

14. Ono, Ryo; Oda, Tetsuji. Dynamics of ozone and OH radicals generated by pulsed corona discharge in humid-air flow reactor measured by laser spectroscopy. // Journal of Applied Physics, 2003, Vol.93, Issue 10, p.5876-5883.

УДК 532.59+519.63

СХЕМА РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ НА СФЕРЕ

Шокин Юрий Иванович, академик, Институт вычислительных технологий СО РАН, Россия, 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева 6, e-mail: dir@ict.nsc.ru

Гусев Олег Игоревич, Институт вычислительных технологий СО РАН, Россия, 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева 6, e-mail: gusev_oleg_igor@mail.ru

Федотова Зинаида Ивановна, к.ф.м.н., Институт вычислительных технологий СО РАН, Россия, 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева 6, e-mail: zf@ict.nsc.ru

Хакимзянов Гаяз Салимович, д.ф.м.н., профессор, Институт вычислительных технологий СО РАН, Россия, 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева 6, e-mail: khak@ict.nsc.ru

В статье описывается новый численный метод для моделирования длинных поверхностных волн с учётом дисперсии на вращающейся притягивающей сфере. Алгоритм представляется в виде конечно-разностной схемы предиктор-корректор, на каждом шаге которой поочередно решаются неоднородная гиперболическая система классических уравнений мелкой воды с модифицированной правой частью и равномерно эллиптическое уравнение. Исследованы дисперсионные свойства и необходимые условия устойчивости метода. Показано, что в нелинейно-дисперсионной модели эти условия менее ограничительны, чем в бездисперсионной модели.

Ключевые слова: поверхностные волны, нелинейно-дисперсионные уравнения на сфере, конечно-разностный метод, численный алгоритм, устойчивость, дисперсия.

ALGORITHM FOR NUMERICAL SIMULATION OF TSINAMI WITHIN THE FRAMEWORK OF THE NONLINEAR DISPERSIVE MODEL

Shokin Yuri I., Academician, Professor, Institute of Computational Technologies SB RAS, Russia, 630090, Novosibirsk, Acad. Lavrentjev avenue 6 e-mail: dir@ict.nsc.ru

Gusev Oleg I., Institute of Computational Technologies SB RAS, Russia, 630090, Novosibirsk, Acad. Lavrentjev avenue 6 e-mail: gusev_oleg_igor@mail.ru

Fedotova Zinaida I., PhD, Institute of Computational Technologies SB RAS, Russia, 630090, Novosibirsk, Acad. Lavrentjev avenue 6 e-mail: zf@ict.nsc.ru

Khakimzyanov Gayaz S., PhD, Professor, Institute of Computational Technologies SB RAS, Russia, 630090, Novosibirsk, Acad. Lavrentjev avenue 6 e-mail: khak@ict.nsc.ru

The paper describes a new numerical method for modeling long waves with dispersion on a rotating attracting sphere. The algorithm is presented in the form of a finite-difference scheme of predictor-corrector, so that at each step the inhomogeneous hyperbolic system similar to classical shallow water equations with a right-hand side and the uniformly elliptic equation are solved alternately. Necessary conditions for the stability of the method are obtained and the dispersion properties are investigated. We show that these conditions are less restrictive than ones are inherent to the classic shallow water model.

Keywords: surface waves, nonlinear dispersive equations on a sphere, finite difference method, numerical algorithm, stability, dispersion

Введение. Приближенные модели гидродинамики, описывающие длинноволновые процессы в жидкости, активно развиваются последние несколько десятилетий. Эти модели обрели популярность как у прикладных исследователей, так и у теоретиков. Интерес инженеров обусловлен возрастающими требованиями практических задач защиты и развития побережий, в то время как теоретики нашли много пробелов в обосновании и моделей, и численных методов решения дифференциальных уравнений, определяющих их. Среди опубликованных к настоящему времени работ, посвящённых нелинейно-дисперсионным (NLD-) моделям гидродинамики, отметим исследования [3,9,10,14] моделей, учитывающих эффекты сферичности и вращения Земли, а также нестационарности донной поверхности. Использование таких моделей необходимо при численном решении современных задач о распространении поверхностных волн в океане и прибрежной зоне.

В [3,6] сформирован единый подход к построению длинноволновых аппроксимаций, обеспечивший иерархическую цепочку уравнений мелкой воды первого и второго приближений на плоской и сферической поверхностях, обладающую преемственностью физически содержательных свойств. Развитие вычислительных методов решения NLD-моделей, в отличие от классической модели мелкой воды, существенно отстаёт от разработки и усовершенствования самих моделей.

С одной стороны, в настоящее время для практических задач необходимо численное моделирование с учётом таких эффектов, как быстрое изменение донной поверхности, нелинейность, завихренность и др. С другой, существует множество пробелов в изучении фундаментальных свойств численных методов даже для простейших NLD-уравнений, что показал проведенный нами систематический анализ [2].

