

**ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ
СЕЙСМИКИ С МГНОВЕННЫМ И ШНУРОВЫМ ИСТОЧНИКОМ****NUMERICAL ALGORITHMS FOR SOLVING TWO-DIMENSIONAL DIRECT
SEISMIC PROBLEM STRAIGHT WITH INSTANT AND CORDED SOURCE**

Сеймиканын экилик түз маселеси каралган. Ченем айрымалык негизинде чечимдин сандык алгоритми тургузулган. Жакындатылган чечимдин так чечимине умтулуусунун теоремасы далилденди.

Ачкыч сөздөр: Экилик, түз маселе, сейсмика, ченем айырмалык, алгоритм, умтулуу.

Рассматривается двумерная прямая задача сейсмики. Построен численный алгоритм решения на основе конечно-разностной схемы. Доказана теорема о сходимости приближенного решения к точному решению.

Ключевые слова: Двумерная, прямая задача, сейсмика, конечно-разностное, алгоритм, сходимость.

The two-dimensional seismic direct problem. A numerical algorithm for solving based on the finite-difference scheme. A theorem on the convergence of the approximation solutions to the exact solution.

Keywords: two-dimensional, direct task, seismic, finite-difference algorithm, convergence.

Введение. При прохождении землетрясений или при искусственных взрывах по Земле проходит сейсмические волны и конечно довольно быстро. Изучения их с точки зрения научных исследований, а не общего знания, представляют большой интерес и они рассматриваются очень давно.

А разработка математических моделей сейсмических волновых процессов проводится относительно недавно, результаты полученные можно найти в монографиях Аки К., Ричардс П. [1], Мухелишвили Н.И.[2].

Создания математических моделей процессов землетрясений и решения их математическими методами, см. монографии Партон В.З., Перлин В.И. [3], Корягин В.В., Сахаров Ю.П.[4], Дьелесон Э., Фуайе Д. [5], а также разработка численных алгоритмов и компьютерных программ является одним из приоритетных направлений изучения сейсмических процессов.

Постановка задачи. Математические модели сейсмических волн в двумерном случае, происходящих в результате землетрясений, выражаются дифференциальным уравнением в частных производных [1]:

$$\rho(x,y) \frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu(x,y) \frac{\partial U(x,y,t)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(2\mu(x,y) + \lambda(x,y)) \frac{\partial U(x,y,t)}{\partial y} \right]$$

$$x \in R_+, \quad y \in R, \quad t \in R_+,$$

(1)

где $\rho(x,y)$, $\mu(x,y)$, $\lambda(x,y)$ - плотность и коэффициенты Ламэ, $U(x,y,t)$ - возмущение двумерной среды.

Прямая задача. Определить функцию $U(x, y, t) \in W_2^1$ при известных функциях $\rho(x, y)$, $\mu(x, y)$, $\lambda(x, y)$, а также при заданных начальных и граничных условиях следующего вида:

$$(2) \quad \begin{aligned} U|_{t < 0} &\equiv 0, \quad x \in R_+, \quad y \in R, \\ \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0} &= -\frac{1}{2} r(y) \delta(t) + h(y) \theta(t), \quad y \in (-D, D), \end{aligned}$$

(3) где $r(y)$, $h(y)$ - источники - заданные функции, $\delta(t)$ - дельта функция Дирака, $\theta(t)$ - тета функция Хевисайда.

Сведение задачи к регулярной задаче с данными на характеристиках.

Так как уравнение (1) гиперболическое, то можно установить, что решение задачи (1)-(3) равно нулю при $y \geq \pm D$, $D = D_1 + M_1 T$, T - фиксированное число из R_+ . Пусть, для сокращения изложений, $\mu(x, y) = -\lambda(x, y)$, тогда уравнение (1) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial t^2} &= \frac{\mu(x, y)}{\rho(x, y)} \left[\frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial y^2} \right] + \\ &+ \frac{\mu'_x(x, y)}{\rho(x, y)} \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\mu'_y(x, y)}{\rho(x, y)} \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial y}. \end{aligned}$$

(4)

Для выпрямления характеристики введем новую переменную $\alpha(x, y)$ удовлетворяющее

$$\alpha_x^2(x, y) + \alpha_y^2(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{\mu(x, y)}, \quad \alpha(x, y)|_{x=0} = 0, \quad \alpha_x(x, y) \Big|_{x=0} = \frac{\rho(0, y)}{\mu(0, y)},$$

(5)

$$\alpha_x(x, y) > 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \alpha(x, y) = \infty$$

(6)

