Из анализа представленной модели вытекает следующие выводы:

1.Остаточные напряжения 1-го, 2-го и 3-го рода изменяются в соответствии с их знаками взаимосогласованно: в одном направлении напряженных (всюду сжатых – отрицательные знаки, или всюду растянутых– положительные знаки) структурных элементах разного масштабного уровня (цепочки **А** и **Д**), увеличение напряжения 3-го рода приводит к уменьшению напряжений 1-го и 2-го рода, а уменьшение напряжений 3-го рода к увеличению напряжений 1-го и 2-го рода.

2. В разнонаправленных напряженных структурных элементах (цепочки **Б** и **Г**), увеличение напряжения 3-го рода приводит к увеличению напряжений 1-го и 2-го рода, а уменьшение напряжения 3-го рода до смены знака - к уменьшению напряжений 1-го и 2-го рода.

3. В разнонаправленых напряженных структурных элементах (цепочки **Б** и **Г**), уменьшение напряжения 3-го рода и смена знака приводит к уменьшению абсолютной величины напряжений 1-го и 2-го рода и смене их знака.

4. В не напряженных структурных элементах (цепочка **В**), формирование сжимающих напряжений 3-го рода приводит к формированию растягивающих напряжений 1-го и 2-го рода, формирование растягивающих напряжений 3-го рода - к формированию сжимающих напряжений 1-го и 2-го рода.

## Список литературы

1. Зильбершмидт М.Г. Методы анализа структурного состояния горных пород. Ч.1 [Текст] / М.Т. Зильбершмидт, Т.К. Заворыкина. - М.: МГИ 1980.-с.88.

2. Тажибаев К.Т. Структурно-механическая модель напряженно-деформированного состояния неоднородной твердой среды [Текст] / К.Т.Тажибаев, Р.М. Султаналиева // Геомеханическое обоснование методов расчета устойчивости обнажений.-Бишкек: Илим, 1992. – С.99-107.

3. Тажибаев К. Т. Остаточные напряжения разных масштабно - структурных уровней и анализ их изменения на основе структурно-механической модели неоднородного твердого материала [Текст] /К.Т. Тажибаев, Р.М. Султаналиева //Известия НАН КР №2.- 2011. - С . 110-114.

УДК 519.6

# ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ЗАДАЧИ ТРЕХФАЗНОЙ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В «ГЛОБАЛЬНОЙ» ПОСТАНОВКЕ

***Темирбеков Нурлан Муханович****, д.ф-м.н.,профессор, Казахстанский инженерно-технологический университет, Казахстан, 050060, г. Алматы, пр. аль-Фараби, 93 Г/5,*
e-mail: temirbekov@rambler.ru
***Байгереев Досан Ракимгалиевич****, Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева, Казахстан, 070000, г. Усть-Каменогорск, ул. Серикбаева 19,*
e-mail: dbaigereyev@gmail.com

Работа посвящена исследованию устойчивости конечно-разностных схем для задачи трехфазной неизотермической фильтрации в однородной, изотропной среде без учета капиллярных и гравитационных сил методом априорных оценок. Актуальность работы связана с тем, что рассматриваемая модель описывает процессы, протекающие в нефтяных пластах при добыче тяжелой нефти методом паротеплового воздействия на пласт. В качестве исходной дифференциальной задачи принята так называемая «глобальная» постановка задачи, состоящая из пяти дифференциальных уравнений в частных производных для температуры, водонасыщенности, нефтенасыщенности, скорости и «глобального» давления.

Рассматриваются два модельных случая с предположениями на коэффициенты уравнений. Получены априорные оценки в энергетической норме для решения разностных задач.

**Ключевые слова:** трехфазный неизотермический поток, априорная оценка, глобальное давление, метод конечных разностей, устойчивость.

## STUDY OF STABILITY OF DIFFERENCE SCHEMES FOR THE THREE-PHASE NON-ISOTHERMAL FLOW PROBLEM IN THE "GLOBAL" FORMULATION

***Temirbekov Nurlan M.**, Dr. Phys. Math..,Prof., Kazakhstan Engineering Technological University, Kazakhstan, 050060, Almaty, al-Farabi ave., 93 G/5,* e-mail: temirbekov@rambler.ru
***Baigereyev Dossan R.**, D. Serikbayev East Kazakhstan State Technical University, Kazakhstan, 070000, Ust-Kamenogorsk, Serikbayev 19,* e-mail: dbaigereyev@gmail.com

This paper is devoted to the stability study of the finite difference schemes for the three-phase non-isothermal flow problem in a homogeneous, isotropic media without capillary and gravitational forces. The relevance of the work is related to the fact that the considered model describes processes occuring in reservoirs on the method of oil extraction by steam. So-called "global" formulation of the problem consisting of five partial differential equations with respect to temperature, water and oil saturations, velocity and "global" pressure is used. Two model cases with regards to assumptions on the coefficients of the equations are considered. A priori estimates in an energy norm are obtained for the solution of the difference problems.

**Keywords**: three-phase non-isothermal flow, a priori estimate, global pressure, finite difference method stability.

Различные подходы численного решения задачи неизотермической фильтрации были изучены в работах [1, 2, 4, 5, 6, 9, 10]. Работы [4, 6] посвящены численному решению уравнений двухфазной неизотермической фильтрации. В работе [10] предложена новая «глобальная» постановка задачи трехфазной неизотермической фильтрации, в основу которой положена замена переменных для давления – «глобальное» давление. Данный подход был впервые предложен в работах [3, 8] для двухфазной изотермической фильтрации, затем обобщен для трехфазного изотермического случая. В работе [10] исходные уравнения неизотермической модели Маскета-Леверетта были сведены к системе из пяти уравнений в частных производных относительно «глобального» давления, температуры, скорости и двух насыщенностей.

