Список литературы

1. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. - М., «Машиностроение», - 1975, - 400 с.
2. М.Я.Леонов Прочность и устойчивость механических систем: Актуал. задачи нелинейн. механики. - Фрунзе : Илим, 1987. - 279 с.
3. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. - М., «Наука», - 1974, 559 с.
4. Комарцов Н.М., Рычков Б.А. Концепция скольжения и механика пластической деформации. – Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing, - 2011. - 176 с.
5. Рычков Б.А. Постулат «Инвариантности упрочнения» // Известия АН Республики Кыргызстан. – 1991. №2.-С.42-53
6. Маделунг Г.Э. Математический аппарат физики. – М.: Физматгиз, 1960. - 620 с.

УДК 517.962.2, 517.968.22

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СЕЙСМИКИ С МГНОВЕННЫМ И ШНУРОВЫМ ИСТОЧНИКОМ

Сатыбаев Абдуганы Джунусович, *д. ф.-м.н., профессор, ОшТУ им. М.М.Адышева,*
Алимканов Амангелди Арапбаевич, *ст. преп,. ОшТУ им. М.М.Адышева,*
Култаев Топчубай Чокоевич, *д.э.н., к.ф.-м.н., профессор, ОшГУ, Кыргызстан, 714018, г.Ош, ул.Исанова 81, e-mail: abdu-satybaev@mail.ru*

В данной статье построено численное решение одномерной обратной задачи сейсмики. Здесь определена плотность среды, с мгновенным источником по времени и с динамической дополнительной информацией. Доказана сходимость приближенного решения к точному решению. Построен алгоритм решения поставленной задачи.

Ключевые слова: уравнение сейсмики, обратная задача, плотность среды, конечно-разностное решение, сходимость решения, алгоритм решения

ALGORITHM FOR AN INVERSE PROBLEM OF SEISMOLOGY WITH INSTANT AND CORDED SOURCE

Satybaev Abdugany Dzhunusovich, *d. Physics and Mathematics science, Professor, OshTU them. M.M.Adysheva,*
Alimkanov Amangeldi Arapbaevich *Art. St.,. OshTU them. M.M.Adysheva,*
Kultaev Topchubay Chokoevich, *Ph.D., Ph.D., professor of Osh State University, Kyrgyzstan, 714018, Osh, ul.Isanova 81, e-mail: abdu-satybaev@mail.ru*

This article built a numerical solution of one-dimensional inverse problem of seismic. Here defined density medium source with instant in time and additional information dynamically. We prove the convergence of the approximate solutions to the exact solution. An algorithm to solve this problem.

Keywords: seismic equation, inverse problem, the density of the medium, the finite difference solution, convergence solutions, solving algorithm

Введение. Одновременное определение коэффициента жесткости среды и ее коэффициента поглощения динамической обратной задачи сейсмики рассмотрено в работе [1] А.В. Баева.

В работе автора [4] восстановлен коэффициент Ламэ в уравнении сейсмики с мгновенным источником по времени и с динамической дополнительной информацией.

Цель работы: построить конечно-разностное решение поставленной задачи и показать сходимость этого решения к точному решению.

Постановка задачи. Одномерная прямая задача сейсмики заключается в определении $u_0(x_3,t)$ - смещения почв из задачи

$$\rho_0(x_3)\frac{\partial^2 u_0(x_3,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\mu_0(x_3)\frac{\partial u_0(x_3,t)}{\partial x_3}\right),\quad x_3\in R_+,t\in R_+, \tag{1}$$

$$u_0(x_3,t)\Big|_{t<0}\equiv 0,\qquad \mu_0(x_3)\frac{\partial u_0(x_3,t)}{\partial x_3}\Bigg|_{x_3=0}=-\delta(t)+\tau_0\theta(t),\ t\in R_+, \tag{2}$$

где $\rho_0(x_3)$ - плотность, $\mu_0(x_3)$ - коэффициент Ламэ известные функции, δ(t) – дельта функция Дирака, θ(t) – тета функция Хевисайда.

Определить функцию $\rho_0(x_3)$ – плотности среды, при известной $\mu_0(x_3)$ и дополнительной информации вида

$$u_0(x_3,t)\Big|_{x_3=0}=f(t),\ \ t\in[0,T]. \tag{3}$$

Обратная задача (1)-(3) возникла при линеаризации двумерной обратной задачи сейсмики [5]. Пусть выполнено условие

$$\mu_0(x_3),\qquad \rho_0(x_3)\in\Lambda_0, \tag{4}$$

$$\Lambda_0=\left\{\rho_0(x)\in C^6(R_+),\rho_0'(+0)=0,\ 0<M_1\le\rho_0(x)\le M_2,\|\rho_0\|_{C^2}\le M_3\right\}$$

M_1,M_2,M_3 - положительные постоянные.

