t,y)\theta_{\alpha\alpha}''(t-|\alpha|)+R(t,y)\theta_{1\alpha\alpha}''(t-|\alpha|).$$

Подставим эти полученные выражения в уравнения (7) и собираем коэффициенты при одинаковых особенностях, тогда получим регулярную и сингулярную задачу.

Используя формулу Даламбера можно выписывать решение регулярной задачи:

$$\vartheta(\alpha,y,t)=\frac{1}{2}\int_{\alpha-t}^{\alpha+t}\frac{в(0,y)}{c(0,y)}[r(y)\delta(\lambda)+h(y)\theta(\lambda)]d\lambda+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\alpha-t+\tau}^{\alpha+t-\tau}L\vartheta(\xi,y,\tau)d\xi d\tau,$$

где

$$L\vartheta(\alpha,y,t)=\frac{в(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\left[\frac{\partial^2\vartheta(\alpha,y,t)}{\partial y^2}+\alpha_y\,\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\alpha\partial y}+\Delta\alpha\,\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right]+$$

$$+\left\{\left[\frac{в'_\alpha(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\frac{\partial\vartheta(\alpha,y,t)}{\partial\alpha}+\frac{в'_\alpha(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\cdot\alpha'_y\,\frac{\partial\vartheta(\alpha,y,t)}{\partial y}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{в'_y(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\alpha'_y\,\frac{\partial\vartheta(\alpha,y,t)}{\partial\alpha}+\frac{в_y(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\,\frac{\partial\vartheta(\alpha,y,t)}{\partial y}\right]\right\}.$$

$$S(t,y)=\frac{1}{2}\frac{в(0,y)}{c(0,y)}r(y)+\frac{1}{2}\int_0^t\left\{\frac{в(\tau,y)}{c(\tau,y)}\cdot\left[\Delta\alpha S(\tau,y)+\alpha_y S_y(\tau,y)\right]+\left[\frac{в'_\tau(\tau,y)}{c(\tau,y)}+\frac{в'_y(\tau,y)}{c(\tau,y)}\right]S(\tau,y)\right\}d\tau,$$

$$R(t,y)=\frac{в(0,y)}{c(0,y)}h(y)/2+\frac{1}{2}\int_0^t\left\{\frac{в(\tau,y)}{c(\tau,y)}\left[S_{yy}(\tau,y)+\frac{в'_y(\tau,y)}{c(\tau,y)}S_y+\frac{в'_\tau(\tau,y)}{c(\tau,y)}\alpha_y S_y+\alpha_y R_y+\Delta\alpha R(\tau,y)\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{в'_\tau(\tau,y)}{c(\tau,y)}+\frac{в'_y(\tau,y)}{c(\tau,y)}\right]R(\tau,y)\right\}d\tau.$$

Из за гиперболичности уравнения решение задачи (7) равно нулю вне характеристического угла, в этом случае и непрерывная функция $\widetilde{\vartheta}(\alpha,y,t)$ также равна нулю вне характеристического угла, следовательно $\widetilde{\vartheta}(\alpha,y,t)\Big|_{t=|\alpha|}=0$, а значит

$\vartheta(\alpha,y,t)\Big|_{|\alpha|=t}=S(t,y).$ Тогда из (7) получим задачу

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\alpha^2}+L\vartheta(\alpha,y,t), \qquad |\alpha|<t<T, \qquad \alpha\in(-T,T),\\
&\vartheta(\alpha,y,t)\big|_{|\alpha|=t}=S(t,y), \qquad t\in(0,T), \qquad y\in(-D,D),\\
&\vartheta(\alpha,y,t)\big|_{y=\pm D}=0, \qquad t\in(|\alpha|,T), \qquad \alpha\in(-T,T),
\end{aligned}\right\}$$

(9)

Вычислим следующие значения решения задачи, которые необходимы в дальнейшем:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\bigg|_{|\alpha|=t}=S_y(t,y), \qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial t}\bigg|_{|\alpha|=t}=S_t(t,y)+R(t,y),\\
&\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\bigg|_{|\alpha|=t}=-sign(\alpha)R(t,y), \qquad t\in(0,T), \qquad y\in(-D,D).
\end{aligned}\right\}$$