Цель данной работы заключается в проведении исследования устойчивости двух конечно-разностных схем для задачи трехфазной неизотермической фильтрации. Получены априорные оценки в энергетической норме, показывающие устойчивость разностных схем по начальным данным и правым частям уравнений системы.

В области $\overline{Q}_T = \overline{\Omega}\times[0,t_1]$, где $\overline{\Omega}=[0,l]\times[0,l]$ - квадрат с границей $\Gamma$, рассматривается задача трехфазной неизотермической фильтрации без учета гравитационных и капиллярных сил в "глобальной" постановке [10]:

$$c_T\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla T-\nabla\cdot(k_h\nabla T)=f_T, \tag{1}$$

$$\beta_p\frac{\partial p}{\partial t}-\nabla\cdot(k_p\nabla p)-\beta_T\frac{\partial T}{\partial t}=f_p, \tag{2}$$

$$\frac{\partial s_w}{\partial t}-\nabla\cdot(\nu_w(x,t)\nabla p)=f_w, \tag{3}$$

$$\frac{\partial s_o}{\partial t}-\nabla\cdot(\nu_o(x,t)\nabla p)=f_o, \tag{4}$$

$$\vec{u} = -k\lambda(\gamma\nabla p - \xi\nabla T)$$

с начальными и граничными условиями

$$p(x,0) = p_0, T(x,0) = T_0, s_\alpha(x,0) = s_{\alpha 0}, \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \vec{n}}\right|_\Gamma = g_1, \left.\frac{\partial p}{\partial \vec{n}}\right|_\Gamma = 0. \tag{6}$$

Рассмотрим два модельных случая. В первом модельном случае предположим, что функция $k_p$ зависит только от глобального давления, коэффициенты $c_T$, $\beta_p$ являются постоянными и равными единице, а коэффициент $\beta_T \equiv 0$. Предположим, что относительно функций $k_p$, $\nu_\alpha$ выполнены следующие условия:

$$|k_p(p)| \geq c_0,\ c_0 \leq |\nu_\alpha| \leq c_1. \tag{7}$$

Поставим в $\overline{\omega}_{h\tau}$ в соответствие дифференциальной задаче (1)-(6) разностную схему:

$$BT_t^h + L(\vec{u}^h, T^h) + \Lambda_1 T^h = F_T, \tag{8}$$

$$Bp_t^h + \Lambda_2 p^h = F_p, \tag{9}$$

$$s_{\alpha,t}^h + \Lambda_{3\alpha} p^h = F_\alpha,\ \alpha = w,o, \tag{10}$$

$$u_m^h = -\lambda p_{\bar{x}_m}^h,\ m = 1,2 \tag{11}$$

$$T^h(0) = T_0,\ p^h(0) = p_0,\ s_\alpha^h(0) = s_{\alpha 0}, \tag{12}$$

где

$$B = E + \tau\sigma R,\ R = R_1 + R_2,$$

$$L(\vec{u},\theta) = 0.5\sum_{m=1}^{2}\left[\beta_m^+(x) u_m^{+1_m}\theta_{x_m} + \beta_m^-(x) u_m \theta_{\bar{x}_m}\right],$$

$$\beta_m^+(x) = \{1, 0 \leq x_m < l; 0, x_m = l\},\ \beta_m^-(x) = \{1, 0 < x_m \leq l; 0, x_m = 0\},$$

$$R_m y = \left\{-\frac{2}{h} y_{x_m} + y, x_m = 0; -y_{\bar{x}_m x_m} + y, 0 < x_m < l; \frac{2}{h} y_{\bar{x}_m} + y, x_m = l\right\},$$

$$\Lambda_1 y = \left\{-\frac{2}{h} k_h^h y_{x_m}, x_m = 0; -k_h^h y_{\bar{x}_m x_m}, 0 < x_m < l; \frac{2}{h} k_h^h y_{\bar{x}_m}, x_m = l\right\},$$

$$\Lambda_2 y = \sum_{m=1}^{2}\left[\chi_m^+(x)\Lambda_{2,m}^+ y + \chi_m^-(x)\Lambda_{2,m}^- y\right],\ \Lambda_{3\alpha} y = \sum_{m=1}^{2}\Lambda_{3\alpha,m} y,$$

$$\chi_m^+(x) = \{1, x_n = 0; 0.5, 0 < x_n < l; 0, x_n = l\},\ \chi_m^-(x) = 1 - \chi_m^+(x),\ n \neq m,$$

$$\Lambda_{2,m}^+ y = \left\{-\frac{2}{h} k_p^h y_{x_m}, x_m = 0; -\left(k_p^h y_{x_m}\right)_{\bar{x}_m}, 0 < x_m < l; \frac{2}{h}\left(k_p^h y_{x_m}\right)^{-1_m}, x_m = l\right\},$$

$$\Lambda_{2,m}^- y = \left\{-\frac{2}{h}\left(k_p^h y_{\bar{x}_m}\right)^{+1_m}, x_m = 0; -\left(k_p^h y_{\bar{x}_m}\right)_{x_m}, 0 < x_m < l; \frac{2}{h} k_p^h y_{\bar{x}_m}, x_m = l\right\},$$

$$\Lambda_{3\alpha,m} y = \left\{-\frac{2}{h}\nu_\alpha^h y_{x_m}, x_m = 0; -\left(\nu_\alpha^h y_{\bar{x}_m}\right)_{x_m}, 0 < x_m < l; \frac{2}{h}\nu_\alpha^h y_{\bar{x}_m}, x_m = l\right\},$$

$$F_T(x,t) = \left\{f_T^h, x \in \omega; f_T^h + \frac{2g_1^h(x)}{h}, x \in \gamma; f_T^h + \frac{4g_1^h(x)}{h}, x \in \gamma_0\right\},$$