Мы выяснили, что применение иерархического подхода позволяет выявить не только существующую последовательность дифференциальных моделей, но и соответствующих численных алгоритмов, а также описать дополнительные свойства разностных схем, приобретенные при переходе от классических до нелинейно-дисперсионных уравнений мелкой воды. В частности, для уравнений типа Буссинеска получены уточненные условия устойчивости некоторых популярных разностных схем первого и второго порядка аппроксимации. Эти условия характеризуются наличием нового параметра, определяющего малость шага сетки по сравнению с характерной глубиной, и в пределе при бесконечно малом шаге получаются условия, которые сформулированы в виде ограничения только на временной шаг. Также показано, что в области устойчивости некоторых схем есть числа Куранта, для которых влияние “дисперсии схемы” будет минимально.

Численный алгоритм решения сложной системы NLD-уравнений [3], содержащей смешанные производные компонент вектора скорости, строится на поочередном решении двух более простых задач. В первой подзадаче находится дисперсионная составляющая давления из равномерно эллиптического уравнения. Вторая подзадача заключается в решении системы гиперболического типа, состоящей из уравнения неразрывности и уравнения движения, и отличающейся от бездисперсионной модели мелкой воды только правой частью. Разбиение исходной системы на две более простые подзадачи позволяет использовать разработанный ранее алгоритм для классической модели мелкой воды с дополнительным решением уравнения для дисперсионной составляющей давления на каждом шаге схемы предиктор-корректор [13].

Нелинейно-дисперсионные модели гидродинамики. Полная нелинейно-дисперсионная (FNLD-) модель на вращающейся сфере, в которой в качестве скорости берется осредненная по толщине слоя жидкости горизонтальная составляющая скорости трехмерного (3D-) течения, была получена в 2010 году [9]. В работе [10] показано, что FNLD-модель из [9] можно вывести без предположения о потенциальности исходного

трехмерного течения и она, в отличие от [14], записывается в виде законов баланса массы и импульса, а также имеет согласованное с 3D-моделью Эйлера уравнение баланса полной энергии, что подтверждает не только физическую состоятельность модели, но и позволяет осуществлять дополнительный контроль при проведении расчетов.

Уравнения FNLD-модели на вращающейся притягивающей сфере имеют следующий вид [9]:

$$(HR\sin\theta)_t + (Hu)_\lambda + (Hv\sin\theta)_\theta = 0, \quad (1)$$

$$(HuR\sin\theta)_t + \left(Hu^2 + g\frac{H^2}{2}\right)_\lambda + (Huv\sin\theta)_\theta = gHh_\lambda - Huv\cos\theta - f_vHR\sin\theta + \varphi_\lambda - \psi h_\lambda, \quad (2)$$

$$(HvR\sin\theta)_t + (Huv)_\lambda + \left(\left(Hv^2 + g\frac{H^2}{2}\right)\sin\theta\right)_\theta = gHh_\theta\sin\theta + g\frac{H^2}{2}\cos\theta + Hu^2\cos\theta + f_uHR\sin\theta + (\varphi_\theta - \psi h_\theta)\sin\theta + \Omega^2HR^2\sin^2\theta\cos\theta, \quad (3)$$

Здесь R – радиус сферы, вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси Oz неподвижной декартовой системы координат $Oxyz$, координатная плоскость Oxy которой совпадает с экваториальной плоскостью сферы. Для описания течения воды используется вращающаяся вместе со сферой система координат $O\lambda\theta r$, начало которой находится в центре сферы, при этом λ – долгота, отсчитываемая в направлении вращения от некоторого меридиана ($0 \leq \lambda < 2\pi$), $\theta = \pi/2 - \varphi$ – дополнение до широты ($-\pi/2 < \varphi < \pi/2$), r – радиальная координата, отсчитываемая от центра сферы. Ньютоновская сила притяжения $\mathbf{g}$, действующая на частицу жидкости единичной массы, считается направленной к центру Земли. Толщина слоя воды $H = \eta + h > 0$ предполагается малой по сравнению с радиусом сферы, поэтому величина $g = |\mathbf{g}|$ и плотность воды ρ принимаются постоянными во всем жидком слое, ограниченном снизу непроницаемым подвижным дном, а сверху – свободной поверхностью, соответственно:

$$r = R - h(\lambda, \theta, t), \quad r = R + \eta(\lambda, \theta, t). \quad (4)$$

Через u и v обозначены линейные компоненты вектора скорости ($u = Rc^1\sin\theta$, $v = Rc^2$, $c^1 = \dot{\lambda}$, $c^2 = \dot{\theta}$), $f = 2\Omega\cos\theta$ – параметр Кориолиса, выраженный через дополнение к широте θ , при этом предполагается, что

$$\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0, \quad (5)$$

где $\theta_0 = \cos nst > 0$ – малый угол (полюсы исключаются из рассмотрения).