и новые функции $\epsilon(\alpha, y) = \mu(x, y)$, $c(\alpha, y) = \rho(x, y)$, $\mathcal{G}(\alpha, y, t) = U(x, y, t)$, тогда задача (4), (2), (3) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{G}(\alpha, y, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \mathcal{G}(\alpha, y, t)}{\partial \alpha^2} + \frac{\epsilon(\alpha, y)}{c(\alpha, y)} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{G}(\alpha, y, t)}{\partial y^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \alpha \partial y} + \Delta \alpha \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \alpha} \right] + \\ &+ \left\{ \left[\frac{\epsilon'_\alpha(\alpha, y)}{c(\alpha, y)} \frac{\partial \mathcal{G}(\alpha, y, t)}{\partial \alpha} + \frac{\epsilon'_\alpha(\alpha, y)}{c(\alpha, y)} \cdot \alpha'_y \frac{\partial \mathcal{G}(\alpha, y, t)}{\partial y} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{\epsilon'_y(\alpha, y)}{c(\alpha, y)} \alpha'_y \frac{\partial \mathcal{G}(\alpha, y, t)}{\partial \alpha} + \frac{\epsilon_y(\alpha, y)}{c(\alpha, y)} \frac{\partial \mathcal{G}(\alpha, y, t)}{\partial y} \right] \right\}, \quad (\alpha, y, t) \in \Omega(T, D), \\ \mathcal{G}(\alpha, y, t) \Big|_{y=\pm D} &= 0, \quad \mathcal{G}(\alpha, y, 0) = 0, \quad \mathcal{G}_t(\alpha, y, t) \Big|_{t=0} = \frac{\rho(0, y)}{c(0, y)} \{r(y) \delta(\alpha) + h(y) \theta(\alpha)\}. \end{aligned}$$

(7)

По методике В.Г. Романова [2] выделим регулярные и сингулярные части решения задачи (7), представляя решение задачи в виде

$$\mathcal{G}(\alpha, y, t) = \tilde{\mathcal{G}}(\alpha, y, t) + S(t, y)\theta(t - |\alpha|) + R(t, y)\theta_1(t - |\alpha|),$$

(8)

где $\tilde{\mathcal{G}}(\alpha, y, t)$ - непрерывная функция. Производим некоторые вычисления

$$\mathcal{G}'_t(\alpha, y, t) = \tilde{\mathcal{G}}'_t(\alpha, y, t) + S'_t(t, y)\theta(t - |\alpha|) + S(t, y)\theta'_t(t - |\alpha|) + R'_t(t, y)\theta_1(t - |\alpha|) + R(t, y)\theta'_1(t - |\alpha|),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}''_{tt}(\alpha, y, t) = & \tilde{\mathcal{G}}''_{tt}(\alpha, y, t) + S''_{tt}(t, y)\theta(t - |\alpha|) + 2S'_t(t, y)\theta'_t(t - |\alpha|) + S(t, y)\theta''_{tt}(t - |\alpha|) + \\ & + R''_{tt}(t, y)\theta_1(t - |\alpha|) + 2R'_t(t, y)\theta'_1(t - |\alpha|) + R(t, y)\theta''_{1tt}(t - |\alpha|), \end{aligned}$$

$$\mathcal{G}'_{\alpha}(\alpha, y, t) = \tilde{\mathcal{G}}'_{\alpha}(\alpha, y, t) - S(t, y)\theta'_{\alpha}(t - |\alpha|) - R(t, y)\theta'_{1\alpha}(t - |\alpha|),$$

$$\mathcal{G}''_{\alpha\alpha}(\alpha, y, t) = \tilde{\mathcal{G}}''_{\alpha\alpha}(\alpha, y, t) + S(t, y)\theta''_{\alpha\alpha}(t - |\alpha|) + R(t, y)\theta''_{1\alpha\alpha}(t - |\alpha|).$$

Подставим эти полученные выражения в уравнения (7) и собираем коэффициенты при одинаковых особенностях, тогда получим регулярную и сингулярную задачу.

Используя формулу Даламбера можно выписывать решение регулярной задачи:

$$\mathcal{G}(\alpha, y, t) = \frac{1}{2} \int_{\alpha-t}^{\alpha+t} \frac{\mathcal{G}(0, y)}{c(0, y)} [r(y)\delta(\lambda) + h(y)\theta(\lambda)] d\lambda + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\alpha-t+\tau}^{\alpha+t-\tau} L\mathcal{G}(\xi, y, \tau) d\xi d\tau,$$

$$L\mathcal{G}(\alpha, y, t) = \frac{\mathcal{G}(\alpha, y)}{c(\alpha, y)} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{G}(\alpha, y, t)}{\partial y^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \alpha \partial y} + \Delta \alpha \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \alpha} \right] +$$