$$f_T^h = f_T + O(h^2),\ f_p^h = f_p + O(h^2),\ g_1^h = g_1 + O(h^2),$$

где используются обозначения из работы [7]. Введем скалярные произведения и нормы:

$$(u,v)_{\overline{\omega}} = \sum_{x \in \overline{\omega}} u(x)v(x)H(x),\ (u,v) = \sum_{x \in \omega} u(x)v(x)h_1 h_2,\ (u,v)_\pm = \sum_{x \in \omega_\pm} u(x)v(x)h_1 h_2,$$

$$\|u\|^2=(u,u)_{\overline{\omega}},\quad \|u\|_1^2=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2}\left[\left(u_{\bar{x}_m}^2,1\right)_+ +\left(u_{x_m}^2,1\right)_-\right],$$

$$H(x)=\{h_1h_2,x\in\omega;\ 0.5h_1h_2,\ x\in\gamma;\ 0.25h_1h_2,x\in\gamma_0\}.$$

Пусть $\left(T^h,p^h,s_\alpha^h,\vec{u}^h\right)$ и $\left(\widetilde{T}^h,\widetilde{p}^h,\widetilde{s}_\alpha^h,\vec{\widetilde{u}}^h\right)$ - решения разностной задачи (8)-(12), соответствующие начальным данным $(T_0,p_0,s_{\alpha0})$, $\left(\widetilde{T}_0,\widetilde{p}_0,\widetilde{s}_{\alpha0}\right)$ и правым частям $\left(F_T,F_p,F_\alpha\right)$, $\left(\widetilde{F}_T,\widetilde{F}_p,\widetilde{F}_\alpha\right)$. Положим

$$\theta=T^h-\widetilde{T}^h,\ \psi_T=F_T-\widetilde{F}_T,\ \pi=p^h-\widetilde{p}^h,\ \psi_p=F_p-\widetilde{F}_p,$$

$$\sigma_\alpha=s_\alpha^h-\widetilde{s}_\alpha^h,\ \psi_\alpha=F_\alpha-\widetilde{F}_\alpha,\ \alpha=w,o,$$

$$\vec{\zeta}_m=\vec{u}_m-\vec{\widetilde{u}}_m,\ m=1,2.$$

Тогда получим следующую задачу для $\left(\theta,\pi,\sigma_\alpha,\vec{\zeta}\right)$:

$$B\theta_t+L\left(\vec{u}^h,T^h\right)-L\left(\vec{\widetilde{u}}^h,\widetilde{T}^h\right)+\Lambda_1\theta=\psi_T, \tag{13}$$

$$B\pi_t+\Lambda_2p^h-\Lambda_2\widetilde{p}^h=\psi_p, \tag{14}$$

$$\sigma_{\alpha,t}+\Lambda_{3\alpha}\pi=\psi_\alpha,\ \alpha=w,o, \tag{15}$$

$$\zeta_m=-\lambda\pi_{\bar{x}_m},\ m=1,2, \tag{16}$$

$$\theta(0)=\theta^0,\ \pi(0)=\pi^0,\ \sigma_\alpha(0)=\sigma_\alpha^0,\ \alpha=w,o. \tag{17}$$

Теорема 1. При выполнении условий (7),

$$\sigma\ge\sigma_0,\ \sigma_0=\max\left\{\frac{4c_1^2}{c_0}+\varepsilon_2,\ \zeta_1+\frac{3c_1}{\varepsilon_4}\right\}, \tag{18}$$

$$\zeta_0\equiv c_0-\zeta_1\|\theta\|_1-\frac{1}{4}\zeta_1\|\theta\|_1^2-\frac{1}{2}c_1\tau\varepsilon_4>0, \tag{19}$$

где

$$\zeta_1=c_4\tau^{-1}\left\|\pi^0\right\|_B^2+c_4\left\|\psi_p\right\|_{R^{-1}}^2,$$

разностная схема (8)-(12) устойчива по начальным данным и правым частям уравнений и справедливо неравенство

$$\left\|\hat{\theta}\right\|_B^2+\|\hat{\pi}\|_B^2+c_5\tau\|\theta\|_1^2+2\tau c_2\|\pi\|_1^2+\sum_{\alpha=w,o}\left\|\hat{\sigma}_\alpha^h\right\|\le\left(1+\frac{\varepsilon_3}{\sigma\delta}\right)\|\theta\|_B^2+$$

$$+\left(1+\frac{\varepsilon_2}{\sigma}\right)\|\pi\|_B^2+\left\|\sigma_\alpha^h\right\|+\frac{2\tau}{\varepsilon_3}\left\|\psi_T\right\|_{R^{-1}}^2+\frac{2\tau}{\varepsilon_2}\left\|\psi_p\right\|_{R^{-1}}^2+c_6\tau\left\|\psi_\alpha\right\|.$$

Приведем следующие леммы, необходимые для доказательства теоремы.