Величины φ и ψ , входящие в правые части уравнений движения (2), (3), представляют собой дисперсионные составляющие проинтегрированного по толщине слоя давления p в FNLD-модели и соответственно давления на дне p_0 :

$$p = \frac{gH^2}{2} - \varphi, \quad p_0 = gH - \psi. \quad (6)$$

Вычисляются дисперсионные добавки по следующим формулам [7]:

$$\varphi = \frac{H^3}{3}Q_1 + \frac{H^2}{2}Q_2, \quad \psi = \frac{H^2}{2}Q_1 + HQ_2, \quad (7)$$

где

$$Q_1 = D(\nabla \cdot \mathbf{c}) - (\nabla \cdot \mathbf{c})^2, \quad Q_2 = D^2h, \quad \mathbf{c} = (c^1, c^2),$$

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla, \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right),$$

$$\mathbf{c} \cdot \nabla = c^1 \frac{\partial}{\partial \lambda} + c^2 \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \nabla \cdot \mathbf{c} = c_\lambda^1 + \frac{1}{J} (Jc^2)_\theta, \quad J = -R^2 \sin \theta.$$

В более подробной записи выражения Q_1 и Q_2 принимают следующий вид:

$$Q_1 = (\nabla \cdot \mathbf{c})_t + \frac{1}{R \sin \theta} (u(\nabla \cdot \mathbf{c})_\lambda + v(\nabla \cdot \mathbf{c})_\theta \sin \theta) - (\nabla \cdot \mathbf{c})^2,$$

$$Q_2 = (Dh)_t + \frac{1}{R \sin \theta} (u(Dh)_\lambda + v(Dh)_\theta \sin \theta),$$

где

$$\nabla \cdot \mathbf{c} = \frac{1}{R \sin \theta} (u_\lambda + (v \sin \theta)_\theta), \quad Dh = h_t + \frac{1}{R \sin \theta} (uh_\lambda + vh_\theta \sin \theta).$$

FNLD-модель (1)–(3) называется полной [7] по той причине, что она выведена без предположения о малости амплитуды волн и в уравнениях сохранены все нелинейные члены, связанные с дисперсией. Ее можно использовать для расчета поверхностных волн, распространяющихся над неровным дном как по глубокой воде, так и в прибрежной зоне, при этом учет дисперсии волн дает более точные результаты, чем бездисперсионная модель мелкой воды (NLSW-модель). Полученная нами FNLD-модель позволяет также моделировать волны, генерируемые продолжительными по времени подвижками фрагментов дна, что расширяет круг задач, которые могут решаться в рамках известных [12] слабо нелинейных дисперсионных (WNLD-) моделей мелкой воды на сфере.

Более того, структура уравнений FNLD-модели и такие положительные свойства, как консервативность и наличие уравнения баланса полной энергии, согласованного с 3D-моделью, сохраняются при поэтапном упрощении дисперсионной составляющей и при переходе к плоской геометрии. Так, уравнения полученной нами слабо нелинейной дисперсионной модели [10] и классической (бездисперсионной) модели мелкой воды на сфере имеют тот же вид, что и уравнения FNLD-модели на сфере с тем лишь отличием, что меняется выражение для кинетической энергии и для WNLD-модели члены с давлением (6) вычисляются с использованием более сложных формул, чем в NLSW-модели. Таким образом, обеспечена единая форма записи уравнений всей иерархической цепочки моделей мелкой воды в сферической и плоской геометриях [3], что позволило сконструировать для них единый численный алгоритм.

Конечно-разностные методы для уравнений мелкой воды с дисперсией. Так как исходные NLD-уравнения и их конечномерные аппроксимации в полной постановке не поддаются аналитическим исследованиям, то можно рассмотреть упрощенные постановки (случаи плоской геометрии, ровного дна $h \equiv h_0 = \text{const}$, линейные аналоги уравнений и разностных схем). Это позволяет исследовать свойства в частных случаях (напр., дисперсионные свойства схем) и приводит к набору необходимых ограничений для применения полного алгоритма (напр., необходимое условие устойчивости, сохранение алгоритмом некоторых свойств исходной дифференциальной задачи и т.п.). Здесь мы рассмотрим два конечно-разностных алгоритма для решения системы линейных уравнений одномерных течений

$$\eta_t + h_0 u_x = 0, \quad u_t + g \eta_x = \nu u_{xx}, \quad \nu = \frac{h_0^2}{3}, \quad (8)$$

в которую переходят после линеаризации NLD-модели из работ [5,11] и некоторые другие NLD-модели. Искомые величинами в системе уравнений (8) являются полная глубина $H = h_0 + \eta(x, t)$ и скорость приближенной модели $u(x, t)$. Конечно-разностные аппроксимации этих линейных уравнений используются для выявления необходимых условий устойчивости нелинейных разностных схем, а также для исследования их диссипативных и дисперсионных свойств.