Приведем задачу (1)-(3) к обратной задаче с данными на характеристиках.

Для этого введем новую переменную $x=\int\limits_0^{x_3}\frac{dx}{\sqrt{\mu_0(x)/\rho_0(x)}}$ и новые функции $u(x,t)=u_0(x_3,t),a(x)=\rho_0(x_3),\quad c(x)=\mu_0(x_3).$

Выводим следующие выкладки:

$$u''_{0tt}(x_3,t)=u''_{tt}(x,t),\qquad u'_{0x_3}(x_3,t)=u'_x(x,t)\cdot\frac{1}{\sqrt{\mu_0(x_3)/\rho_0(x_3)}},$$

$$u_{0x_3}{}''{}_{x_3}(x_3,t)=u''_{xx}(x,t)\cdot\frac{1}{\mu_0(x_3)/\rho_0(x_3)}+$$

$$+u'_x(x,t)\cdot\left[\frac{\rho_0'(x_3)\cdot\mu_0(x_3)-\rho_0(x_3)\cdot\mu_0'(x_3)}{\mu^2(x_3)}\right]$$

Подставляя это выкладки в (1)-(3) имеем следующую обратную задачу

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{a'(x)}{a(x)}+\frac{c'(x)}{c(x)}\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t},\qquad x,t\in R_+^2,\\&u(x,t)\Big|_{t<0}\equiv0,\qquad \frac{a(0)}{c(0)}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Bigg|_{x=0}=-\delta(t)+\tau_0\theta(t),\qquad t\in R_+,\\&u(x,t)\Big|_{x=0}=f(t),\qquad t\in[0,T].\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Здесь неизвестной функцией является $a(x)$.

Пусть все функции входящие в задачу являются четными, тогда продолжаем функции *a(x),c(x)* и *u(x,t)* четным образом по переменной *x* на полупространство $x \in R_{-} = \{x \in R : x < 0\}$.

В силу условия (3),(4) и принципа конечной зависимости области решения гиперболического уравнения от области определения его коэффициентов и от области данных можно ограничиться рассмотрением обратной задачи (5) в области $\Delta(T) = \left\{(x,t) \in (R \times R_{+}) : x \in (0, \frac{T}{2}),\ |x| < t < T - |x|\right\}$.

Представим решение прямой задачи (5) в виде:

$$u(x,t) = \widetilde{u}(x,t) + S(x)\theta(t - |x|), \qquad x \in R, \qquad t \in R_{+}, \tag{6}$$

где $\widetilde{u}(x,t)$ - гладкая непрерывная функция. Вычислим

$$\begin{gathered} u(x,t) = \widetilde{u}(x,t) + S(x)\theta(t-|x|) + R(x)\theta_1(t-|x|), \\ u_{tt}(x,t) = \widetilde{u}(x,t) + S'_x(x)\theta(t-|x|) - S(x)\delta(t-|x|) + R'_x(x)\theta_1(t-|x|) - \\ - R(x)\theta(t-|x|), \\ u_{xx}(x,t) = \widetilde{u}(x,t) + S'''_{xx}(x)\theta(t-|x|) - 2S'_x(x)\delta(t-|x|) + S(x)\delta'_x(t-|x|) + \\ + R''_{xx}(x)\theta(t-|x|) - 2R'_x(x)\delta(t-|x|) + R(x)\delta(t-|x|) \end{gathered} \tag{7}$$

В таком случае относительно функции *S(x)* имеем обратную задачу:

$$\left.\begin{aligned} & u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) - \frac{2S'(x)}{S(x)} u_x(x,t), \qquad (x,t) \in \Delta(T), \\ & u(x,t)\big|_{t=|x|} = S(x), \qquad x \in \left[0, \frac{T}{2}\right], \\ & u(x,t)\big|_{x=0} = f(t), \qquad t \in [0,T], \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Функции *S(x)* и *a(x), c(x)* связаны соотношением

$$c(x) \cdot u_x(x,t)\big|_{x=0} = c(0)u_x(0,t) = \widetilde{u}_x(x,t)\big|_{x=0} + S'_x(0)\theta(t) - S(0)\delta(t)$$

$$+ R'_x(0)\theta_1(t) - R(0)\theta(t) = -\delta(t) + \tau_0\theta(t)$$

$$S(0) = \sqrt{\frac{1}{a(0)\cdot c(0)}}, \qquad S'_x(0) - R(0) = \tau_0 \qquad \textit{отсюда} \qquad \tau_0 = -R(0)$$

$$S(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{a(x)c(x)}}; \qquad S(0) = \sqrt[4]{\frac{1}{a(x)c(x)}};$$

$$S'(0) = -\frac{1}{4}\left(\frac{a'(0)}{a(0)} + \frac{c'(0)}{c(0)}\right) \cdot S(0) = 0$$

так как a(x), c(x) – четные и $a'(0) = 0, \quad c'(0) = 0.$

Конечно-разностное решение.