Лемма 1. При выполнении условий $|u_m-v_m|\le a$, $a>0$, $m=1,2$ для $(x,t)\in\overline{\omega}_{h\tau}$, $\vec{u}=(u_1,u_2)$, $\vec{v}=(v_1,v_2)$ справедливо неравенство

$$\left(L(\vec{u},y)-L(\vec{v},z),w\right)_{\overline{\omega}}\ge-0.5a^2\sum_{m=1}^{2}\left\{\left((y-z)_{\bar{x}_m}^2,w\right)_{\overline{\omega}}+\left((y-z)_{x_m}^2,w\right)_{\overline{\omega}}\right\}. \tag{20}$$

Лемма 2. Справедливы неравенства

$$(\Lambda_1y,y)_{\overline{\omega}}\ge c_0\|y\|_1^2,$$

$$2\tau(\Lambda_1w,\widetilde{w})_{\overline{\omega}}\le c_1\left(\varepsilon_1\|w\|_1^2+\frac{\tau^2}{\varepsilon_1}\|\widetilde{w}\|_R^2+\frac{\tau}{\varepsilon_1\delta\sigma}\|\widetilde{w}\|_B^2\right),\ \varepsilon_1>0,$$

$$(\Lambda_2y_1-\Lambda_2z,y_1-z)_{\overline{\omega}}\ge c_0\|y_1-z\|_1^2,$$

$$2\tau\left|\left(\Lambda_2 y_1-\Lambda_2 z,y_2\right)_{\varpi}\right|\le 2c_1\left(\varepsilon_2\|y_1-z\|_1^2+\frac{\tau^2}{\varepsilon_2}\|y_2\|_R^2+\frac{\tau}{\varepsilon_2\sigma\delta}\|y_2\|_B^2\right),\ \varepsilon_2>0.$$

Доказательство теоремы 1. Умножим уравнение (14) скалярно на $2\tau\hat{\pi}$:

$$\|\hat{\pi}\|_B^2-\|\pi\|_B^2+\tau^2\|\pi_t\|_B^2+2\tau\left(\Lambda_2 p^h-\Lambda_2\widetilde{p}^h,\hat{\pi}\right)_{\varpi}=2\tau\left(\psi_p,\hat{\pi}\right)_{\varpi}. \tag{21}$$

Используя лемму 1 и учитывая, что $\hat{\pi}=0.5(\hat{\pi}+\pi)+0.5\tau\pi_t$, оценим скалярные произведения в (21):

$$2\tau\left(\Lambda_2 p^h-\Lambda_2\widetilde{p}^h,\hat{\pi}\right)_{\varpi}\ge 2\tau c_0\|\pi\|_1^2-2c_1\tau\left(\varepsilon_1\|\pi\|_1^2+\frac{\tau^2}{\varepsilon_1}\|\pi_t\|_R^2+\frac{\tau}{\varepsilon_1\sigma\delta}\|\pi_t\|_B^2\right)=$$

$$=2\tau\left(c_0-c_1\varepsilon_1\right)\|\pi\|_1^2-\frac{2c_1\tau^3}{\varepsilon_1}\|\pi_t\|_R^2-\frac{2c_1\tau^2}{\varepsilon_1\sigma\delta}\|\pi_t\|_B^2, \tag{22}$$

$$2\tau\left(\psi_p,\hat{\pi}\right)_{\varpi}=2\tau\left(\psi_p,\pi\right)_{\varpi}+2\tau^2\left(\psi_p,\pi_t\right)_{\varpi}\le\frac{\varepsilon_2}{\sigma\delta}\|\pi\|_B^2+\varepsilon_2\tau^3\|\pi_t\|_R^2+\frac{2\tau}{\varepsilon_2}\|\psi_p\|_{R^{-1}}^2. \tag{23}$$

Используя полученные неравенства и учитывая, что $B\ge\sigma\tau R$, из (21) получим:

$$\|\hat{\pi}\|_B^2+\tau^3\left(\sigma-\frac{4c_1}{\varepsilon_1}-\varepsilon_2\right)\|\pi_t\|_R^2+2\tau\left(c_0-c_1\varepsilon_1\right)\|\pi\|_1^2\le$$

$$\le\left(1+\frac{\varepsilon_2}{\sigma\delta}\right)\|\pi\|_B^2+\frac{2\tau}{\varepsilon_2}\|\psi_p\|_{R^{-1}}^2, \tag{24}$$

откуда выбирая $\sigma\ge\sigma_1$, где $\sigma_1=\dfrac{4c_1^2}{c_0}+\varepsilon_2$, из получим неравенство

$$\|\hat{\pi}\|_B^2+2\tau c_2\|\pi\|_1^2\le\left(1+\frac{\varepsilon_2}{\sigma}\right)\|\pi\|_B^2+\frac{2\tau}{\varepsilon_2}\|\psi_p\|_{R^{-1}}^2. \tag{25}$$

Применяя неравенство (25) последовательно, получим:

$$\left\|\pi^{n+1}\right\|_B^2+2\tau c_2\sum_{k=0}^{n}a^k\left\|\pi^{n-k}\right\|_1^2\le a^{n+1}\left\|\pi^0\right\|_B^2+\frac{2\tau\left(a^n-1\right)}{\varepsilon_2(a-1)}\|\psi_p\|_{R^{-1}}^2,\ a=1+\frac{\varepsilon_2}{\sigma}$$

или

$$\max_{0\le k\le n}\left\|\pi^k\right\|_1^2\le\frac{c_3}{\tau}\left\|\pi^0\right\|_B^2+c_3\|\psi_p\|_{R^{-1}}^2.$$

Тогда для $\vec{\zeta}=(\zeta_1,\zeta_2)$ получим:

$$\sum_{m=1}^{2}\left\|\zeta_m^n\right\|^2=\lambda^2\sum_{m=1}^{2}\left\|\pi_{\bar{x}_m}^n\right\|^2\le c_4\left\|\pi^n\right\|_1^2\le c_4\max_{0\le k\le n}\left\|\pi^k\right\|_1^2\le\frac{c_4}{\tau}\left\|\pi^0\right\|_B^2+c_4\|\psi_p\|_{R^{-1}}^2.$$

Умножим теперь уравнение (13) скалярно на $2\tau\hat{\theta}$:

$$\left\|\hat{\theta}\right\|_B^2-\|\theta\|_B^2+\tau^2\|\theta_t\|_B^2+2\tau\left(L\left(\vec{u}^h,T^h\right)-L\left(\vec{\widetilde{u}}^h,\widetilde{T}^h\right),\hat{\theta}\right)_{\varpi}+2\tau\left(\Lambda_1\theta,\hat{\theta}\right)_{\varpi}=2\tau\left(\psi_T,\hat{\theta}\right)_{\varpi}. \tag{26}$$

