УДК 517.958

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В ЦИЛИНДРЕ СО СВОБОДНОЙ СТРУЕЙ

Закиров Аскар Халилович, *к.ф.-м.н.,доцент, Национальный университет Узбекистана, 1000174, г.Ташкент, ул. Университетская-1,* e-mail: asqar_z@mail.ru

Цель статьи – решение задачи о потенциальном течении идеального несжимаемого газа в цилиндре со свободной границей. Автором проведено теоретическое исследование гидродинамических процессов, соответствующих протеканию газа в цилиндр. При решении задачи использованы аналитические методы теории струй. Получено решение поставленной краевой задачи в верхней полуплоскости.

Ключевые слова: струя, идеальный газ, свободная поверхность, конформное отображение, аналитическая функция, краевая задача, комплексный потенциал, комплексная скорость.

MODELING OF FLOF OF IDEAL GAS IN THE CYLINDER WITH A FREE JET

Zakirov Asqar Khalilovich, *PhD, Associate Professor, National University of Uzbekistan, 1000174, c.Tashkent, st. University-1,* e-mail: asqar_z@mail.ru

The purpose of the article - to solve the problem of potential flow of an ideal incompressible gas in the cylinder with a free boundary. The author conducted a theoretical study of hydrodynamic processes corresponding to the flow of gas in the cylinder. In solving the problem used analytical methods of the theory of jets. Obtained solution of the boundary value problem in the upper half.

Keywords: ideal gas, jet free surface, conformal mapping, analytic function, boundary value problem, the complex potential, complex velocity.

Задачи о струйном течении жидкости и газа имеют практическое приложение в гидротехнике, автотранспорте и других разделах техники. В последние годы решены многие задачи о течении несжимаемой жидкости в канале, с полигональными стенками при отсутствии внешних сил и вихрей. Теория движения идеальной жидкости математически очень глубоко разработана и во многих случаях дает вполне удовлетворительную картину действительных движений. Как показывает практика, математическое моделирование существенно влияет на развитие большинства направлений современной науки и техники. Особенно развитие машиностроения, обусловливает необходимость проведения теоретических исследований по струйным течениям газа с образованием свободной поверхности.

Рассматривается плоское, установившееся, потенциальное течение несжимаемого газа в цилиндре. Внешние и поверхностные силы отсутствуют. Скорость газа на бесконечности V_∞ параллельна оси 0y. Проведено теоретическое исследование гидродинамических процессов, соответствующих протеканию газа в цилиндр.

Предполагается, что источник с секундным расходом q расположен в точке А: $q = V_A L$, где V_A - скорость частицы газа в точке А, L - ширина потока на источнике. После открытия заслонки ВС, частицы газа заполняет полость цилиндра, при этом образуют свободную поверхность CD с неизвестной границей, вдоль которой давление постоянно (рис.1).

Имеем следующие граничные условия на твёрдых стенках цилиндра: проекция скорости на нормаль к поверхности равна нулю, т.е. скорость должна быть направлена по касательной к поверхности: $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \psi = const$. Из теории функций комплексного переменного известно, что действительная и мнимая часть произвольной аналитической функции комплексного также удовлетворяют соотношению Коши-Римана.

Решение задачи о струйном течении газа хорошо известны в работах [1,6]. Опираясь на некоторые методы гидродинамики для идеального газа, при решении задачи используются аналитические методы теории струй. Будем искать решение задачи, позволяющее найти как скорость в каждой точке области течения, так и форму линии тока.

Решение рассматриваемой задачи может быть получено как решение краевой задачи в верхней полуплоскости $(\zeta = \xi + i\eta)$. Область течения в физической плоскости (z) отображается на верхнюю полуплоскость (ζ) (рис.2). Основная сложность в решении поставленной задачи состоит в нахождении функции $z = z(\zeta)$.

Пусть аналитическая функция $z = z(\zeta)$ конформно отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta \ge 0$ на область G_z так, чтобы точкам $-b, 0, d, k, 1, e, f$ оси ξ соответствовали точки B, C, D, K, M, E, F границы области G_z, т.е. $z_B = z(-b)$, $z_C = z(0)$, $z_D = z(d)$, $z_K = z(k)$, $z_M = z(1)$, $z_E = z(e)$, $z_F = z(f)$, $\infty = z(\infty)$, при этом $\alpha\pi = 45^0$.