где

$$\begin{aligned} & + \left\{ \left[\frac{\mathcal{G}'_{\alpha}(\alpha, y)}{c(\alpha, y)} \frac{\partial \mathcal{G}(\alpha, y, t)}{\partial \alpha} + \frac{\mathcal{G}'_{\alpha}(\alpha, y)}{c(\alpha, y)} \cdot \alpha'_y \frac{\partial \mathcal{G}(\alpha, y, t)}{\partial y} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\mathcal{G}'_y(\alpha, y)}{c(\alpha, y)} \alpha'_y \frac{\partial \mathcal{G}(\alpha, y, t)}{\partial \alpha} + \frac{\mathcal{G}'_y(\alpha, y)}{c(\alpha, y)} \frac{\partial \mathcal{G}(\alpha, y, t)}{\partial y} \right] \right\}. \end{aligned}$$

$$S(t, y) = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{G}(0, y)}{c(0, y)} r(y) + \frac{1}{2} \int_0^t \left\{ \frac{\mathcal{G}(\tau, y)}{c(\tau, y)} [\Delta \alpha S(\tau, y) + \alpha_y S_y(\tau, y)] + \left[\frac{\mathcal{G}'_{\tau}(\tau, y)}{c(\tau, y)} + \frac{\mathcal{G}'_y(\tau, y)}{c(\tau, y)} \right] S(\tau, y) \right\} d\tau,$$

$$\begin{aligned} R(t, y) = & \frac{\mathcal{G}(0, y)}{c(0, y)} h(y)/2 + \frac{1}{2} \int_0^t \left\{ \frac{\mathcal{G}(\tau, y)}{c(\tau, y)} \left[S_{yy}(\tau, y) + \frac{\mathcal{G}'_y(\tau, y)}{c(\tau, y)} S_y + \frac{\mathcal{G}'_{\tau}(\tau, y)}{c(\tau, y)} \alpha_y S_y + \alpha_y R_y + \Delta \alpha R(\tau, y) \right] + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\mathcal{G}'_{\tau}(\tau, y)}{c(\tau, y)} + \frac{\mathcal{G}'_y(\tau, y)}{c(\tau, y)} \right] R(\tau, y) \right\} d\tau. \end{aligned}$$

Из за гиперболичности уравнения решение задачи (7) равно нулю вне характеристического угла, в этом случае и непрерывная функция $\tilde{\mathcal{G}}(\alpha, y, t)$ также равна нулю вне характеристического угла, следовательно $\tilde{\mathcal{G}}(\alpha, y, t) \Big|_{t=|\alpha|} = 0$, а значит

$$\mathcal{G}(\alpha, y, t) \Big|_{|\alpha|=t} = S(t, y). \text{ Тогда из (7) получим задачу:}$$

$$(9) \left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 g}{\partial \alpha^2} + Lg(\alpha, y, t), \quad |\alpha| < t < T, \quad \alpha \in (-T, T), \\ g(\alpha, y, t)|_{|\alpha|=t} &= S(t, y), \quad t \in (0, T), \quad y \in (-D, D), \\ g(\alpha, y, t)|_{y=\pm D} &= 0, \quad t \in (|\alpha|, T), \quad \alpha \in (-T, T), \end{aligned} \right\}$$

Конечно-разностное решение.

При решении последней задачи (9) конечно-разностным методом нам потребуются значения $\frac{\partial g}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial \alpha}, \frac{\partial g}{\partial y}$ при $t = |\alpha|$. Значение $\frac{\partial g}{\partial y}$ при $t = |\alpha|$ находим из (9), а остальные из (6)

$$(10') \left. \begin{aligned} \frac{\partial g(\alpha, y, t)}{\partial y} \Big|_{|\alpha|=t} &= S_y(t, y), \quad t \in (0, T), \quad y \in (-D, D), \\ \frac{\partial g(\alpha, y, t)}{\partial t} \Big|_{|\alpha|=t-0} &= S_t(t, y) + R(t, y), \quad t \in (0, T), \quad y \in (-D, D), \\ \frac{\partial g(\alpha, y, t)}{\partial \alpha} \Big|_{|\alpha|=t} &= -\text{sign} \alpha R(t, y), \quad t \in (0, T), \quad y \in (-D, D). \end{aligned} \right\}$$