Оценим скалярные произведения в (26), используя лемму 1

$$\left(L\left(\vec{u}^h,T^h\right)-L\left(\vec{\widetilde{u}}^h,\widetilde{T}^h\right),\theta\right)_{\varpi}\ge-0.5\zeta_1\cdot\max_{x\in\omega}|\theta|\cdot\sum_{m=1}^{2}\left\{\left(\theta_{x_m}^2,1\right)_{\varpi}+\left(\theta_{\bar{x}_m}^2,1\right)_{\varpi}\right\}=-\zeta_1\|\theta\|_1^3,$$

$$2\tau\left(L\left(\vec{u}^h,T^h\right)-L\left(\vec{\widetilde{u}}^h,\widetilde{T}^h\right),\theta_t\right)_{\varpi}\ge-\tau\zeta_1\cdot\max_{x\in\omega}|\theta_t|\cdot\sum_{m=1}^{2}\left\{\left(\theta_{x_m}^2,1\right)_{\varpi}+\left(\theta_{\bar{x}_m}^2,1\right)_{\varpi}\right\}\ge$$

$$\ge-0.5\zeta_1\left(\tau^2\|\theta_t\|_1^2+\|\theta\|_1^4\right),$$

$$2\tau\left(\psi_T,\hat{\theta}\right)_{\varpi}\le\varepsilon_3\tau\|\theta\|_R^2+\varepsilon_3\tau^3\|\theta_t\|_R^2+\frac{2\tau}{\varepsilon_3}\|\psi_T\|_{R^{-1}}^2,$$

$$2\tau\left(\Lambda_1\theta,\hat{\theta}\right)_{\varpi} \ge 2\tau c_0\|\theta\|_1^2 - c_1\tau\left(\varepsilon_4\|\theta\|_1^2 + \frac{\tau^2}{\varepsilon_4}\|\theta_t\|_R^2 + \frac{\tau}{\varepsilon_4\delta\sigma}\|\theta_t\|_B^2\right).$$

Используя полученные неравенства, из (26) получим неравенство

$$\|\hat{\theta}\|_B^2 - \|\theta\|_B^2 + \tau^2\left(1 - \frac{\zeta_1}{2\sigma\delta} - \frac{c_1}{\varepsilon_4\delta\sigma}\right)\|\theta_t\|_B^2 - \tau^3\left(0.5\zeta_1 + \varepsilon_3 + \frac{c_1}{\varepsilon_4}\right)\|\theta_t\|_R^2 +$$

$$+2\tau\left(c_0 - \zeta_1\|\theta\|_1 - \frac{1}{4}\zeta_1\|\theta\|_1^2 - \frac{1}{2}c_1\tau\varepsilon_4\right)\|\theta\|_1^2 \le \frac{\varepsilon_3}{\sigma\delta}\|\theta\|_B^2 + \frac{2\tau}{\varepsilon_3}\|\psi_T\|_{R^{-1}}^2. \qquad (27)$$

Выбирая $\varepsilon_3 = \frac{c_1}{\varepsilon_4}$ и $\sigma \ge \sigma_2$, где $\sigma_2 = \zeta_1 + \frac{3c_1}{\varepsilon_4}$ и предполагая, что выполняется условие (19) теоремы, из (27) получим:

$$\|\hat{\theta}\|_B^2 + c_5\tau\|\theta\|_1^2 \le \left(1 + \frac{\varepsilon_3}{\sigma\delta}\right)\|\theta\|_B^2 + \frac{2\tau}{\varepsilon_3}\|\psi_T\|_{R^{-1}}^2. \qquad (28)$$

Умножим теперь уравнение (15) на $\sigma_{\alpha,t} - \Lambda_{3\alpha}\pi$:

$$\|\sigma_{\alpha,t}\|^2 - 2\left(\Lambda_{3\alpha}\pi,\sigma_{\alpha,t}\right)_{\varpi} + \|\Lambda_{3\alpha}\pi\|^2 = \left(\psi_\alpha,\sigma_{\alpha,t}\right)_{\varpi} + \left(\Lambda_{3\alpha}\pi,\psi_\alpha\right)_{\varpi}. \qquad (29)$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского, после очевидных преобразований из (29) получим:

$$\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_4} - \frac{1}{2\varepsilon_5}\right)\|\sigma_{\alpha,t}\|^2 + \left(1 - \varepsilon_4 - \frac{\varepsilon_6}{2}\right)\|\Lambda_{3\alpha}\pi\|^2 \le \left(\frac{\varepsilon_5}{2} + \frac{1}{2\varepsilon_6}\right)\|\psi_\alpha\|^2,$$

откуда следует неравенство

$$\|\hat{\sigma}_\alpha\| \le \|\sigma_\alpha\| + c_6\tau\|\psi_\alpha\|. \qquad (30)$$