NLD-уравнения, а также линейные уравнения (8), содержат смешанные производные третьего порядка по времени и пространству, что требует специальных подходов к их численному решению. Основным прием, обеспечивший преемственность имеющихся вычислительных методов и разработку новых эффективных численных алгоритмов для NLD-моделей, состоит в том, что путем введения новых переменных NLD-уравнения удается “расщепить” таким образом, что одна составляющая представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или неоднородную систему гиперболических уравнений, а другая составляющая не содержит производных по времени и в простейшем случае выглядит как эллиптическое уравнение. Это открывает широкие возможности для применения как методов решения ОДУ и конечно-разностных/конечно-объемных схем, так и метода конечных элементов, а также разнообразных комбинаций этих и других подходящих методов.

Построение численных алгоритмов на основе расщепления системы NLD-уравнений на систему ОДУ и некоторое эллиптическое уравнение было впервые предложено в работе [4] применительно к скалярному модельному уравнению, а затем распространено на системы слабо нелинейных и полностью нелинейных дисперсионных уравнений [8]. Особенность численного решения систем уравнений, определяющих эти модели, состоит в том, что группа членов, описывающих дисперсию, зависит от производной скорости u по времени. Наиболее простой способ решить эту проблему состоит в том, чтобы в уравнении движения все члены, содержащие производные по времени от скорости, представить в виде выражения Q_t с некоторым Q , что позволяет свести реализацию соответствующего численного алгоритма к поэтапному решению системы ОДУ и эллиптического уравнения.

Применительно к системе уравнений (8) этот прием приводит к следующей системе уравнений:

$$\eta_t + h_0 u_x = 0, \quad Q_t = g \eta_x, \quad u_{xx} - u = Q.$$

Один из наиболее распространенных способов построения численного алгоритма состоит в следующем. Сначала из уравнения неразрывности по двухслойной явной схеме (или неявной относительно η) вычисляется η^{n+1} . Затем из обыкновенного дифференциального уравнения, используя вычисленные η^{n+1} , находится Q^{n+1} . После этого решается эллиптическое (в одномерном случае — обыкновенное дифференциальное) уравнение относительно u^{n+1} (в одномерном случае — методом скалярной прогонки).

Недостатком рассмотренного подхода в нелинейном случае является использование уравнений в недивергентной форме. Также следует отметить, что в двумерном случае получается система двух дополнительных уравнений эллиптического типа относительно компонент вектора скорости, что усложняет вычислительный алгоритм. Но самым существенным недостатком является то, что в вычислительных алгоритмах совсем не используются методы решения гиперболических уравнений, хорошо развитые для NLSW-модели мелкой воды первого гидродинамического приближения.

В настоящей работе для решения системы NLD-уравнений предлагается заменить ее расширенной системой уравнений, состоящей из системы уравнений гиперболического типа, аналогичной системе уравнений мелкой воды первого гидродинамического приближения и отличающейся от последней лишь правой частью, и скалярного уравнения эллиптического типа для дисперсионной составляющей давления. Этот подход к конструированию численных алгоритмов можно использовать для всех полученных нами моделей, как для полной FNLD-модели, так и слабо нелинейных WNLD-моделей. Здесь мы рассмотрим суть этого подхода на примере линейной системы (8).

Расширенная система уравнений

$$\eta_t + h_0 u_x = 0, \quad u_t + g \eta_x = \frac{\varphi_x}{h_0}, \quad \varphi_{xx} - \frac{\varphi}{V} = c_0^2 \eta_{xx}, \quad c_0 = \sqrt{gh_0} \quad (9)$$

получается из системы линейных уравнений (8), если последнюю дополнить уравнением относительно новой зависимой переменной $\varphi = w_{xt}$, которая является линейным аналогом дисперсионной составляющей давления φ из (7). Пусть Δx и τ — шаги равномерной сетки в плоскости переменных x и t , (x_j, t^n) — узлы сетки, $x_j = j\Delta x$, $t^n = n\tau$, η_j^n , u_j^n , φ_j^n — значения сеточных функций в этих узлах и для разностных производных использованы следующие сокращенные обозначения:

$$\eta_{t,j}^n = \frac{\eta_j^{n+1} - \eta_j^n}{\tau}, \quad \eta_{x,j}^n = \frac{\eta_{j+1}^n - \eta_j^n}{\Delta x}, \quad \eta_{xx,j}^n = \frac{\eta_{j+1}^n - 2\eta_j^n + \eta_{j-1}^n}{\Delta x^2}.$$