Приближенное решение задачи (9) будем строить конечно-разностным методом и для этого введем равномерную сеточную область, разностные отношения и обозначения. В дальнейшем, для сокращения в обозначениях (9) индексы i, j, k в решении разностной схемы будем опускать или частично опускать, например

$$\begin{aligned} V_{\alpha}^-(i, j, k) &= V_{\alpha}^-, \quad V_t^-(i, j), \quad V_y^-(k, j+1) = \frac{V_{ij+1}^k - V_{ij}^k}{h_2}, \\ V(k, j-1) &= V_{ij-1}^k, \quad V_y^-(i, k-1) = \frac{V_{ij}^{k-1} - V_{ij-1}^{k-1}}{h_2}, \\ V_t^-(i, j) &= \frac{V_{ij}^k - V_{ij}^{k-1}}{\tau}, \quad V_{\alpha}^-(i, j, k+1) = \frac{V_{i+1j}^{k+1} - V_{ij}^{k+1}}{h_1} \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Предположим, что решение задачи (9) достаточно гладкая функция для применения разностной схемы.

Заменим дифференциальную задачу (9) разностной задачей, отбрасывая малые члены порядка $O(h_1^2, h_2^2, \tau^2)$:

$$(14) \left. \begin{aligned} V_{tt}^- &= V_{\alpha\alpha}^- + LV_{ij}^k, \quad (ih_1, jh_2, \tau k) \in \Omega_{ij}^k, \\ V_{\pm i, j}^{[2i]} &= S_j^{[2i]}, \quad i = -\overline{N}, \overline{N}; \quad j = -\overline{L}, \overline{L}; \\ V_{i, L}^k &= V_{i, -L}^k = 0, \quad i = -\overline{N}, \overline{N}; \quad k = \overline{2i}, \overline{2N}; \end{aligned} \right\}$$

$$LV_{ij}^k = \frac{\mathfrak{e}_{ij}}{c_{ij}} \left[V_{y\bar{y}} + (\alpha_{ij})_y V_{\alpha\bar{y}} + \Delta\alpha_{ij} V_{\alpha}^0 \right] + \frac{(\mathfrak{e}_{ij})_{\alpha}^0}{c_{ij}} V_{\alpha}^0 +$$

$$+ \left[\frac{(\mathfrak{e}_{ij})_{\alpha}^0}{c_{ij}} (\alpha_{ij})_y V_y^0 + \frac{(\mathfrak{e}_{ij})_y^0}{c_{ij}} (\alpha_{ij})_y V_{\alpha}^0 + \frac{(\mathfrak{e}_{ij})_y^0}{c_{ij}} V_y^0 \right],$$

где

$c_{ij}, (\alpha_{ij})_y, \Delta\alpha_{ij}, \mathfrak{e}_{ij}, (\mathfrak{e}_{ij})_{\alpha}^0, (\mathfrak{e}_{ij})_y^0, S_j^k$ – разностные аналоги функции

$c(\alpha, y), \alpha_y, \Delta\alpha, \mathfrak{e}(\alpha, y), \mathfrak{e}_{\alpha}, \mathfrak{e}_y, S(t, y)$ – соответственно, а индекс $\pm i$

соответствует направлению координат.

Введем обозначение и норму

$$\Pi_5 = \max_{i=-N, N} \max_{j=-L, L} \left\{ \mathfrak{e}_{ij}, |(\mathfrak{e}_{ij})_{\alpha}^0|, |(\mathfrak{e}_{ij})_y^0| \right\} \quad \Pi_{51} = \min_{i=-N, N} \min_{j=-L, L} \left\{ \mathfrak{e}_{ij}, |(\mathfrak{e}_{ij})_{\alpha}^0|, |(\mathfrak{e}_{ij})_y^0| \right\}$$

$$\Pi_6 = \max_{i=-N, N} \max_{j=-L, L} \left\{ |(\alpha_{ij})_y|, |\Delta\alpha_{ij}| \right\} \quad \Pi_{71} = \max_{i=-N, N} \max_{j=-L, L} \left\{ |c_{ij}| \right\}$$

$$\Pi_7 = \min_{i=-N, N} \min_{j=-L, L} \left\{ |c_{ij}| \right\} \quad \Pi_8 = \min_{i=-N, N} \min_{j=-L, L} \left\{ |(\alpha_{ij})_y|, |\Delta\alpha_{ij}| \right\}$$

$$\Pi_9 = \max_{i=-N, N} \max_{j=-L, L} \left\{ |c_{ij}|, |(c_{ij})_{\alpha}^0|, |(c_{ij})_y^0| \right\} \quad \Pi_{10} = \min_{i=-N, N} \min_{j=-L, L} \left\{ |c_{ij}|, |(c_{ij})_{\alpha}^0|, |(c_{ij})_y^0| \right\}$$

$$\|V\|^2(i, k) = h_1 h_2 \sum_{j=-L+1}^{L-1} \sum_{i=-N+2}^{N-2} (V_{ij}^k)^2.$$