Теорема единственности. Доказательство теоремы будем проводит по методике [3]. Введем обозначение и норму

$$\varPi_1=\max_{|\alpha|\le T}\max_{y\in(-D,D)}\left\{|в(\alpha,y)|,|в_\alpha(\alpha,y)|,|в_y(\alpha,y)|\right\},$$

$$\varPi_2=\max_{|\alpha|\le T}\max_{y\in(-D,D)}\left\{\ r(y),\mathrm{h}(y)\right\}, \quad \varPi_3=\min_{|\alpha|\le T}\min_{y\in(-D,D)}\left\{|c(\alpha,y)|\right\},$$

$$\varPi_4=\max_{\alpha\in R}\max_{y\in(-D,D)}\left\{|\alpha_y(z,y)|,|\Delta\alpha(z,y)|\right\}.$$

$$\|\vartheta\|^2(t)=\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}U^2(\alpha,y,t)d\alpha dy, \quad t\in[0,T].$$

(10)

Умножая обе части уравнения (9) на $2\frac{\partial\vartheta}{\partial t}$, затем проинтегрируя в области $\Omega(T,D)=\{\Delta(T)\times(-D,D)\}$, где $\Delta(T)=\{(\alpha,t):\alpha\in(-T,T),|\alpha|<t<T\}$ и учитывая

$$2\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)^2\right], \quad 2\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\alpha^2}=2\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right]-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right)^2,$$

следующие

$$2\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\cdot\frac{в(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2}=2\frac{в(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right]-\frac{в(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)^2,$$

$$2\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\frac{в(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\alpha_y\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\alpha\partial y}=\frac{в(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\alpha_y\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right)\right],$$

получим

$$\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}2\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\left[\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\alpha^2}-L\vartheta(\alpha,y,t)\right]d\alpha dyd\tau=\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\left[\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right)^2+\frac{в(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)^2+\frac{в(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\alpha_y\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)\right]\Bigg|_{\tau=|\alpha|}^{\tau=t}d\alpha dy+$$

$$+\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}2\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\frac{в(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\Delta\alpha\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}d\alpha dyd\tau-$$

$$-2\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right)+\frac{в(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\frac{в(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\alpha_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right)+\frac{1}{2}\frac{в(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\alpha_y\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right)+$$

$$+\frac{в_\alpha{}'(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}+\left[\frac{в_\alpha{}'(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\alpha_y\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+\frac{в_y{}'(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\alpha_y\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}+\frac{в_y{}'(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right]d\alpha dyd\tau=0,$$

(11)

$(\alpha,t)\in\Delta(T),\quad y\in(-D,D)$.

Используя $\vartheta(\alpha,-D,t)=\vartheta(\alpha,D,t)=0$ из соотношение (11) имеем

$$\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\frac{в(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right)d\alpha dyd\tau=\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{в(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{в(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\right)*\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right)\right\}d\alpha dyd\tau=\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-t}^{t}\left\{\left[\frac{в(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}*\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right]_{y=D}*\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\Big|_{y=D}-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{в(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}*\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right]_{y=-D}*\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\Big|_{y=-D}\right\}d\alpha d\tau-\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{в(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\right)\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}d\alpha dyd\tau=$$

$$=-\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{в(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\right)\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}d\alpha dyd\tau,$$

$$\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\frac{в(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\alpha_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right)d\alpha dyd\tau=-\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{в(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}*\alpha_y\right)\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right)d\alpha dyd\tau.$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\limits_{|\alpha|}^{t}\int\limits_{-D}^{D}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right)d\alpha dy d\tau=\int\limits_{|\alpha|}^{t}\int\limits_{-D}^{D}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right)\Bigg|_{\alpha=-t}^{\alpha=t}dyd\tau.\\
&\int\limits_{|\alpha|}^{t}\int\limits_{-D}^{D}\int\limits_{-t}^{t}\frac{в(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\alpha_y\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right)d\alpha dy d\tau=\int\limits_{|\alpha|}^{t}\int\limits_{-D}^{D}\left[\frac{в(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\alpha_y\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right]_{\alpha=-t}^{\alpha=t}dyd\tau-\\
&-\int\limits_{|\alpha|}^{t}\int\limits_{-D}^{D}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{в(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\alpha_y\right)\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}d\alpha dyd\tau=\int\limits_{|\alpha|}^{t}\int\limits_{-D}^{D}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{в(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\alpha_y\right)\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}d\alpha dyd\tau.\\
&\int\limits_{|\alpha|}^{t}\int\limits_{-D}^{D}\int\limits_{-t}^{t}\frac{в_\alpha{}'(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}d\alpha dyd\tau.
\end{aligned}\right\}\qquad (*)$$