Функция комплексного потенциала $W = \varphi + i\psi$ будет аналитической функцией в области течения G_z. Область комплексного потенциала $W(\zeta) = \varphi(\xi,\eta) + i\psi(\xi,\eta)$ представляет собой полосу шириной q. Конформное отображение верхней полуплоскости G_ζ на полосу осуществляется аналитической функцией [2-4]:

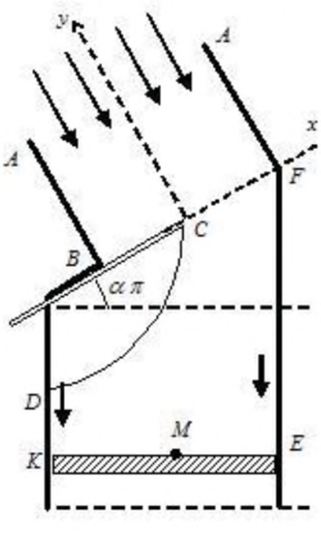
$$W(\zeta) = -\frac{q}{\pi}\ln(\zeta - 1) + iq . \tag{1}$$

Введем аналитическую функцию Жуковского в следующем виде:

$$\omega(\zeta) = \ln\frac{iV_0}{\overline{V}} = \ln\frac{V_0}{V} + i(\theta + \frac{\pi}{2}), \tag{2}$$

где V_0 - модуль скорости на свободной поверхности, $\overline{V} = u - iv$ - сопряженная комплексная скорость.

Согласно методу Н.Е.Жуковского, функции $\omega(\zeta)$ и $W(\zeta)$ выражаются через параметрическую переменную ζ, изменяющуюся в верхней полуплоскости, и вместо функции $z(\zeta)$ можно искать функцию $\omega(\zeta)$.



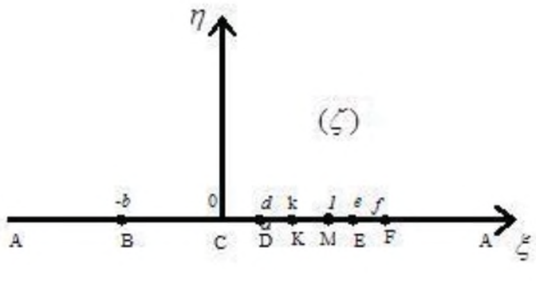


Рис. 1 Физическая плоскость. Рис. 2 Параметрическая плоскость

Запишем граничные условия для функции $\omega(\zeta)$:

вдоль AB, FA: при $\eta = 0, -\infty < \xi < -b$, $f < \xi < \infty$: $\operatorname{Im}\omega = 0$,

вдоль BC: при $\eta = 0, -b < \xi < 0$, $\operatorname{Im}\omega = \dfrac{\pi}{2}$,

вдоль CD: при $\eta = 0$, $0 < \xi < d$, $\operatorname{Re}\omega = 0$,

вдоль DK, EF: при $\eta = 0, d < \xi < k$, $e < \xi < f$, $\operatorname{Im}\omega = -\dfrac{\pi}{4}$,

вдоль KM: при $\eta = 0, k < \xi < 1$, $\operatorname{Im}\omega = \dfrac{\pi}{4}$,

вдоль ME: при $\eta = 0, 1 < \xi < e$, $\operatorname{Im}\omega = -\dfrac{3\pi}{4}$.

Таким образом, для определения функции $\omega(\zeta)$ имеем смешанную краевую задачу Шварца на верхней полуплоскости (ζ).

Теперь введем в рассмотрение функцию $\omega_1(\zeta) = \dfrac{\omega(\zeta)}{\sqrt{\zeta}\sqrt{\zeta - d}}$ и запишем граничные условия для функции $\omega_1(\zeta)$. На всей границе области (ζ) известна мнимая часть функции $\omega_1(\zeta)$ и, следовательно, ее можно восстановить согласно интегральной формуле Шварца [3]:

$$\omega_1(\zeta) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\int_{-b}^{0}\frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{t-d}\ (t-\zeta)} - \frac{\pi}{4}\int_{d}^{k}\frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{t-d}\ (t-\zeta)} + \frac{\pi}{4}\int_{k}^{1}\frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{t-d}\ (t-\zeta)} - \right.$$

$$\left. - \frac{3\pi}{4}\int_{1}^{e}\frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{t-d}\ (t-\zeta)} - \frac{\pi}{4}\int_{e}^{f}\frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{t-d}\ (t-\zeta)}\right].$$

При вычислении интегралов используем следующую замену $\dfrac{1}{t-\zeta} = s$, и получим [5]:

$$\int\frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{t-d}\ (t-\zeta)} = -\frac{2}{\sqrt{\zeta}\sqrt{\zeta - d}}\ln\left[\frac{\sqrt{\zeta-d}\sqrt{t} + \sqrt{\zeta}\sqrt{t-d}}{\sqrt{t-\zeta}}\right].$$