Каждый член сеточного уравнения (14) умножим на $(V_t + V_{\bar{t}})$ и получим следующий дискретный аналог дифференциального произведения:

$$\begin{aligned} V_{t-} (V_t + V_{\bar{t}}) &= [V_{\bar{t}}^2(k)]_{t-}, \\ V_{\alpha\bar{\alpha}} (V_t + V_{\bar{t}}) &= [V_{\alpha} (V_t + V_{\bar{t}})]_{\alpha} - [V_t + V_{\bar{t}}]_{\alpha} V_{\alpha}^-(i+1) = \\ &= [V_{\alpha} (V_t + V_{\bar{t}})]_{\alpha} - [V_{\alpha}^2]_t + [(V_{\alpha} V_{\bar{t}\alpha}) (k+1) - (V_{\alpha} V_{\bar{t}\alpha}) (k)], \\ \frac{\mathfrak{e}_{ij}}{c_{ij}} V_{y\bar{y}} (V_t + V_{\bar{t}}) &= \left[\frac{\mathfrak{e}_{ij}}{c_{ij}} V_{\bar{y}} (V_t + V_{\bar{t}}) \right]_y - \frac{\mathfrak{e}_{ij}}{c_{ij}} [V_y^2]_t + \\ &+ \frac{\mathfrak{e}_{ij}}{c_{ij}} [(V_y V_{\bar{t}y}) (k+1) - (V_y V_{\bar{t}y}) (k)] - \left[\left(\frac{\mathfrak{e}_{ij}}{c_{ij}} \right)_{\bar{y}} (V_t + V_{\bar{t}}) \right] (j+1) V_y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{e}_{ij}}{c_{ij}}(\alpha_{ij})_y V_{\alpha y} (V_t + V_t^-) &= \left[\frac{\mathfrak{e}_{ij}}{c_{ij}}(\alpha_{ij})_y V_{\alpha} (V_t + V_t^-) \right]_{\bar{y}} - \left\{ \left[\frac{\mathfrak{e}_{ij}}{c_{ij}}(\alpha_{ij})_y (V_t + V_t^-) \right]_y V_{\alpha} \right\} (j-1) = \\
&= \left[\frac{\mathfrak{e}_{ij}}{c_{ij}}(\alpha_{ij})_y V_{\alpha} (V_t + V_t^-) \right]_{\bar{y}} - \left\{ \frac{\mathfrak{e}_{ij}}{c_{ij}}(\alpha_{ij})_y (V_t + V_t^-)_y V_{\alpha} + \left[\left(\frac{\mathfrak{e}_{ij}}{c_{ij}}(\alpha_{ij})_y \right)_{\bar{y}} (V_t + V_t^-) \right] (j+1) V_{\alpha} \right\} (j-1) = \\
&= \left[\frac{\mathfrak{e}_{ij}}{c_{ij}}(\alpha_{ij})_y V_{\alpha} (V_t + V_t^-) \right]_{\bar{y}} - \left\{ \frac{\mathfrak{e}_{ij}}{c_{ij}}(\alpha_{ij})_y V_{\alpha} [V_y(k+1) - V_y(k)] / \tau + \right. \\
&\quad \left. + \left[\left(\frac{\mathfrak{e}_{ij}}{c_{ij}}(\alpha_{ij})_y \right)_{\bar{y}} (V_t + V_t^-) \right] (j+1) V_{\alpha} \right\} \cdot (j-1),
\end{aligned}$$

$$\Delta \alpha_{ij} V_{\alpha}^0 [V_t + V_t^-] = \Delta \alpha_{ij} V_{\alpha}^0 [V_t + V_t^-]$$

$$\frac{(\mathfrak{e}_{ij})_{\alpha}^0}{c_{ij}} V_{\alpha}^0 (V_t + V_t^-) = \frac{(\mathfrak{e}_{ij})_{\alpha}^0}{c_{ij}} V_{\alpha} [V(k+1) - V(k-1)] / \tau,$$

$$\frac{(\mathfrak{e}_{ij})_{\alpha}^0}{c_{ij}} (\alpha_{ij})_y V_{\alpha y}^0 [V_t + V_t^-] = \frac{(\mathfrak{e}_{ij})_{\alpha}^0}{c_{ij}} (\alpha_{ij})_y V_{\alpha y}^0 [V(k+1) - V(k-1)] / \tau,$$

$$\frac{(\mathfrak{e}_{ij})_y^0}{c_{ij}} (\alpha_{ij})_y V_{\alpha y}^0 [V_t + V_t^-] = \frac{(\mathfrak{e}_{ij})_y^0}{c_{ij}} (\alpha_{ij})_y V_{\alpha}^0 [V(k+1) - V(k-1)] / \tau,$$

$$\frac{(\mathfrak{e}_{ij})_y^0}{c_{ij}} V_{\alpha y}^0 [V_t + V_t^-] = \frac{(\mathfrak{e}_{ij})_y^0}{c_{ij}} V_{\alpha y}^0 [V(k+1) - V(k-1)] / \tau.$$