Используя введенные обозначения (10) и полученные выражения из (11) имеем

$$\begin{aligned}
\|\vartheta\|_1^2(t)\le 2\|\vartheta\|_1^2(|\alpha|)&+2\frac{\Pi_1}{\Pi_3}\Pi_4\int\limits_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right\|(\tau)d\tau+\\
&+2\frac{\Pi_1}{\Pi_3}\int\limits_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right\|(\tau)d\tau+2\frac{\Pi_1}{\Pi_3}\Pi_4\int\limits_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right\|(\tau)d\tau+\\
&+\frac{2\Pi_1}{\Pi_3}\int\limits_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right\|(\tau)d\tau+\frac{2\Pi_1\Pi_4}{\Pi_3}\int\limits_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right\|(\tau)d\tau+\\
&+\frac{2\Pi_1\Pi_4}{\Pi_3}\int\limits_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right\|(\tau)d\tau+\frac{2\Pi_1}{\Pi_3}\int\limits_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right\|(\tau)d\tau,
\end{aligned}\qquad (12)$$

здесь

$$\|\vartheta\|_1^2(t)=\|\vartheta_t\|^2(t)+\|\vartheta_\alpha\|^2(t)+\frac{\Pi_1}{\Pi_3}\|\vartheta_y\|^2(t)+\frac{\Pi_1}{\Pi_3}\Pi_4\|\vartheta_\alpha\cdot\vartheta_y\|(t).$$

Можарируем интеграл

$$\int\limits_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right\|(\tau)d\tau\le\int\limits_{|\alpha|}^{t}\left[\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right\|^2+\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right\|^2\right](\tau)d\tau\le\int\limits_{|\alpha|}^{t}\|\vartheta\|_1^2(\tau)d\tau\ .$$

Тогда из последнего неравенства (12) имеем

$$\|\vartheta\|_1^2(t)\le\|\vartheta\|_1^2(|\alpha|)\cdot\exp\left[\left(6\frac{\Pi_1}{\Pi_3}+8\frac{\Pi_1}{\Pi_3}\Pi_4\right)t\right].$$

Используя энергетические неравенства для гиперболических уравнений из последнего получим

$$\max_{|\alpha|\le\tau\le t\le T}\left\{\|\vartheta\|_2^2(\tau)\right\}\le\|\vartheta\|_2^2(|\alpha|)*\exp\left[\left(6\frac{\Pi_1}{\Pi_3}+9\frac{\Pi_1}{\Pi_3}\Pi_4\right)t\right],$$

где $\|\vartheta\|_2^2(t)=\left(\|\vartheta\|^2+\|\vartheta_t\|^2+\|\vartheta_\alpha\|^2+\|\vartheta_y\|^2\right)(t).$

Таким образом, доказана теорема

Теорема. Пусть функции $c(\alpha, y), в(\alpha, y), \alpha_y, \Delta\alpha$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка и пусть решение задачи (9) существует и принадлежит в $C^2(\Omega(T,D))$, выполнено (4). Тогда решение задачи (9) единственно в области регулярности $\Omega(T,D)$ и имеет места оценка

$$\max_{|\alpha|\le t\le T}\left\{\|\upsilon\|_2^2(t)\right\} \le \|\upsilon\|_2^2(|\alpha|) * \exp(\Pi t), \tag{13}$$

где $\Pi = \dfrac{6\Pi_1}{\Pi_3} + \dfrac{9\Pi_1\Pi_4}{\Pi_3}$.

Из эквивалентности задач (9) и (1)-(3) следует, что решение задачи (1)-(3) также единственно в области $\Omega(T,D)$, при выполнении условии теоремы.

Заключение. Доказана теорема единственности двумерной прямой задачи сейсмики с мгновенным и шнуровым источником.

Список литературы

1. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости [Текст] / В.Б. Поручиков. - М.: Наука, 1986. - 328с.
2. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики [Текст] / В.Г.Романов. – М.: 1984. – 264с.
3. Сатыбаев А.Дж. Существование решения прямой задачи геоэлектрики с плоской границей [Текст] А.Дж. Сатыбаев, М.Э. Мирсаитова //Материалы 3-ой Международной научно-методической конференции «Математическое моделирование и информационные техн-гии в образовании и науке». – Алматы : 2005. – С. 179–183.