4. Eilbeck J. C. Numerical study of the regularized long-wave equations, I. Numerical methods / J. C. Eilbeck, G. R. McGuire // J. Comput. Phys. – 1975. – Vol. 19, No. 1. – P. 43–57.

5. Ertekin R. C. Waves caused by a moving disturbance in a shallow channel of finite width / R. C. Ertekin, W. C. Webster, J. V. Wehausen // J. Fluid Mech. – 1986. – Vol. 169. – P. 275–292.

6. Fedotova Z. I. Energy equation for certain approximate models of long-wave hydrodynamics / Z. I. Fedotova, G. S. Khakimzyanov, D. Dutykh // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. –2014. – Vol. 29, No. 5. – P. 167–178.

7. Fedotova Z. I. Full nonlinear dispersion model of shallow water equations on a rotating sphere / Z. I. Fedotova, G. S. Khakimzyanov // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 2011. – Vol. 52, No. 6. – P. 865–876.

8. Fedotova Z. I. Methods of construction and the analysis of difference schemes for nonlinear dispersive models of wave hydrodynamics / Z. I. Fedotova, V. Yu. Pashkova // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 1997. – Vol. 12, No. 2. – P. 127–149.

9. Fedotova Z. I. Nonlinear-dispersive shallow water equations on a rotating sphere / Z. I. Fedotova, G. S. Khakimzyanov // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2010. – Vol. 25, No. 1. – P.15–26.

10. Fedotova Z. I. Nonlinear-dispersive shallow water equations on a rotating sphere and conservation laws / Z. I. Fedotova, G. S. Khakimzyanov // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 2014. – Vol. 55, No. 3. – P. 404–416.

11. Fedotova Z. I. Shallow water equations on a movable bottom / Z. I. Fedotova, G. S. Khakimzyanov // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2009. – Vol. 24, No. 1. – P. 31–42.

12. Glimsdal S. Dispersion of tsunamis: does it really matter? / S. Glimsdal, G. K. Pedersen, C. B. Harbitz, F. Lovholt // Nat. Hazards Earth Syst. Sci. – 2013. – Vol. 13. – P. 1507–1526.

13. Khakimzyanov G. S. Modelling of tsunami generated by submarine landslides in the Black Sea / G. S. Khakimzyanov, O. I. Gusev, S. A. Beisel, L. B. Chubarov, N. Yu. Shokina // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2015. – Vol. 30, No. 4. – P. 227–237.

14. Kirby J. T. Dispersive tsunami waves in the ocean: Model equations and sensitivity to dispersion and Coriolis effects / J. T. Kirby, F. Shi, B. Tehranirad, J. C. Harris, S. T. Grilli // Ocean Modelling. – 2013. – Vol. 62. – P. 39–55.

УДК 519.245

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ МОДЕЛИ МАСКЕТА – ЛЕВЕРЕТТА МЕТОДАМИ МОНТЕ – КАРЛО И ВЕРОЯТНОСТНО–РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ

***Шакенов Канат Кожахметович**, д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби, Казахстан, 050040, г. Алматы, пр. аль-Фараби, 71,* e-mail: shakenov2000@mail.ru
***Султанова Маржан Сайлауовна**, PhD докторант, КазНУ им. аль-Фараби, Казахстан, 050040, г. Алматы, пр. аль-Фараби, 71,* e-mail: marzhan.ss@mail.ru
***Тастанов Мейрамбек Габдуалиевич**, к.ф.-м.н., доцент, КГУ им. А. Байтурсынова, Казахстан, 110000, г. Костанай, ул. Байтурсынова, 47,*
e-mail: tastao@mail.ru

Цель статьи – разработка и построение алгоритмов методов Монте – Карло и вероятностно-разностного метода для решения одной модели фильтрации жидкостей, обладающих неньютоновскими свойствами. Обобщение законов Дарси для несжимаемых компонент смеси на случай нелинейного закона сопротивления среды могут быть произведены по аналогии с многоскоростной моделью Навье – Стокса введением сил взаимодействия этих компонент или по аналогии с неоднородной жидкостью за счет зависимости фазовых проницаемостей от градиентов давлений компонент. Соответственно

этому рассматриваются две формы нелинейных законов Дарси, которым отвечает модель Маскета – Леверетта описывающий процесс фильтрации двух жидкостей в пористой среде – система уравнений относительно насыщенности и давления. Для этой системы уравнений ставится начально-краевая задача и решается методами Монте – Карло и вероятностно-разностным методом.