Умножая все выше полученные на $\tau h_1 h_2$, просуммировав по индексам $j = \overline{-L+1, L-1}$; $i = \overline{-N+2, N-2}$; $k = \overline{|2i|+3, 2N-1}$, и используя введенные обозначения имеем

$$\tau h_{11} h_2 \sum_{j=-L+1}^{L-1} \sum_{i=-N+2}^{N-2} \sum_{k=|2i|+3}^{2N-1} [V_{it}^- (V_t + V_t^-)] = \|V_t^-\|^2(i, 2N) - \|V_t^-\|^2(i, |2i|+3),$$

$$\tau h_1 h_2 \sum_{j=-L+1}^{L-1} \sum_{i=-N+2}^{N-2} \sum_{k=|2i|+3}^{2N-1} [V_{\alpha}^2]_t = \|V_{\alpha}\|^2(i, 2N) - \|V_{\alpha}\|^2(i, |2i|+3),$$

$$\begin{aligned}
& \tau h_1 h_2 \sum_{j=-L+1}^{L-1} \sum_{i=-N+2}^{N-2} \sum_{k=|2i|+3}^{2N-1} [V_y^2]_t = \|V_y\|^2(i, 2N) - \|V_\alpha\|^2(i, |2i|+3), \\
& \tau h_{11} h_2 \sum_{j=-L+1}^{L-1} \sum_{i=-N+2}^{N-2} \sum_{k=|2i|+3}^{2N-1} \{ [V_\alpha(V_t + V_{\bar{t}})](i+1, k) - \\
& - [V_\alpha(V_t + V_{\bar{t}})](i, k) \} / h_1 = \frac{\tau}{h_1} \left[\sum_{i=0}^{-N+2} -\|V_\alpha(V_t + V_{\bar{t}})\|(i, |2i|+3) - \right. \\
& - \sum_{i=0}^{-N+3} \|V_\alpha(V_t + V_{\bar{t}})\|(i, |2i|+4) + \sum_{i=-N+2}^{-1} \|V_\alpha(V_t + V_{\bar{t}})\|(i, |2i|+1) + \\
& \left. + \sum_{i=1}^{N-2} \|V_\alpha(V_t + V_{\bar{t}})\|(i, |2i|+2) \right] \leq \|\Gamma\|_1^2(i, |2i|+3).
\end{aligned}$$

Символ $\sum_{i=v_1}^{v_2}$ означает, что суммирование осуществляется по i от v_1 до v_2 на характеристиках и

$$\begin{aligned}
\|\Gamma\|_1^2(i, |2i|+3) &= \frac{\tau}{h_1} \left\{ \sum_{i=0}^{-N+2} \left(\|V_{\bar{\alpha}}\|^2 + \|V_{\bar{t}}\|^2 \right)(i, |2i|+2) + \right. \\
&+ \sum_{i=0}^{-N+3} \left(\|V_{\bar{\alpha}}\|^2 + \|V_{\bar{t}}\|^2 \right)(i, |2i|+4) + \sum_{i=-N+2}^{-1} \left(\|V_{\bar{\alpha}}\|^2 + \|V_{\bar{t}}\|^2 \right)(i, |2i|+1) + \\
&\left. + \sum_{i=1}^{N-2} \left(\|V_{\bar{\alpha}}\|^2 + \|V_{\bar{t}}\|^2 \right)(i, |2i|+3) \right\}.
\end{aligned}$$