В методе предиктор–корректор уравнения гиперболической и эллиптической частей решаются поочередно на каждом из двух вычислительных этапов. На шаге предиктор вычисляются вспомогательные величины $\eta_{j+1/2}^*$, $u_{j+1/2}^*$, $\varphi_{j+1/2}^*$, определенные в центрах ячеек. Для этого вначале по явной схеме решаются разностные уравнения, соответствующие гиперболической части:

$$\frac{\eta_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(\eta_{j+1}^n + \eta_j^n)}{\tau_{j+1/2}^*} + h_0 u_{x,j}^n = 0, \quad \frac{u_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n)}{\tau_{j+1/2}^*} + g \eta_{x,j}^n = \frac{1}{h_0} \varphi_{x,j}^n, \quad (10)$$

а затем — уравнение для $\varphi_{j+1/2}^*$:

$$\frac{\varphi_{j+3/2}^* - 2\varphi_{j+1/2}^* + \varphi_{j-1/2}^*}{\Delta x^2} - \frac{\varphi_{j+1/2}^*}{\nu} = c_0^2 \frac{\eta_{j+3/2}^* - 2\eta_{j+1/2}^* + \eta_{j-1/2}^*}{\Delta x^2}, \quad (11)$$

где $\tau_{j+1/2}^* = \tau(1 + \theta_{j+1/2}^n)/2$, $\theta_{j+1/2}^n$ — схемный параметр, надлежащий выбор которого гарантирует выполнение TVD-свойства для численного решения модельных скалярных уравнений.

Эти предикторные величины используются затем на втором этапе — корректоре — для вычисления значений η_j^{n+1} , u_j^{n+1} , φ_j^{n+1} :

$$\eta_{t,j}^n + h_0 \frac{u_{j+1/2}^* - u_{j-1/2}^*}{\Delta x} = 0, \quad u_{t,j}^n + g \frac{\eta_{j+1/2}^* - \eta_{j-1/2}^*}{\Delta x} = \frac{1}{h_0} \frac{\varphi_{j+1/2}^* - \varphi_{j-1/2}^*}{\Delta x}, \quad (12)$$

$$\varphi_{xx,j}^{n+1} - \frac{\varphi_j^{n+1}}{\nu} = c_0^2 \eta_{xx,j}^{n+1}. \quad (13)$$

Нетрудно проверить, что при $\theta \equiv \text{const} \neq 0$ схема имеет первый порядок аппроксимации, при $\theta \equiv 0$ — второй. Интересным является случай квазипостоянного значения $\theta = O(\tau, \Delta x)$, при котором схемный параметр зависит от шагов сетки, уменьшаясь пропорционально уменьшению шагов, но не зависит от координат узлов, т. е. ведет себя как постоянный параметр. В случае квазипостоянного параметра θ выписанная схема имеет второй порядок аппроксимации.

Необходимое условие устойчивости выписанной схемы имеет вид:

$$c_0 \kappa \leq \frac{\sqrt{1 + \frac{4}{3} \delta^2 \theta}}{1 + \theta}, \quad (14)$$

где $0 \leq \theta \leq 1$, $\kappa = \tau / \Delta x$ и параметр $\delta = h_0 / \Delta x$ характеризует относительный размер пространственного шага Δx , т. е. степень разрешимости сетки по отношению к характерной глубине h_0 . Этот параметр, наряду с числом Куранта, встречается и в условиях устойчивости, и в условиях, характеризующих дисперсионные свойства схемы для NLD-уравнений. В этом одно из отличий от бездисперсионных уравнений, для которых в условиях устойчивости разностных схем фигурирует только один параметр — число Куранта. Увеличение δ приводит к тому, что условие устойчивости (14) становится все менее и менее жестким и при $\delta \gg 1$ превращается в ограничение на шаг по времени:

$$\tau \leq \frac{2\sqrt{\theta}}{\sqrt{3}(1+\theta)} \tau_0 \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \tau_0 \approx 0.58\tau_0, \quad (15)$$

где введен еще один новый параметр $\tau_0 = h_0 / c_0$ – характерное время, необходимое для того чтобы волна, распространяющаяся со скоростью c_0 , прошла расстояние, равное характерной глубине h_0 .

Таким образом, для достаточно мелких сеток ($\delta \gg 1$) условие устойчивости (14) можно заменить на (15), т. е. получить условие устойчивости в виде независимого от Δx ограничения на шаг по времени τ , чего не бывает для бездисперсионных уравнений. В самом деле, для бездисперсионных линейных уравнений мелкой воды, т.е. уравнений (8) при $\nu = 0$, схема предиктор-корректор становится проще за счет того, что отпадает необходимость в вычислении дисперсионной добавки φ . Условие устойчивости такой схемы имеет вид

$$c_0 K \leq \frac{1}{\sqrt{1+\theta}}. \quad (16)$$

Видно, что здесь при измельчении шагов пространственной сетки условие устойчивости не переходит в ограничение на шаг по времени, как в (15) для уравнений с дисперсией.