Ключевые слова: алгоритмы методов Монте – Карло, модель фильтрации, насыщенность, давление, нелинейный закон Дарси, вероятностно-разностный метод, начально-краевая задача

NUMERICAL SOLUTION THE ONE MUSKET – LEVERETT'S MODEL BY MONTE CARLO METHODS AND PROBABILITY DIFFERENCE METHOD

Shakenov Kanat K., *Doctor of Physical and Mathematical Science, Professor, Al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan, 050040, Almaty, Al-Farabi avenue, 71,*
e-mail: shakenov2000@mail.ru
Sultanova Marzhan S., *PhD post-graduate, Al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan, 050040, Almaty, Al-Farabi avenue, 71,* e-mail: marzhan.ss@mail.ru
Tastanov Meirambek G., *Candidate of Physical and Mathematical Science, Associate Professor, A. Baitursynov KSU, Kazakhstan, 110000, Kostanai, Baitursynov street, 47,* e-mail: tastao@mail.ru

The goal of the paper is to develop and construct algorithms of Monte Carlo methods and probability difference methods for the solution of one liquid filtration model that obeys to non-Newtonian laws. Generalizations of Darcy laws for non-compressible components of the mixture for nonlinear law of environment resistance can be produced by analogy with poly-velocity model of Navier – Stocks by means of introducing forces of interaction of these components or by analogy with non-uniform liquid by means of dependences of phase penetrability's on pressure gradient of the components. We consider two forms of non-linear Darcy laws, to which Musket – Leverett's model obeys. This model describes process of filtration for two liquids in porous environment by system of equations with respect to pressure and saturation. For this system of equations we set up an initial boundary value problems and solved by Monte Carlo methods and probability difference method.

Keywords: Monte Carlo methods algorithms, filtration model, saturation, pressure, non-linear Darcy laws, probability difference method, initial boundary value problem

Следуя работе [1] опишем процесс фильтрации и вывод уравнения фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей. В теории фильтрационных процессов изучается движений жидкостей и газов в пористых телах, содержащих связную систему пустот (пор), по которым происходит движение. При описании движения жидкости или газа в пористой среде имеется ряд особенностей по сравнению с классическими моделями гидродинамики. Во-первых, вводится понятие пористости среды, в которой происходит течение. Пористость $m = m(x)$ есть доля объема среды, приходящаяся на пустоты – поры. Учет пористости среды приводит к тому, что известное в гидромеханике уравнение неразрывности (1)

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{1}$$

принимает в теории фильтрации вид

$$\partial_t (m\rho) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{2}$$

где ρ – пористость, $\mathbf{v}$ – скорость фильтрации, связанная со скоростью $\mathbf{u}$ – движения частиц жидкости формулой $\mathbf{v} = m\mathbf{u}$.

Теперь вместо уравнений (3)

$$\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt}=\rho\mathbf{f}+\mathrm{div}P, \tag{3}$$

где $\mathbf{f}$ – вектор массовых сил, P – тензор напряжения, $\frac{d}{dt}=\partial_t+(\mathbf{u}\cdot\nabla)$, ∇ – оператор градиента, $\nabla=(\partial_{x_1},\partial_{x_2},\partial_{x_3})$, $(\mathrm{div}P)_i=\sum_{j=1}^{3}\partial_{x_j}P_{ij}$, $i=1,2,3$, сохранения импульса в теории фильтрации используется следующий экспериментально полученный закон сопротивления пористой среды движущейся в ней жидкости – закон Дарси:

$$\mathbf{v}=-\frac{K_0}{\mu}(\nabla p+\rho\mathbf{g}), \tag{4}$$

где μ – динамический вязкость жидкости, $\mathbf{g}$ – вектор ускорения силы тяжести, $K_0=\mathrm{const}$ – коэффициент проницаемости характеризующий фильтрационные свойства среды.