Оценивая теперь остальные выражения по методике [6] имеем

$$\begin{aligned}
& \left[1 - \frac{\tau}{h_1} - \frac{\tau}{h_2} * \frac{\Pi_{51}}{\Pi_{71}} - \frac{\tau}{h_1} \frac{\Pi_{51}}{\Pi_{71}} * \Pi_8 \right] \|V_{\bar{t}}\|^2(i, 2N) + \left[1 - \frac{\tau}{h_1} - \frac{\Pi_{51}}{\Pi_{71}} * \Pi_8 \right] \|V_\alpha\|^2(i, 2N) + \\
& + \left[\frac{\Pi_{51}}{\Pi_{71}} - \frac{\tau}{h_2} * \frac{\Pi_{51}}{\Pi_{71}} - \frac{\Pi_{51}}{\Pi_{71}} * \Pi_8 - \frac{\tau}{h_1} \frac{\Pi_{51}}{\Pi_{71}} * \Pi_8 \right] \|V_y\|^2(i, 2N) \leq \\
& \leq \|\Gamma\|_1^2(i, |2i|+3) + \left[1 + \frac{\tau}{h_1} + \frac{\tau}{h_2} * \frac{\Pi_5}{\Pi_7} + \frac{\tau}{h_1} \frac{\Pi_5}{\Pi_7} * \Pi_6 \right] \|V_{\bar{t}}\|^2(i, |2i|+3) + \\
& + \left[1 + \frac{\tau}{h_1} + \frac{\Pi_5}{\Pi_7} * \Pi_6 \right] \|V_\alpha\|^2(i, |2i|+3) + \left[\frac{\Pi_5}{\Pi_7} + \frac{\tau}{h_2} * \frac{\Pi_5}{\Pi_7} + \right. \\
& \left. + \frac{\Pi_5}{\Pi_7} * \Pi_6 + \frac{\tau}{h_1} \frac{\Pi_5}{\Pi_7} * \Pi_6 \right] \|V_y\|^2(i, |2i|+3) + \left[2\tau + 3\tau \frac{\Pi_5}{\Pi_7} * \Pi_6 + \frac{\Pi_9}{\Pi_7} + 2\tau \frac{\Pi_5}{\Pi_7} * \Pi_6 * \frac{\Pi_9}{\Pi_7} + \right.
\end{aligned}$$

$$+\tau*\frac{\Pi_5*\Pi_9}{\Pi_7}\Bigg]_{k=|2i|+3}^{2N}\|V\|_1^2(i,k)$$

$$\text{где } \|V\|_1^2(i,k)=\left(\|V_t\|^2+\|V_\alpha\|^2+\|V_y\|^2\right)(i,k).$$

(15)

Из (15) получим

$$\begin{aligned} \|V\|_1^2(i,2N) &\leq \frac{1}{P_2} \|\Gamma\|_1^2(i,|2i|+3) + \frac{P_3}{P_2} \|V\|_1^2(i,|2i|+3) + \\ &+ \frac{\tau P_4}{P_2} \sum_{k=|2i|+3}^{2N-1} \|V\|_1^2(i,k), \end{aligned}$$

(16)

здесь

$$\begin{aligned} P_2 &= \min \left\{ \left[1 - \frac{\tau}{h_1} - \frac{\tau}{h_2} \frac{\Pi_{51}}{\Pi_{71}} - \frac{\tau}{h_1} * \frac{\Pi_{51}}{\Pi_{71}} * \Pi_8 \right], \left[1 - \frac{\tau}{h_1} - \frac{\Pi_{51}}{\Pi_{71}} * \Pi_8 \right], \right. \\ &\left. \left[\frac{\Pi_{51}}{\Pi_{71}} - \frac{\tau}{h_2} * \frac{\Pi_{51}}{\Pi_{71}} - \frac{\Pi_{51}}{\Pi_{71}} * \Pi_8 - \frac{\tau}{h_1} \frac{\Pi_{51}}{\Pi_{71}} * \Pi_8 \right] \right\}, \\ P_3 &= \max \left\{ \left[1 + \frac{\tau}{h_1} + \frac{\tau}{h_2} \frac{\Pi_5}{\Pi_7} + \frac{\tau}{h_1} * \frac{\Pi_5}{\Pi_7} * \Pi_6 \right], \left[1 + \frac{\tau}{h_1} + \frac{\Pi_5}{\Pi_7} * \Pi_6 \right], \right. \\ &\left. \left[\frac{\Pi_5}{\Pi_7} + \frac{\tau}{h_2} * \frac{\Pi_5}{\Pi_7} + \frac{\Pi_5}{\Pi_7} * \Pi_6 + \frac{\tau}{h_1} \frac{\Pi_5}{\Pi_7} * \Pi_6 \right] \right\}, \\ P_4 &= \left[2 \frac{\Pi_5}{\Pi_7} + 3 * \frac{\Pi_5}{\Pi_7} * \Pi_6 + \frac{\Pi_9}{\Pi_7} + \frac{\Pi_5}{\Pi_7^2} * \Pi_9 + \frac{\Pi_5}{\Pi_7^2} * \Pi_6 * \Pi_9 \right]. \end{aligned}$$