Но самым интересным отличием схемы для NLD-уравнений от схемы для NSWE-модели является то, что условие устойчивости (14) схемы для дисперсионных уравнений оказывается менее жестким, чем (16) для бездисперсионных. Это неожиданный факт, имеющий место и для других известных схем [2] и был экспериментально установлен в [12]. В других же исследованиях с расчетами на основе NLD-моделей шаг по времени выбирался, как правило, исходя из более жесткого ограничения – условия устойчивости схемы для NSWE-уравнений. Этот факт подтвердился и в ходе проведенных численных экспериментов: для NLD-уравнений устойчивость счета сохранялась при больших шагах по времени, чем для NSWE-уравнений.

Для исследования дисперсионных свойств схемы предиктор–корректор вычислим ее фазовую ошибку

$$\Delta\phi = \mp \frac{c_0 K}{6} (c_0^2 K^2 (3\theta + 1) - 1) \xi^3 + O(\xi^4),$$

где $\xi \in [0, \pi]$, $\xi = k\Delta x$, k – волновое число гармоники. Видим, что главная часть фазовой ошибки на длинных волнах имеет в общем случае тот же порядок по ξ , что и “физическая” дисперсия Φ модели (8)

$$\Phi = \mp \left(c_0 K \xi - \frac{c_0 K}{6} \delta^2 \xi^3 + O(\xi^4) \right),$$

что неудовлетворительно. Если же для заданного значения $\theta \geq 0$ число Куранта выбрать по формуле

$$c_0 K = \frac{1}{\sqrt{1+3\theta}}, \quad (17)$$

то фазовая ошибка как минимум на один порядок по ξ будет меньше “физической” дисперсии, при этом условие устойчивости (14) выполняется. Следовательно, для длинных волн при выполнении условия (17) численная дисперсия не будет подавлять “физическую”.

Численный алгоритм для нелинейно-дисперсионных уравнений на вращающейся сфере. Система уравнений (1)–(3) полной FNLD-модели на сфере, как и рассмотренная выше линейная система (8), не является системой типа Коши – Ковалевской в силу того, что уравнения движения (2), (3) содержат смешанные производные третьего порядка по времени и пространственным переменным от компонент вектора скорости. Непосредственная аппроксимация этих производных приводит к сложной разностной задаче,

не поддающейся исследованию. В линейном случае для системы уравнений (8) плодотворным для конструирования численного алгоритма оказалось предварительное расщепление (9) этой системы на скалярное уравнение эллиптического типа и систему уравнений гиперболического типа. Такой же подход можно реализовать для системы FNLD-уравнений (1)–(3) на вращающейся сфере. В результате расщепления получается расширенная система уравнений, состоящая из эллиптического уравнения для дисперсионной составляющей φ проинтегрированного по глубине давления p и гиперболической системы уравнений (1)–(3) с производными по времени первого порядка, которая отличается от классической модели мелкой воды на сфере только наличием в правой части уравнений движения дополнительных слагаемых, связанных с дисперсионными добавками φ и ψ .

Уравнение для φ имеет следующий вид [1]:

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\varphi_{\lambda}}{H} - \frac{h_{\lambda}}{H} \frac{\nabla h \cdot \nabla \varphi}{r} \right) \right]_{\lambda} + \left[\left(\frac{\varphi_{\theta}}{H} - \frac{h_{\theta}}{H} \frac{\nabla h \cdot \nabla \varphi}{r} \right) \sin \theta \right]_{\theta} - k_0 \varphi = F, \quad (18)$$

где $k_0 = k_{00} + (k_{01})_{\lambda} + (k_{02})_{\theta}$, $r = 4 + \nabla h \cdot \nabla h$,

$$k_{00} = \frac{12}{H^3} \frac{r-3}{r} R^2 \sin \theta, \quad k_{01} = \frac{6h_{\lambda}}{H^2 r \sin \theta}, \quad k_{02} = \frac{6h_{\theta}}{H^2 r} \sin \theta.$$

Отличительной особенностью уравнения (18) является то, что ни левая, ни правая его части не содержат производных по времени от зависимых переменных H , $\mathbf{u}$. Кроме того, при $H > 0$ и условии (5) уравнение (18) является равномерно эллиптическим, поэтому для нахождения его численного решения можно построить разностную схему с положительно определенным оператором и использовать подходящие итерационные методы решения скалярных эллиптических уравнений.