Объединяя неравенства (25), (28), (30), приходим к утверждению теоремы. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда $\beta_T \ne 0$ и $c_T = c_T(T)$, а $k_p = k_p(x,t)$. Введем замену

$$\varphi(T) = \int_0^T c_T(\xi)d\xi.$$

Предположим, что выполняются условия

$$c_0 \le \left(\lambda, k_p, \beta_T, \nu_\alpha\right) \le c_1, \qquad (31)$$

$$c_0 < |\varphi''(\xi)| < c_1. \qquad (32)$$

Тогда при указанных выше предположениях уравнения (1)-(4) приводятся к виду

$$\frac{\partial\varphi(T)}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla T - k_h\nabla^2 T = f_T, \qquad (33)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \nabla\cdot\left(k_p(x,t)\nabla p\right) = \beta_T\frac{\partial T}{\partial t} + f_p, \qquad (34)$$

$$\frac{\partial s_w}{\partial t} - \nabla\cdot\left(\nu_w(x,t)\nabla p\right) = f_w, \qquad (35)$$

$$\frac{\partial s_o}{\partial t} - \nabla\cdot\left(\nu_o(x,t)\nabla p\right) = f_o, \qquad (36)$$

$$\vec{u} = -\lambda\nabla p \qquad (37)$$

с начальными и граничными условиями

$$T(x,0) = T_0,\ p(x,0) = p_0,\ s_\alpha(x,0) = s_{\alpha 0}, \qquad (38)$$

$$-k_h\frac{\partial T}{\partial\vec{n}}|_\Gamma = 0,\ -k_p\frac{\partial p}{\partial\vec{n}}|_\Gamma = 0. \qquad (39)$$

Поставим в $\overline{\omega}_{h\tau}$ в соответствие дифференциальной задаче (33)-(39) разностную схему:

$$\left(\varphi(T)\right)_t + L\left(\vec{u},\hat{T}\right) + \Lambda_1\hat{T} = f_T, \qquad (40)$$

$$p_t + \Lambda_2 \hat{p} = \beta_T T_t + f_p, \tag{41}$$

$$s_{\alpha,t} + \Lambda_{3\alpha} \hat{p} = f_\alpha,\ \alpha = w,o \tag{42}$$

с начальными условиями

$$T_i^0 = T_0,\ p_i^0 = p_0,\ s_{\alpha,i}^0 = s_{\alpha 0} \tag{43}$$

где

$$L(\vec{u},\theta) = 0.5\sum_{m=1}^{2}\left(\beta_m^+(x) u_m^{+1_m} \theta_{x_m} + \beta_m^-(x) u_m \theta_{\bar{x}_m}\right),$$

$$\Lambda_1 = \Lambda_1^{(1)} + \Lambda_1^{(2)},\ \Lambda_2 = \Lambda_2^{(1)} + \Lambda_2^{(2)},\ \Lambda_{3\alpha} = \Lambda_{3\alpha}^{(1)} + \Lambda_{3\alpha}^{(2)},$$

$$\Lambda_1^{(m)} w = \left\{-\frac{2}{h}\breve{k}_h^{(+1_m)} w_{x_m}, x_m = 0; -\left(\breve{k}_h w_{\bar{x}_m}\right)_{x_m}, x_m \in \omega_m; \frac{2}{h}\breve{k}_h w_{\bar{x}_m}, x_m = l\right\},$$

$$\Lambda_2^{(m)} w = \left\{-\frac{2}{h}\breve{k}_p^{(+1_m)} w_{x_m}, x_m = 0; -\left(\breve{k}_p w_{\bar{x}_m}\right)_{x_m}, x_m \in \omega_m; \frac{2}{h}\breve{k}_p w_{\bar{x}_m}, x_m = l\right\},$$

$$\Lambda_{3\alpha}^{(m)} w = \left\{-\frac{2}{h}\breve{\nu}_\alpha^{(+1_m)} w_{x_m}, x_m = 0; -\left(\breve{\nu}_\alpha w_{\bar{x}_m}\right)_{x_m}, x_m \in \omega_m; \frac{2}{h}\breve{\nu}_\alpha w_{\bar{x}_m}, x_m = l\right\}.$$

Получим теперь априорную оценку для решения разностной задачи (40)-(43). Пусть $(T, p, s_w, s_o)$ и $(\tilde{T}, \tilde{p}, \tilde{s}_w, \tilde{s}_o)$ - решения данной разностной задачи, соответствущие начальным данным $(T_0, p_0, s_{w0}, s_{o0})$, $(\tilde{T}_0, \tilde{p}_0, \tilde{s}_{w0}, \tilde{s}_{o0})$ и правым частям $(f_T, f_p, f_w, f_o)$, $(\tilde{f}_T, \tilde{f}_p, \tilde{f}_w, \tilde{f}_o)$ соответственно. Тогда разности

$$\theta = T - \tilde{T},\ \pi = p - \tilde{p},\ \sigma_\alpha = s_\alpha - \tilde{s}_\alpha$$

удовлетворяют задаче

$$(\varphi(T))_t - \left(\varphi(\tilde{T})\right)_t + L(\vec{u},\hat{T}) - L\left(\tilde{\vec{u}},\hat{\tilde{T}}\right) + \Lambda_1 \hat{T} = \psi_T, \tag{44}$$

$$\pi_t + \Lambda_2 \hat{\pi} = \beta\theta_t + \psi_p, \tag{45}$$

$$\sigma_{\alpha,t} + \Lambda_{3\alpha}\hat{\pi} = \psi_\alpha,\ \alpha = w,o \tag{46}$$

$$\theta_{ij}^0 = \theta_0,\ \pi_{ij}^0 = \pi_0,\ \sigma_{\alpha,ij}^0 = \sigma_{\alpha 0}. \tag{47}$$

Учитывая, что $\varphi(\tilde{T}) = \varphi(T-\theta) = \varphi(T) - \theta\varphi'(T + \chi_1\theta)$, где $0 < \chi_1 < 1$, уравнение (44) можно привести к виду

$$(\theta\varphi'(T + \chi_1\theta))_t + L(\vec{u},\hat{T}) - L\left(\tilde{\vec{u}},\hat{\tilde{T}}\right) + \Lambda_1 \hat{T} = \psi_T. \tag{48}$$

Теорема 4. При выполнении условий (31), (32), и

$$2 - \frac{1}{c_0}\left\|\hat{\theta}\right\|_C \sum_{m=1}^{2}\left\|\zeta_m\right\|_C^2 > 0, \tag{49}$$