В силу равенства $V(i,2N) = V(i,|2i|+3) + \tau \sum_{k=|2i|+4}^{2N} V_t(i,k)$ получим неравенства

$$\|V\|^2(i,2N) \leq \|V\|^2(i,|2i|+3) + 2\|V\|(i,|2i|+3)\tau \sum_{k=|2i|+4}^{2N} \|V_t\|(i,k) +$$

$$+ \left[\tau \sum_{k=|2i|+4}^{2N} \|V_t\|(i, k) \right]^2 \leq 2\|V\|^2(t, |2i|+3) + 4N\tau^2 \sum_{k=|2i|+4}^{2N} \|V_t\|^2(i, k).$$

Таким образом, усиливая оценки, из последнего неравенства получим

$$\|V\|_2^2(i, 2N) \leq 2\|V\|_1^2(i, |2i|+3) + 4N\tau^2 \sum_{k=|2i|+4}^{2N} \|V_t\|^2(i, k). \quad (17)$$

Из неравенств (16) и (17) имеем

$$\begin{aligned} \|V\|_2^2(i, 2N) &\leq \frac{1}{P_2} \|\Gamma\|_1^2(i, |2i|+3) + \frac{P_3}{P_2} \|V\|_1^2(i, |2i|+3) + \\ &+ 2\|V_t\|^2(i, |2i|+3) + \left[\frac{P_4}{P_2} + 4N\tau^2 \right] \sum_{k=|2i|+3}^{2N} \|V_t\|_2^2(i, k), \end{aligned}$$

$$\text{где} \quad \|V\|_2^2(i, k) = \|V\|_1^2(i, k) + \|V\|^2(i, k).$$

(18)

Используя дискретный аналог неравенства Гронуолла-Беллмана, из (18) имеем

$$\|V\|_2^2(i, 2N) \leq P_5 \left[\|\Gamma\|_1^2(i, |2i|+3) + \|V\|_1^2(i, |2i|+3) \right] \exp \left[\left(\frac{P_4}{P_2} + 4N\tau^2 \right) t \right],$$

$$P_5 = \max \left\{ 2, \frac{P_3}{P_2}, \frac{1}{P_2} \right\}.$$

(19)

Если считать, что u_{ij}^k - точное сеточное решение задачи (14), т.е. с малыми членами $O(h_1^2 + h_2^2 + \tau^2)$, то и для сеточной функции u_{ij}^k также можно получить оценку (19) но с малым членом $O(h_1^2 + h_2^2 + \tau^2)$.

Следовательно

$$\|g - V\|(i, 2N) \leq P_6(5\tau^2 + h_2^2), \quad h_1 = 2\tau,$$

$$\text{где} \quad P_6 = \exp \left\{ P_4 \frac{T^2}{P_2} + 2T^3 \right\} \|g\|_{C^4(\Omega(T, D))} / 12.$$

(20)

Таким образом, доказана теорема

Теорем. Пусть выполнены (2)-(3), (4) и решение задачи (9) существует и имеет непрерывные частные производные до четвертого порядка включительно в области $\Omega(T, D)$. Тогда существует $C_2 > 0$ такое, что при $\tau/h_2 < C_2$ решение конечно – разностной задачи (14) сходится к точному решению (9) со скоростью порядка $O(h_1^2 + h_2^2 + \tau^2)$ в классе $W_2^1(\Omega(T, D))$ и справедлива оценка (20). Коэффициент C_2 зависит только от нормы коэффициентов уравнения.

Из эквивалентности задач (9) и (1)-(3) следует, что приближенное конечно-разностное решение задачи (14) также сходится к точному решению (1)-(3) со скоростью порядка $O(h^2 + h_2^2 + \tau^2)$ в классе $W_2^1(\Omega(T, D))$, где h – шаг по z , при выполнении условий теоремы.

Заключение. Построено приближенное конечно разностное решение двумерной прямой задачи сейсмоки с мгновенным и шнуровым источником.

Доказана сходимость решение задачи к точному решению.

Список литературы

1. Аки К. Количественная сейсмология [Текст] / К.Аки, П.Ричардс. – М.: Мир, 1983.–520 с.
2. Мусхелишвили Н.И. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости [Текст] / Н.И.Мусхелишвили. – М.: Наука, 1976. -708с.
3. Партон В.З. Методы математической теории упругости [Текст] / В.З. Партон, В.И. Перлин. – М.: Наука, 1981. – 688с.
4. Корягин В.В. Математическое моделирование в сейсморазведке [Текст] / В.В. Корягин, Ю.П. Сахаров. - М.: Наука, 1988. - 160 с.
5. Дьеласан Э. Упругие волны в твердых телах [Текст] / Э. Дьеласан, Д.Руайе. – М.: Наука, 1982. – 424с.
6. Сатыбаев А.Дж. Конечно-разностное регуляризованное решение обратных задач гиперболического типа [Текст] / А.Дж.Сатыбаев. – Ош: Ошоблтипография, 2001. – 143 с.