Опуская промежуточные выкладки, проведем лишь окончательное выражение для функции $\omega(\zeta)$:

$$\omega(\zeta = \ln\left[\frac{F^2(\zeta,1)}{F(\zeta,b)F(\zeta,k)F(\zeta,e)\sqrt{F(\zeta,f)}}\right], \tag{3}$$

где $F(\zeta,b) = \dfrac{\sqrt{d(\zeta+b)}}{\sqrt{\zeta-d} + \sqrt{\zeta(d+b)}}$, $F(\zeta,k) = \dfrac{\sqrt{\zeta-k}}{\sqrt{k(\zeta-d)} + \sqrt{\zeta(k-d)}}$,

$$F(\zeta,1) = \frac{\sqrt{\zeta-1}}{\sqrt{\zeta-d} + \sqrt{\zeta(1-d)}},\ F(\zeta,f) = \frac{\sqrt{\zeta-f}}{\sqrt{(\zeta-d)f} + \sqrt{\zeta}\sqrt{f-d}}.$$

Поскольку переменная ζ является функцией переменной z, то получим формулу для пересчета скоростей в плоскостях z и ζ:

$$\overline{V}(\zeta) = \frac{dW}{d\zeta} = \frac{dW(z)}{dz}\frac{dz}{d\zeta}. \tag{4}$$

Пользуясь выражением (3), из последнего выражения может быть найдена комплексная скорость:

$$\overline{V}=\frac{dW}{dz}=iV_0\Phi(\zeta)\,, \tag{5}$$

где $\Phi(\zeta)=\dfrac{F(\zeta,b)F(\zeta,k)F(\zeta,e)\sqrt{F(\zeta,f)}}{F^2(\zeta,1)}$.

Таким образом, получено аналитическое решение поставленной задачи.

Выражение для комплексной переменной $z=x+iy$ физической плоскости находится из формулы

$$dz=dx+idy=\frac{dW}{d\zeta}\left(\frac{dW}{dz}\right)^{-1}d\zeta\,, \tag{6}$$

где $\dfrac{dW}{d\zeta}=-\dfrac{q}{\pi}\dfrac{1}{\zeta-1}$.

Для нахождения какую-нибудь линии тока достаточно проинтегрировать (6) вдоль этой линии, и отделив действительную и мнимую части, найти уравнение линии тока в параметрической форме.

После интегрирования (6) по переменной ξ, в указанных отрезках действительной оси G_ζ, получены систему пяти уравнений для отыскания значений неизвестных параметров $b,\,d,\,k,e,\,f,$ входящих в решение данной задачи. А также выведены расчётные формулы для давлений и плотностей, и дано их приложение для вычисления гидродинамических и кинематических характеристик процессов протекания газа в цилиндре.

Список литературы

1. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости / М.И. Гуревич. М.- Наука, 1979.
2. Закиров А.Х. Изучение течения сжимаемого газа со свободной струей в цилиндре/ А.Х. Закиров // Труды Международной конференции "Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика", Новосибирск, Россия, 2011.
3. Лаврентьев М.А.Методы теории функций комплексного переменного/ М.А Лаврентьев, Б.В Шабат.- М.: Наука, 1987.
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский.- М.- Дрофа, 2003.
5. Прудников А.П. Интегралы и ряды/ А.П. Прудников, Ю.А. Бричков, О.И. Марычев.- М.- Наука, 1981.
6. Хамидов А.А. Плоские и осесимметричные задачи о струйном течении идеальной сжимаемой жидкости/ А.А. Хамидов .- Ташкент.- Фан.- 1978.

УДК 548.74, 539.219.1 (04)

ОПТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РАДИАЦИОННЫХ ЦЕНТРОВ ОКРАСКИ В КРИСТАЛЛАХ ФТОРИДА ЛИТИЯ

Илхан Салих, *соискатель ИФТПиМ НАН КР,* ***Кидибаев Мустафа Мусаевич****, член-корр. НАН КР,* ***Денисов Геннадий Степанович*** *- д.ф.-м.н., Институт физико-технических проблем и материаловедения НАН КР, 720071, Кыргызстан, Бишкек, пр. Чуй 265-а,*
E-mail: Kidibaev@mail.ru

Щелочно-галоидные кристаллы (ЩГК) являются весьма удобными модельными объектами для изучения собственных и примесных дефектов в кристаллах. Они представляет собой достаточно простую кристаллическую систему, что позволяет проводить глубокий анализ свойств дефектов и количественный расчет целого ряда их параметров. Фториды щелочных металлов, относящиеся к числу ионных кристаллов с кубической кристаллической