В случае неоднородной среды K_0 зависит от пространственных координат $x=(x_1,x_2,x_3)$, для сжимаемой среды – от давления p, при этом пористость m также является функцией от p, а при нелинейном законе сопротивления – от скорости фильтрации $v=|\mathbf{v}|$. Если среда анизотропная, то $K_0=\{K_{ij}\}$ – симметричный тензор фильтрации. Имеется несколько способов эмпирического вывода уравнений Дарси как приближений для закона сохранения импульса. Значительно сложнее строятся математические модели процесса фильтрации двух несмешивающихся жидкостей (например, воды и нефти) через пористую среду. Эксперименты показывают, что в этом случае каждая из жидкостей избирает собственные весьма устойчивые пути.

При уменьшении насыщенности s_i (доли порового пространства, занятого i-й компонентой) одной из жидкостей каналы разрушаются, становятся прерывистыми и в конечном итоге остаются лишь изолированные области, занятые этой жидкостью. Данное явление называется остаточной нефте- или водонасыщенностью, а соответствующие значения s_i обозначаются $s_i^0>0$. Для описания этого сложного физического процесса также может применена концепция сплошной среды. Рассмотрим двухкомпонентную жидкость как совокупность континуумов, заполняющих один и тот же объем несжимаемого порового пространства. Для каждого из континуумов, помимо насыщенностей s_i, введем свою плотность ρ_i, скорость фильтрации $\mathbf{v}_i$ и давление p_i. Тогда аналогично (2) уравнения неразрывности каждой компоненты жидкости могут быть записаны в виде

$$\partial_t(m\rho_i s_i)+\mathrm{div}(\rho_i\mathbf{v}_i)=0,\quad i=1,2. \tag{5}$$

Учитывая качественную картину многофазной фильтрации, М. Маскет предложил следующее формальное обобщение закона Дарси для каждой из жидкостей:

$$\mathbf{v}_i=-K_0\frac{\overline{k}_{0i}}{\mu_i}(\nabla p_i+\rho_i\mathbf{g}),\quad i=1,2, \tag{6}$$

где K_0 – по-прежнему коэффициент фильтрации пористой среды для однородной жидкости (или симметричный тензор для анизотропной среды), μ_i – коэффициенты динамической вязкости, $\overline{k}_{0i}$ – относительные фазовые проницаемости. При этом $\overline{k}_{0i}$ должны зависеть от насыщенности s_i, поскольку часть порового пространства занята другой жидкостью.

Тот факт, что $\overline{k}_{0i}$ являются лишь функциями от s_i и практически на зависят от давлений, расходов и других параметров потока жидкостей, неоднократно подтверждался в лабораторных опытах.

По определению, насыщенности s_i меняются в пределах $0 < s_i^0 \le s_i \le 1 - s_j^0$, $i \ne j$, $s_1 + s_2 = 1$, и при достижении значений $s_i = s_i^0$ движение i-й компоненты прекращается, что обеспечивается выполнением условий $\overline{k}_{0i}\left(s_i^0\right) = 0$, $i = 1,2$. При анализе несмешивающихся многофазных потоков необходимо также учитывать эффект сил, действующих на поверхность раздела. При соприкосновении двух несмешивающихся жидкостей (I и II) между собой и с твердой поверхностью пор граница $\partial\Omega_{1,2}$ раздела между жидкостями подходит к твердой стенке под контактным углом θ. Если θ – острый угол, то жидкость I называют смачивающей (она в большой степени стремится растекаться по данному твердому телу), а жидкость II – несмачивающей. На границе $\partial\Omega_{1,2}$ существует скачок фазовых давлений, который называют капиллярным давлением:

$$p_2 - p_1 = p_c(x,s), \quad s \equiv \frac{s_1 - s_1^0}{1 - s_1^0 - s_2^0}, \quad 0 \le s \le 1. \tag{7}$$