Теорема. Пусть для $f(t)\in C^4[0,T]$ существует решение обратной задачи (1)-(3) удовлетворяющее условию (4) и решению прямой задачи (1)-(2) $u(x,t)\in C^4(\Delta(t))$. Тогда при малом T приближенное решение обратной задачи, построенной конечно-разностным методом, сходится к точному решению в классе C со скоростью порядка $O(h)$.

Докажем теорему. Введем сеточную область [3]

$$\Delta_h(T)=\left\{x_i=ih, t_k=kh, (ih,kh: h=T/2N, \quad ih\in(0,T/2), \quad i=\overline{1,N}, \quad ih\le kh\le T-ih\right\}, \quad (10)$$

где h – сеточный шаг по x,t.

Построим конечно-разностный аналог задачи (8)

$$\left.\begin{aligned} &u_{\bar{t}t}(ih,kh)=u_{xx}(ih,kh)-2\frac{S_{0\bar{x}}(ih)}{\dfrac{S_i+S_{i-2}}{2}}\cdot u_{0\bar{x}}(ih,kh)+O(h),\\ &(ih,kh)\in\Delta_h(T), \quad u_i^i=S_i \quad, \ i=\overline{0,N}, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$u_o^k=f^k \quad, \qquad k=\overline{0,2N}. \tag{12}$$

Исследуем в начале сходимости обратной задачи (11)-(12) к точному решению. Для этого распишем разностное уравнение

$$u_{i+1}^k=u_i^{k+1}+u_i^{k-1}-u^k{}_{i-1}+h^2B_i^k,$$

$$\text{ãäå} \qquad B_i^k=\frac{S_i-S_{i-2}}{h^2}\cdot\frac{4}{S_i+S_{i-2}}\cdot(u_i^k-u_{i-2}^k). \tag{13}$$

Подставляя в правую часть последнего уравнения выражения $u_i^{k+1}, \quad u_i^{k-1}, \quad u_{i-1}^{k-2},\ldots$ последовательно, получим

$$u_{i+1}^k=\frac{1}{2}\left[f^{k+i+1}+f^{k-i-1}\right]+h^2\sum_{p=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{p}B_\mu^{k-i-\mu+2p}. \tag{14}$$

Полагая в (14) k=i+1 и учитывая вторую формулу (11) имеем

$$S_{i+1}=\frac{1}{2}\left[f^{2i+2}+f^0\right]+h^2\sum_{p=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{p}B_\mu^{1-\mu+2p}. \tag{15}$$

Из (14) следуют

$$u_i^k=\frac{1}{2}\left(f^{k+i}+f^{k-i}\right)+h^2\sum_{p=1}^{i-1}\sum_{\mu=1}^{p}B_k^{k-i-\mu+2p+1}. \tag{16}$$

$$u_{i-2}^k=\frac{1}{2}(f^{k+i-2}+f^{k-i+2})+h^2\sum_{p=1}^{i-3}\sum_{\mu=1}^{p}B_\mu^{k-i-\mu+2p+3}. \tag{17}$$

Откуда

$$\frac{u_i^k-u_{i-2}^k}{h}=\frac{1}{2h}\left(f^{k+i}-f^{k+i-2}+f^{k-i}-f^{k-i+2}\right)+h\sum_{\mu=1}^{i-1}B_\mu^{k-i+\mu+1}+h\sum_{\mu=1}^{i-1}B_\mu^{k+i-\mu-1}, \tag{18}$$

а из (16) и (17) следуют

$$S_i = \frac{1}{2}\left[f^{2i} + f^0\right] + h^2 \sum_{p=1}^{i-1} \sum_{\mu=1}^{p} B_{\mu}^{1-\mu+2p},$$ (19)

$$S_{i-2} = \frac{1}{2}\left[f^{2i-4} + f^0\right] + h^2 \sum_{p=1}^{i-3} \sum_{\mu=1}^{p} B_{\mu}^{1-\mu+2p}.$$ (20)

Следовательно,

$$\frac{S_i - S_{i-2}}{h} = \frac{1}{2h}\left(f^{2i} - f^{2i-4}\right) + h\sum_{\mu=1}^{i-1} B_{\mu}^{2i-\mu-1} + h\sum_{\mu=1}^{i-3} B_{\mu}^{2i-\mu-3}. (21)$$

Введем следующие обозначения

$$F_i^k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f^{k+i} + f^{k-i} \\ \frac{1}{h}\left(f^{k+i} - f^{k+i-2} + f^{k-i} + f^{k-i+2}\right) \\ f^{2i} + f^0 \\ \frac{1}{h}\left(f^{2i} - f^{2i-4}\right) \end{pmatrix}, \quad \Phi_i^k = \begin{pmatrix} u_i^k \\ \frac{u_i^k - u_{i-2}^k}{h} \\ S_i \\ \frac{S_i - S_{i-2}}{h} \end{pmatrix},$$