для решения разностной задачи (40)-(43) выполняется неравенство:

$$\left\|T^{n+1}\right\|_1^2 + \left\|p^{n+1}\right\|_1^2 + \left\|s_w^{n+1}\right\|^2 + \left\|s_o^{n+1}\right\|^2 \le M\left(\left\|T_0\right\|^2 + \left\|p_0\right\|^2 + \left\|s_{w0}\right\|^2 + \left\|s_{o0}\right\|^2\right) +$$
$$+ M\left(\gamma_0 + \left\|f_w\right\|_{-1}^2 + \left\|f_o\right\|_{-1}^2 + \left\|f_T\right\|_{-1}^2 + \left\|f_p\right\|_{-1}^2\right) \tag{50}$$

Доказательство. Умножим уравнение (45) на $2\tau\hat{\pi}$ :

$$\left\|\hat{\pi}\right\|_0^2 - \left\|\pi\right\|_0^2 + \tau^2\left\|\pi_t\right\|_0^2 + 2\tau(\Lambda_2\hat{\pi},\hat{\pi})_{\bar{\omega}} = 2\tau(\beta\theta_t,\hat{\pi})_{\bar{\omega}} + (\psi_p, 2\tau\hat{\pi})_{\bar{\omega}}. \tag{51}$$

Оценим скалярные произведения аналогично доказательству теоремы 1:

$$(\Lambda_2\hat{\pi},\hat{\pi})_{\bar{\omega}} \ge c_0\left\|\nabla\hat{\pi}\right\|^2,$$

$$2\tau(\beta\theta_t,\pi)_{\bar{\omega}} \le 2\tau^2 c_1\varepsilon_1\left\|\theta_t\right\|^2 + \frac{2c_1}{\varepsilon_1}\left\|\pi\right\|^2,$$

$$2\tau^2(\beta\theta_t,\pi_t)_{\bar\omega}\le 2\tau^2c_1\varepsilon_1\|\theta_t\|^2+\frac{2\tau^2c_1}{\varepsilon_1}\|\pi_t\|^2,$$

$$2\tau\left|(\psi_p,\pi)_{\bar\omega}\right|\le 2\tau\|\psi_p\|_{-1}\|\pi\|\le\tau\varepsilon_2\|\psi_p\|_{-1}^2+\frac{\tau}{\varepsilon_2}\|\pi\|^2,$$

$$2\tau^2\left|(\psi_p,\pi_t)_{\bar\omega}\right|\le 2\tau^2\|\psi_p\|_{-1}\|\pi_t\|\le\tau^2\varepsilon_2\|\psi_p\|_{-1}^2+\frac{\tau^2}{\varepsilon_2}\|\pi_t\|^2.$$

Применяя эти неравенства в (51), получим:

$$\|\hat\pi\|_0^2+\tau^2\left(1-\frac{2c_1}{\varepsilon_1}-\frac{1}{\varepsilon_2}\right)\|\pi_t\|_0^2+2\tau c_0\|\nabla\hat\pi\|_0^2\le\left(1+\frac{2c_1}{\varepsilon_1}+\frac{\tau}{\varepsilon_2}\right)\|\pi\|_0^2+$$
$$+4\tau^2c_1\varepsilon_1\|\theta_t\|^2+\tau(1+\tau)\varepsilon_2\|\psi_p\|_{-1}^2. \qquad (52)$$

Умножим теперь уравнение (48) на $2\tau\hat\theta$:

$$c_0\left(\|\hat\theta\|^2-\|\theta\|^2+\tau^2\|\theta_t\|^2\right)+2\tau\left(L(\vec u,\hat T)-L\left(\hat{\vec{u}},\hat{\hat T}\right),\hat\theta\right)_{\bar\omega}+2\tau\left(\Lambda_1\hat\theta,\hat\theta\right)_{\bar\omega}=2\tau\left(\psi_T,\hat\theta\right)_{\bar\omega}. \quad (53)$$

Используя неравенство Коши-Буняковского и учитывая условие (31), оценим слагаемые в (53):

$$2\tau\left(L(\vec u,\hat T)-L\left(\hat{\vec{u}},\hat{\hat T}\right),\hat\theta\right)_{\bar\omega}\ge-\tau\sum_{m=1}^{2}\|\zeta_m\|_C^2\left\{\left(\theta_{x_m}^2,\hat\theta\right)_{\bar\omega}+\left(\theta_{\bar x_m}^2,\hat\theta\right)_{\bar\omega}\right\}\ge$$
$$\ge-\tau\|\hat\theta\|_C\|\nabla\hat\theta\|^2\sum_{m=1}^{2}\|\zeta_m\|_C^2,$$

$$\left|\left(f_T,2\tau\hat\theta\right)_{\bar\omega}\right|\le 2\tau\|f_T\|_{-1}\|\hat\theta\|\ \le\varepsilon_3\tau\|\psi_T\|_{-1}^2+\frac{\tau}{\varepsilon_3}\|\theta\|^2+\frac{\tau^2}{\varepsilon_3}\|\theta_t\|^2.$$

Применяя эти неравенства в (53), получим:

$$\|\hat\theta\|^2+\tau^2\left(1-\frac{1}{c_0\varepsilon_3}\right)\|\theta_t\|^2+\tau\left(2-\frac{1}{c_0}\|\hat\theta\|_C\sum_{m=1}^{2}\|\zeta_m\|_C^2\right)\|\nabla\hat\theta\|^2\le$$
$$\le\left(1+\frac{\tau}{c_0\varepsilon_3}\right)\|\theta\|^2+\frac{\varepsilon_3\tau}{c_0}\|\psi_T\|_{-1}^2. \qquad (54)$$