Капиллярное давление p_c определяется кривизной $\partial\Omega_{1,2}$, насыщенностью s_1 смачивающей жидкости, характеристиками пористой среды и жидкостей и выражается формулой Лапласа

$$p_c(x,s) = \overline{p}_c(x) \cdot j(s), \quad \overline{p}_c(x) = \sigma\cos\theta\left(m/\left|K_0\right|\right)^{1/2}, \tag{8}$$

где σ – коэффициент межфазового натяжения, $j(s)$ – функция Леверетта, а величина $\left|K_0\right|$ обозначает детерминант матрицы $\left\{K_{ij}\right\}$, если K_0 симметричный тензор фильтрации анизотропной пористой среды.

Система уравнений (5) – (7) относительно характеристик $\mathbf{v}_i$, p_i, ρ_i и $s = \left(s_1 - s_1^0\right)/\left(1 - s_1^0 - s_2^0\right)$ несмешивающихся жидкостей, движущихся в пористой среде, в изотермическом случае (температура в потоке постоянная) замыкается заданием уравнений состояния жидкостей

$$\rho_i = \rho_i\left(p_i\right), \quad i = 1,2. \tag{9}$$

Мы предполагаем, что обе жидкости несжимаемые, то есть $\rho_i = \text{const}$.

Полученную математическую модель фильтрации многофазных жидкостей (уравнения (5) – (9)) называют моделью Маскета – Леверетта в честь М. Маскета, первым предложившего обобщения (6) закона Дарси, и М. Леверетта, который впервые использовал закон Лапласа (8). [1].

Функциональные параметры m, $\overline{k}_{0i}$, K_0, j модели Маскета – Леверетта предполагаются заданными функциями соответствующих переменных x или s и все числовые параметры μ_i, ρ_i, s_i^0 и другие неотрицательными фиксированными. При этом фазовые проницаемости $k_{0i}(s) = \dfrac{1}{\mu_i}\overline{k}_{0i}(s)$ обладают свойствами $k_{0i}(s) > 0$, $s \in (0,1)$, $k_{01}(0) = k_{02}(1) = 0$.

Начально-краевая задача для уравнений (5) – (9).

Пусть фильтрация неоднородной жидкости происходит в конечной области Ω переменного $x = (x_1, x_2, x_3)$, граница $\partial\Omega$ которой состоит из непроницаемой поверхности

$\partial\Omega^0$ и $\partial\Omega^1$, соответствующей нагнетательным и эксплуатационным скважинам и заданным границам $\partial\Omega^2 \subset \partial\Omega^1$ с однородной неподвижной жидкостью (например, с воздухом на кровле пласта или с грунтовыми водами на его подошве).

Условие непротекания на $\partial\Omega^0$ для обеих фаз имеют вид

$$(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad (t,x) \in S^0 = \partial\Omega^0 \times (T,0), \tag{10}$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$, $S^i = \partial\Omega^i \times (T,0)$, $i = 1,2$.