и введем операторное выражение

$$\grave{A}\left[\hat{O}_{\partial}^{k}\right] = \begin{pmatrix} h\sum_{\mu=1}^{p} B_{\mu}^{k-i-\mu+2p+1} \\ B_p^{k-i+p+1} + B_p^{k+i-\mu-1} \\ h\sum_{\mu=1}^{p} B_{\mu}^{1-\mu+2p} \\ B_p^{2i-p-1} + B_{p-1}^{2i-p-2} - B_o^{2i-3} \end{pmatrix}$$

Тогда из (16),(18), (19),(21) следует

$$\hat{O}_i^k = F_i^k + h\sum_{p=1}^{i-1} A\left[\Phi_p^k\right]$$

Отсюда, используя дискретный аналог Гроноулла-Беллмана [2], доказывается утверждение теоремы.

Выводы: Доказана сходимость конечно-разностного приближенного решения к точному решению обратной задачи сейсмики с указанными условиями. Построен алгоритм решения для дальнейшей реализации на компьютере.

Список литературы

1. Баев А.В. Метод решения обратной задачи сейсмики с поглощением / А.В. Баев // Прямые и обратные задачи математической физики. -Сб. трудов ВМК МГУ. – М.- 1991. С.26-30.
2. Беккенбах Э. НЕРАВЕНСТВА/ Э. Беккенбах, Р. Беллман.- Перевод с английского. Г. И. Басса, В. И. Левина,. Г. А. Шадрцна. Под редакцией. Б. И. Левина.1965.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем/ А.А.Самарский– М.-Наука, 1977.
4. Сатыбаев А.Дж. Численное определение коэффициента Ламэ в уравнении сейсмики /А.Дж. Сатыбаев //История, культура и экономика юга Кыргызстана. – Ош: КУУ, 2000.- С.148-152.

5. Сатыбаев А.Дж. Алгоритм решения двумерно-линеаризованной обратной задачи сейсмики/ А.Дж. Сатыбаев //Вопросы функционально-дифференциальных уравнений. – Ош: ОВК, 1999. -С.41-46.
УДК 517.962.2, 517.968.22

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ГЕОЭЛЕКТРИКИ С ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕЙ И ШНУРОВЫМ ИСТОЧНИКОМ

***Сатыбаев Абдуганы Джунусович**, д. ф.-м.н., профессор, ОшТУ имени академика М. М. Адышева,*
***Жанибеков Максатбек Жанибекович,** к.ф.м.н., профессор, ОшТУ имени академика М. М. Адышева,*
***Анищенко Юлия Владимировна**, преподаватель, ОшТУ имени академика М. М. Адышева,*
***Маматкасымова Алима Торожановна,** ст. преподаватель, ОшТУ имени академика М. М. Адышев.*

В данной статье построена двумерная прямая задача в постановке, что необходима для обратной задачи. Задача приведена с использованием метода Эйконала и метода приведения особенностей к задаче с данными на характеристиках. Здесь обоснована единственность поставленной прямой задачи, Построено приближенное решение метода конечно-разностных схем и показана его сходимость к точному решению, Построен алгоритм решения.

Ключевые слова: уравнение геоэлектрики, плоская граница, шнуровой источник, прямая задача, единственность решения, конечно-разностное решение, алгоритм, сходимость решения.

NUMERICAL ALGORITHMS FOR SOLVING TWO-DIMENSIONAL GEOELECTRIC DIRECT PROBLEMS WITH FLAT BOUNDARY AND CORDED SOURCE

***Satybaev Abdugany Junusovich,** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Osh Technological University after named Academician M. Adyshev,*
***Janibekov Maksatbek Janibekovich,** Kandidat of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Osh Technological University,*
***Anishchenko Iuliia Vladimirovna,** teacher, Osh Technological University after named Academician M. Adyshev,*
***Mamatkasymova Aliima Torojanovna**, teacher, Osh Technological University after named Academician M. Adyshev.*

This article is based two-dimensional direct problem in the formulation of what is needed to reverse the problem. The task is given to using the eikonal method and the method of characteristics to bring to a problem with the characteristics of the data. It proved the uniqueness of the set of the direct problem, construct an approximate solution method of finite difference schemes and shows its convergence to the exact solution, An algorithm solutions.

Keywords: equation geoelectric, flat border, corded power, direct problem, the only solution, the finite difference solution algorithm, convergence solutions.

Введение. Математические модели электродинамики, в том числе геоэлектрики выражаются системой уравнений Максвелла. В практических приложениях уравнений электродинамики во многих случаях используются в виде уравнений геоэлектрики.