Для дисперсионной составляющей ψ отдельного уравнения не требуется, поскольку функция ψ связана с искомыми величинами H , $\mathbf{u}$ и φ выражением [1]

$$\psi = \frac{1}{r} \left(\frac{6\varphi}{H} + HQ + \nabla \varphi \cdot \nabla h \right),$$

где

$$\nabla \varphi \cdot \nabla h = \frac{1}{R^2} \left(\frac{\varphi_{\lambda} \bar{h}_{\lambda}}{\sin^2 \theta} + \varphi_{\theta} (\bar{h}_{\theta} - \eta_{00,\theta}) \right) = \nabla \varphi \cdot \nabla \bar{h} - \varphi_{\theta} \frac{\Omega^2}{g} \sin \theta \cos \theta,$$

$$Q = (-g \nabla \bar{\eta} + \mathbf{a}) \cdot \nabla h + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left(\frac{u^2}{\sin \theta} h_{\lambda\lambda} + 2uvh_{\lambda\theta} + v^2 h_{\theta\theta} \sin \theta \right) + B,$$

$$B = h_{tt} + 2 \left(\frac{u}{R \sin \theta} h_{\lambda t} + \frac{v}{R} h_{\theta t} \right),$$

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2), \quad a_1 = -(2uv \operatorname{ctg} \theta + fvR) \sin \theta, \quad a_2 = u^2 \operatorname{ctg} \theta + fuR.$$

Функции $\bar{\eta}$ и $\bar{h}$ связаны с η и h соотношениями

$$\bar{\eta} = \eta - \eta_{00}, \quad \bar{h} = h + \eta_{00}$$

и описывают дно и свободную границу не в виде отклонений (4) от поверхности сферы радиуса R , а отклонений $\bar{\eta}$ и $\bar{h}$ от невозмущенной свободной границы, как это обычно и делается при решении уравнений мелкой воды в плоской геометрии. При этом невозмущенная свободная граница в состоянии покоя отличается от сферической [10] и описывается уравнением $r = R + \eta_{00}(\theta)$, где

$$\eta_{00}(\theta) = \frac{1}{2g} \Omega^2 R^2 \sin^2 \theta + \text{const.}$$

Алгоритм численного решения расширенной системы уравнений (1)–(3), (18) является прямым обобщением рассмотренного выше алгоритма решения системы линейных разностных уравнений (10)–(13). Как и в линейном случае, используется метод предиктор–корректор, каждый из шагов которого состоит из двух этапов. На шаге предиктор вначале в центрах ячеек определяются величины H^* , $\mathbf{u}^*$ как решение явных разностных уравнений, аппроксимирующих систему уравнений (1)–(3) гиперболического типа, записанную в недивергентной форме. Затем решается разностное уравнение относительно φ^* , коэффициенты и правая часть которого вычисляются с использованием новых значений H^* , $\mathbf{u}^*$, и по формуле (19) определяется ψ^* . Найденные на шаге предиктор значения H^* , $\mathbf{u}^*$, φ^* и ψ^* используются затем на шаге корректор для определения окончательных значений H^{n+1} и $\mathbf{u}^{n+1}$ путем численного решения системы уравнений (1)–(3) с дивергентной формой левой части. В последнюю очередь вычисляются значения функций φ^{n+1} и ψ^{n+1} . Аналогичный алгоритм применяется и для решения FNLD-уравнений в плоской геометрии [13].

На модельной задаче о распространении волн на трансокеанические расстояния показано [1], что в земных условиях центробежную силу можно не принимать во внимание, а учет сферичности поверхности, по которой распространяются волны, может иметь определяющее значение. Влияние силы Кориолиса увеличивается с ростом размеров начального возмущения и при распространении волн на большие расстояния, при этом учет вращения сферы понижает максимальные положительные амплитуды волн. Дисперсия также проявляется при длительном распространении волн и может приводить к существенному уменьшению максимальной амплитуды головной волны, которая распадается на цуг волн меньшей длины. Но, в отличие от силы Кориолиса, дисперсия сильнее проявляется при малых размерах начального возмущения, при этом учет дисперсии приводит к замедлению скорости распространения волн.

Выводы: В работе представлен численный алгоритм для моделирования процесса распространения длинных поверхностных волн в рамках полной нелинейно-дисперсионной модели, учитывающей сферичность Земли и ее вращение. Алгоритм основан на решении расширенной системы уравнений, состоящей из эллиптического уравнения для дисперсионной составляющей давления и гиперболической системы уравнений первого порядка, которые отличаются от уравнений классической модели мелкой воды лишь наличием дополнительных слагаемых, связанных с дисперсионными добавками. Алгоритм реализован в виде явной двухшаговой схемы предиктор-корректор, на каждом шаге которой поочередно решаются задачи, полученные в результате расщепления.

Поскольку структура уравнений полной нелинейно-дисперсионной модели сохраняется для слабо дисперсионной модели на сфере, а также модели слабо дисперсионных течений над слабо деформируемым дном [6], то алгоритм численного решения полных FNLD-уравнений переносится без изменений и на эти приближенные модели.

Благодарности. Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-17-00219).