На участках $\partial\Omega^2 \subset \partial\Omega^1$, граничащих с однородной неподвижной жидкостью, заданы давление в смачивающей фазе, совпадающее с гидростатическим давлением в неподвижной жидкости, и величина насыщенности (например, на кровле $s = 0$, а на подошве $s = 1$):

$$p_1 = p_{10}(t,x), \quad s = s_0(t,x), \quad (t,x) \in S^2. \tag{11}$$

Условия вида (11) иногда можно задавать и на участках $\partial\Omega^1$, соответствующих скважинам. Обычно же на $\partial\Omega^1$ предполагается известным расход смеси (дебиты скважин)

$$((\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n}) = R(t,x), \quad (t,x) \in S^1. \tag{12}$$

Кроме того, если на $\partial\Omega^1$ пренебречь нормальной составляющей градиента капиллярного давления p_c по сравнению с градиентами фазовых давлений и не учитывать сил тяжести, то $(\nabla p_1 \cdot \mathbf{n}) = (\nabla p_2 \cdot \mathbf{n})$ или согласно (6) $((k_{02}\mathbf{v}_1 - k_{01}\mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n}) = 0$, $(t,x) \in S^1$.

С помощью (12) полученному соотношению можно придать более удобную форму:

$$(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}) = \frac{k_{0i}}{k_{01} + k_{02}} R(t,x), \quad (t,x) \in S^1, \tag{13}$$

показывающую, что закачка и отбор смеси производятся пропорционально подвижности фаз.

Теперь зададим начальное распределение насыщенности

$$s(0,x) = s_0(0,x), \quad x \in \Omega. \tag{14}$$

Следуя работе [1] рассмотрим модель Маскета – Леверетта двухфазной фильтрации несжимаемых жидкостей ($\rho_i = \text{const}$) в пористой среде описываемой следующей системой уравнений относительно насыщенности $s(t,x)$ и давления $p(t,x)$:

$$m\partial_t s = \operatorname{div}(K_0 a \nabla s + K_1 \nabla p + \mathbf{f}_0) \equiv -\operatorname{div}\mathbf{v}_1(s,p), \tag{15}$$

$$\operatorname{div}(K\nabla p + \mathbf{f}) \equiv -\operatorname{div}\mathbf{v}(s,p) = 0. \tag{16}$$

Уравнения (15) и (16) представляют собой квазилинейную систему, состоящую из равномерно эллиптического уравнения для $p(t,x)$ и вырождающегося при $s = 0, 1$ параболического уравнения для $s(t,x)$.

Начально-краевая задача для (15), (16).

Рассмотрим фильтрационное течение в заданной конечной области Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Эта граница $\partial\Omega$ может разбиваться на несколько связных компонент $\partial\Omega^i$. Пусть $Q = \Omega \times [T,0]$, $S^i = \partial\Omega^i \times [T,0]$, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Перепишем граничные данные (10) – (13) для s, p. Условия непротекания на $\partial\Omega^0$ для обеих фаз эквивалентны следующим:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (t,x) \in S^0 = \partial\Omega^0 \times [T,0]. \tag{17}$$

Краевые условия (11) – (13) преобразуются соответственно к виду

$$p = p_0(t,x), \quad s = s_0(t,x), \quad (t,x) \in S^2 = \partial\Omega^2 \times [T,0], \tag{18}$$

$$-(K\nabla p + \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = R(t,x), \quad (t,x) \in S^1 = \partial\Omega^1 \times [T,0], \tag{19}$$

$$-\left(K_0 a\nabla s + K_1\nabla p + \mathbf{f}_0\right)\cdot\mathbf{n} \equiv \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{n} = bR(t,x),\ \ (t,x)\in S^1. \tag{20}$$

Так как равенства (19), (20) при $R(t,x)=0$ эквивалентны (17), то естественно включить $\partial\Omega^0$ в $\partial\Omega^1$ и предполагать, что $\partial\Omega^1$ состоит из нескольких компонент, на части которых $R(t,x)=0$.