Оценка для насыщенностей получается аналогично теореме 1. Объединяя полученные оценки, приходим к неравенству

$$\|\hat\theta\|^2+\tau^2\left(1-\frac{1}{c_0\varepsilon_3}-4c_1\varepsilon_1\right)\|\theta_t\|^2+\tau\left(2-\frac{1}{c_0}\|\hat\theta\|_C\sum_{m=1}^{2}\|\zeta_m\|_C^2\right)\|\nabla\hat\theta\|^2+$$
$$+\|\hat\pi\|^2+\tau^2\left(1-\frac{2c_1}{\varepsilon_1}-\frac{1}{\varepsilon_2}\right)\|\pi_t\|^2+2\tau c_0\|\nabla\hat\pi\|^2+\|\hat\sigma_\alpha\|\le\left(1+\frac{\tau}{c_0\varepsilon_3}\right)\|\theta\|^2+$$
$$+\left(1+\frac{2c_1}{\varepsilon_1}+\frac{\tau}{\varepsilon_2}\right)\|\pi\|^2+\|\sigma_\alpha\|\ +\frac{\varepsilon_3\tau}{c_0}\|\psi_T\|_{-1}^2+\tau(1+\tau)\varepsilon_2\|\psi_p\|_{-1}^2+M_5\|\psi_\alpha\|\ .$$

При выполнении условия теоремы, выбирая $\varepsilon_k$, $k=\overline{1,3}$ такие, что

$$1-\frac{1}{c_0\varepsilon_3}-4c_1\varepsilon_1>0,\ 1-\frac{2c_1}{\varepsilon_1}-\frac{1}{\varepsilon_2}>0,$$

получим требуемое неравенство. Теорема доказана.

**Выводы**: Таким образом, в работе проведено исследование устойчивости конечно-разностных схем для двух модельных задач трехфазной неизотермической фильтрации по начальным данным и правым частям уравнений. Показано, что при выполнении условий (7), (18), (19) первая, а при выполнении условий (31), (32), (49) вторая разностная схема является устойчивой. Полученные результаты могут быть использованы для исследования устойчивости разностных схем для задачи, учитывающей капиллярные и гравитационные силы.


**Список литературы**

1. Абдраманова М. Б. Численное моделирование процесса вытеснения нефти паром / М. Б. Абдраманова // Вестник КазГУ. Серия математика, механика, информатика. – Алматы, 1998. - № 10. – С. 3-10.
2. Абиров А. К. Моделирование задач фазовых переходов при неизотермической фильтрации и качественные свойства решения / А.К. Абиров, С. Т. Мухамбетжанов // Вестник КазГУ. Серия математика, механика, информатика. – 1996. - № 5. – С. 3-11.
3. Антонцев С. Н. Краевые задачи для некоторых вырождающихся уравнений механики сплошной среды / С. Н. Антонцев, В. Н. Монахов– Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 1977. – 48 с.
4. Ахмед-заки Д. Ж. Об одной задаче двухфазной фильтрации смеси в пористой среде с учетом теплового воздействия / Д. Ж. Ахмед-заки // Научные труды НИПИ Нефтегаз. – 2010. - № 3. – С. 29-33.
5. Боксерман А. А. Численное исследование процесса вытеснения нефти паром / А. А. Боксерман, С. Якуба И. // Известия АН СССР. – 1987. - № 4. – С. 78-84.
6. Бочаров О. Б. О некоторых особенностях неизотермической фильтрации несмешивающихся жидкостей / О. Б. Бочаров , И. Г. Телегин // Теплофизика и аэромеханика. – Новосибирск, 2002. - № 3. – С. 459-466.
7. Лапин А. В. Исследование разностных схем для одного класса квазилинейных параболических уравнений /А. В Лапин, А. Д. Ляшко // Известия высших учебных заведений. – 1973. - №1 (128). – С. 71-77.
8. Chavent G., Jaffre J. Mathematical models and finite elements for reservoir simulation. – Elsevier, 1986. – 375 p.
9. Mozzaffari S. Numerical modeling of steam injection in heavy oil reservoirs // Fuel. – Amsterdam, 2013. - № 112. – P. 185-192.
10. Temirbekov N. M., Baigereyev D. R. Modeling of three-phase non-isothermal flow in porous media using the approach of reduced pressure // Mathematical modeling of technological processes: 8th International Conference, CITech-2015, Almaty, Kazakhstan, September 24-28, 2015, Proceedings / edited by N. Danaev, Yu. Shokin, D. Akhmed-Zaki. – Almaty, 2015. – P. 166-176.


УДК 553/521 (629.1.05) (575.2) (04)

## ФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В РАЗРЯДНОМ ПРОМЕЖУТКЕ И ИХ РОЛЬ В ФОРМИРОВАНИИ ИМПУЛЬСНОГО КОРОННОГО РАЗРЯДА


***Токарев Андреан Валентинович,*** *к.ф.-м.н., доцент, КРСУ им. Б.Н. Ельцина, Кыргызстан, 720000, г. Бишкек, Киевская 44,* e-mail: tokarev_andrean@mail.ru
***Угодников Михаил Евгеньевич,*** *магистрант, КРСУ им. Б.Н. Ельцина, Кыргызстан, 720000, г. Бишкек, Киевская 44,* e-mail: cmeh@mail.ru


Объектом исследования является импульсно-периодический коронный разряд положительной реализуемый в условиях рентгеновской ионизации разрядного промежутка. В работе проводились экспериментальные исследования влияния состава плазмообразующего газа на электрические характеристики импульсного коронного разряда в коаксиальной системе электродов.

Установлено, что в смесях содержащих 6% $CO_2$, 4% Ar и 90% $N_2$ наблюдается наибольшее значение силы тока, достигающего 510 Вт/м коронирующего провода. Такой