Список литературы

1. Гусев О. И. Численное моделирование распространения длинных поверхностных волн по вращающейся сфере в рамках полной нелинейно-дисперсионной модели / О. И. Гусев, Г. С. Хакимзянов // Вычисл. технологии. – 2015. – Т. 20, № 3. – С. 3–31.
2. Федотова З. И. История развития и анализ численных методов решения нелинейно-дисперсионных уравнений гидродинамики / З. И. Федотова, Г. С. Хакимзянов, О. И. Гусев // Вычислительные технологии. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 120–156.
3. Шокин Ю. И. Иерархия моделей гидродинамики длинных поверхностных волн / Ю. И. Шокин, З. И. Федотова, Г. С. Хакимзянов // ДАН. – 2015. – Т. 462. – № 2. – С. 168–172.

4. Eilbeck J. C. Numerical study of the regularized long-wave equations, I. Numerical methods / J. C. Eilbeck, G. R. McGuire // J. Comput. Phys. – 1975. – Vol. 19, No. 1. – P. 43–57.
5. Ertekin R. C. Waves caused by a moving disturbance in a shallow channel of finite width / R. C. Ertekin, W. C. Webster, J. V. Wehausen // J. Fluid Mech. – 1986. – Vol. 169. – P. 275–292.
6. Fedotova Z. I. Energy equation for certain approximate models of long-wave hydrodynamics / Z. I. Fedotova, G. S. Khakimzyanov, D. Dutykh // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2014. – Vol. 29, No. 5. – P. 167–178.
7. Fedotova Z. I. Full nonlinear dispersion model of shallow water equations on a rotating sphere / Z. I. Fedotova, G. S. Khakimzyanov // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 2011. – Vol. 52, No. 6. – P. 865–876.
8. Fedotova Z. I. Methods of construction and the analysis of difference schemes for nonlinear dispersive models of wave hydrodynamics / Z. I. Fedotova, V. Yu. Pashkova // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 1997. – Vol. 12, No. 2. – P. 127–149.
9. Fedotova Z. I. Nonlinear-dispersive shallow water equations on a rotating sphere / Z. I. Fedotova, G. S. Khakimzyanov // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2010. – Vol. 25, No. 1. – P. 15–26.
10. Fedotova Z. I. Nonlinear-dispersive shallow water equations on a rotating sphere and conservation laws / Z. I. Fedotova, G. S. Khakimzyanov // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 2014. – Vol. 55, No. 3. – P. 404–416.
11. Fedotova Z. I. Shallow water equations on a movable bottom / Z. I. Fedotova, G. S. Khakimzyanov // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2009. – Vol. 24, No. 1. – P. 31–42.
12. Glimsdal S. Dispersion of tsunamis: does it really matter? / S. Glimsdal, G. K. Pedersen, C. B. Harbitz, F. Lovholt // Nat. Hazards Earth Syst. Sci. – 2013. – Vol. 13. – P. 1507–1526.
13. Khakimzyanov G. S. Modelling of tsunami generated by submarine landslides in the Black Sea / G. S. Khakimzyanov, O. I. Gusev, S. A. Beisel, L. B. Chubarov, N. Yu. Shokina // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2015. – Vol. 30, No. 4. – P. 227–237.
14. Kirby J. T. Dispersive tsunami waves in the ocean: Model equations and sensitivity to dispersion and Coriolis effects / J. T. Kirby, F. Shi, B. Tehranirad, J. C. Harris, S. T. Grilli // Ocean Modelling. – 2013. – Vol. 62. – P. 39–55.

УДК 519.245

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ МОДЕЛИ МАСКЕТА – ЛЕВЕРЕТТА МЕТОДАМИ МОНТЕ – КАРЛО И ВЕРОЯТНОСТНО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ

Шакенов Канат Кожасхметович, д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби, Казахстан, 050040, г. Алматы, пр. аль-Фараби, 71, e-mail: shakenov2000@mail.ru

Султанова Маржан Сайлауовна, PhD докторант, КазНУ им. аль-Фараби, Казахстан, 050040, г. Алматы, пр. аль-Фараби, 71, e-mail: marzhan.ss@mail.ru

Тастанов Мейрамбек Габдуалиевич, к.ф.-м.н., доцент, КГУ им. А. Байтурсынова, Казахстан, 110000, г. Костанай, ул. Байтурсынова, 47, e-mail: tastao@mail.ru

Цель статьи – разработка и построение алгоритмов методов Монте – Карло и вероятностно-разностного метода для решения одной модели фильтрации жидкостей, обладающих неньютоновскими свойствами. Обобщение законов Дарси для несжимаемых компонент смеси на случай нелинейного закона сопротивления среды могут быть произведены по аналогии с многоскоростной моделью Навье – Стокса введением сил взаимодействия этих компонент или по аналогии с неоднородной жидкостью за счет зависимости фазовых проницаемостей от градиентов давлений компонент. Соответственно