Таким образом, $\partial\Omega=\partial\Omega^1\cup\partial\Omega^2$. Система уравнений (15), (16) не удовлетворяет условиям Коши – Ковалевской (второе уравнение не содержит $\partial_t p$), и поэтому достаточно задавать начальное условие лишь для насыщенности $s(t,x)$:

$$s(0,x)=s_0(0,x),\ \ x\in\Omega. \tag{21}$$

Замечание. Компоненты $\partial\Omega^1$ или $\partial\Omega^2$ могут на $\partial\Omega$ отсутствовать, то есть возможно $\partial\Omega\equiv\partial\Omega^1$ или $\partial\Omega\equiv\partial\Omega^2$. В этом случае, когда $\partial\Omega\equiv\partial\Omega^1$, закон сохранения массы смеси в области Ω приводит к следующему необходимому условию:

$$\int\limits_{\Omega} p(t,x)dx = \int\limits_{\partial\Omega} R(t,x)dx = 0,\ \ t\in\left[0,T\right]. \tag{22}$$

Приведем сводку формул, выражающих коэффициенты уравнений (15) – (16) и граничных условий (17) – (20):

$$a=-\partial_s p_c\frac{k_{01}k_{02}}{k},\ k=k_{01}+k_{02},\ b=\frac{k_{01}}{k}\equiv K_1K^{-1},\ \mathbf{f}_0=K_1\int\limits_s^1\nabla\partial_s p_c\frac{k_{02}}{k},$$

$$K_i=k_{0i}K_0,\ \ i=1,2,\ \mathbf{f}=KK_1^{-1}\mathbf{f}_0+K_2\nabla p_c+K_2\left(\rho_2-\rho_1\right)\mathbf{g},\ K=K_1+K_2,$$

$$\mathbf{F}=\mathbf{f}_0-b\mathbf{f}=-k_{01}k_{02}k^{-1}K_0\left(\nabla p_c+\left(\rho_2-\rho_1\right)\mathbf{g}\right). \tag{23}$$

Нерешенная задача. [1]. Большой интерес представляют задачи фильтрации, обладающих неньютоновскими свойствами. Рассмотрим обобщение законов Дарси для несжимаемых компонент смеси на случай нелинейного закона сопротивления среды. Это приведет к рассмотрению двух форм нелинейных законов Дарси:

$$\mathbf{v}_i=\mathbf{u}_i+\left(-1\right)^i\mathbf{F}_0,\ \mathbf{F}_0=\Phi\left(s,w\right)\mathbf{w};\ \mathbf{v}_i=\Phi\left(w\right)\mathbf{u}_i,\ i=1,\ 2, \tag{24}$$

которым отвечает аналогичная линейному случаю система уравнений (модель Маскета – Леверетта) относительно насыщенности $s\left(t,x\right)$ и давления $p\left(t,x\right)$:

$$m\partial_t s(t,x)=\mathrm{div}\Phi^n\left(K_0\mathrm{grad}s(t,x)-b\mathbf{v}+\mathbf{F}+(1-n)\mathbf{F}_0\right), \tag{25}$$

$$\mathrm{div}\Phi^n\left(K\mathrm{grad}p(t,x)+\mathbf{f}\right)=0,\ n=0,\ 1. \tag{26}$$

Здесь $\Phi_i=p_i+\rho_i gh$ – потенциал, $\mathbf{g}=g\nabla h$, $\mathbf{u}_i=-K_i\left(\nabla p_i+\rho_i\mathbf{g}\right)$, $w=\left|\mathbf{w}\right|$, а $\mathbf{w}$ совпадает с одним из $\mathbf{u}_i$, с $\mathbf{v}$ или с $K_0\nabla p_c$, что соответствует предположению о выполнении обычного нелинейного закона Дарси для компоненты $\mathbf{u}_i$, предположению о пропорциональности сил взаимодействия общему расходу смеси или допущению о преимущественном влиянии капиллярных сил на процесс взаимодействия компонент. Остальные коэффициенты и функции приведены в (23). Смотрите [1], Глава V, § 11. Нерешенные проблемы. Стр. 302.

Численное решение начально-краевой задачи для (25), (26) методами Монте – Карло и вероятностно-разностным методом. Предположим, что коэффициенты и функции в (25) и (26) не зависят от искомых функций $s\left(t,x\right)$ и $p\left(t,x\right)$, и заданы. Дискретизируем (25), (26) и начально-краевые условия (17) – (21) только по временной переменной t неявной схемой.

В результате получим следующие уравнения на временных слоях t_{n+1} относительно $s^{n+1}(x)$ и $p^{n+1}(x)$:

$$L_s s^{n+1}(x) = D^n(x), \quad x \in \Omega, \tag{27}$$

$$L_p p^{n+1}(x) = G^n(x), \quad x \in \Omega. \tag{28}$$

Если, входные данные (коэффициенты и функции) задачи (25), (26), (17) – (21) обеспечат эллиптичность операторов L_s и L_p, тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. К задаче (27), (28) применимы алгоритмы «блуждания по сферам», «блуждания по шарам» и «блуждания по решеткам» методов Монте – Карло и вероятностно-разностный метод.

Доказательство. Доказательство следует из того факта, что уравнения (26) и (25) представляют собой квазилинейную систему, состоящую из равномерно эллиптического уравнения для $p(t,x)$ и вырождающегося при $s = 0,\ 1$ параболического уравнения для $s(t,x)$. Смотрите также работы автора [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9].

Выводы: Модель Маскета – Леверетта описывающая процесс фильтрации двух жидкостей в пористой среде – система уравнений относительно насыщенности и давления, полученная применением нелинейных законов Дарси, разрешима методами Монте – Карло и вероятностно-разностным методом.

Список литературы

1. Антонцев С.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей/ С.Н. Антонцев, А.В., Кажихов, В.Н. Монахов – Новосибирск.- Наука.- 1983. – 320 с.
2. Смагулов Ш. Методы Монте – Карло в задачах гидродинамики и фильтрации/ Ш.Смагулов, К.К. Шакенов. – Алматы: Қазақ университеті.- 1999. – 170 с.
3. Шакенов К.К. Численное моделирование одной модели релаксационной фильтрации методами Монте – Карло и вероятностно – разностным методом/ К.К.. Шакенов //XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20 – 24 августа 2015 года. С. 4157 – 4158.
4. Shakenov K. Solution of one problem of linear relaxational filtration by Monte Carlo methods. The International Conference on Computational Mathematics. Proceedings: Part I. Novosibirsk: 2002. P. 276 – 280.
5. Shakenov K. Solution of one mixed problem for equation of a relaxational filtration by Monte Carlo methods. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design. Springer Berlin / Heidelberg. Volume 93/2006. Book Advances in High Performance Computing and Computational Sciences. Chapter 71. Pages 205 – 210. September 25, 2006.
6. Shakenov K.K. Solution of problem for one model of relaxational filtration by probabilitly–difference and Monte Carlo methods. Polish Academy of Sciences. Committee of Mining. Archives of Mining Sciences. Volume 52, Issue 2, Krakow, 2007. Pages 247 – 255.
7. Shakenov Kanat. Solution of Mixed Problem for Elliptic Equation by Monte Carlo and Probability – Difference Methods. 7th International Summer School/Conference "Let's Face Chaos through Nonlinear Dynamics", at the University of Maribor, 29 June – 13 July 2008, Slovenia. American Institute of Physics. AIP Conference Proceedings 1076. P. 213 – 218.
8. Shakenov K. The Solution of the Initial Mixed Boundary Value Problem for Hyperbolic Equations by Monte Carlo and Probability Difference methods. Trends in Mathematics. Fourier Analysis. Pseudo–differential Operators, Time-Frequency Analysis and Partial Differential Equations. Berkhäuser. © Springer International Publishing Switzerland 2014. P. 349 – 355.
9. Shakenov Kanat. Numerical Modeling of the one Model of Filtration Process by Monte Carlo Methods. Series "Applied and Numerical Harmonic Analysis". Book "Methods of Fourier Analysis and Approximation Theory". Springer. Berkhäuser. 2016. P. 237 – 258.