5. Сатыбаев А.Дж. Алгоритм решения двумерно-линеаризованной обратной задачи сейсмики/ А.Дж. Сатыбаев //Вопросы функционально-дифференциальных уравнений. – Ош: ОВК, 1999. -С.41-46.
УДК 517.962.2, 517.968.22

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ГЕОЭЛЕКТРИКИ С ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕЙ И ШНУРОВЫМ ИСТОЧНИКОМ

Сатыбаев Абдуганы Джунусович, *д. ф.-м.н., профессор, ОшТУ имени академика М. М. Адышева,*
Жанибеков Максатбек Жанибекович, *к.ф.м.н., профессор, ОшТУ имени академика М. М. Адышева,*
Анищенко Юлия Владимировна, *преподаватель, ОшТУ имени академика М. М. Адышева,*
Маматкасымова Алима Торожановна, *ст. преподаватель, ОшТУ имени академика М. М. Адышев.*

В данной статье построена двумерная прямая задача в постановке, что необходима для обратной задачи. Задача приведена с использованием метода Эйконала и метода приведения особенностей к задаче с данными на характеристиках. Здесь обоснована единственность поставленной прямой задачи, Построено приближенное решение метода конечно-разностных схем и показана его сходимость к точному решению, Построен алгоритм решения.

Ключевые слова: уравнение геоэлектрики, плоская граница, шнуровой источник, прямая задача, единственность решения, конечно-разностное решение, алгоритм, сходимость решения.

NUMERICAL ALGORITHMS FOR SOLVING TWO-DIMENSIONAL GEOELECTRIC DIRECT PROBLEMS WITH FLAT BOUNDARY AND CORDED SOURCE

Satybaev Abdugany Junusovich, *Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Osh Technological University after named Academician M. Adyshev,*
Janibekov Maksatbek Janibekovich, *Kandidat of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Osh Technological University,*
Anishchenko Iuliia Vladimirovna, *teacher, Osh Technological University after named Academician M. Adyshev,*
Mamatkasymova Aliima Torojanovna, *teacher, Osh Technological University after named Academician M. Adyshev.*

This article is based two-dimensional direct problem in the formulation of what is needed to reverse the problem. The task is given to using the eikonal method and the method of characteristics to bring to a problem with the characteristics of the data. It proved the uniqueness of the set of the direct problem, construct an approximate solution method of finite difference schemes and shows its convergence to the exact solution, An algorithm solutions.

Keywords: equation geoelectric, flat border, corded power, direct problem, the only solution, the finite difference solution algorithm, convergence solutions.

Введение. Математические модели электродинамики, в том числе геоэлектрики выражаются системой уравнений Максвелла. В практических приложениях уравнений электродинамики во многих случаях используются в виде уравнений геоэлектрики.

В теоретических планах задач уравнений Максвелла исследована во многих источниках.

При рассмотрении обратных задач (определения коэффициентов, параметров уравнений или начальные условия), обычно, сперва устанавливают корректности решения (существование, единственность, устойчивость) прямых задач.

В данной работе установлена единственность и устойчивость решения двумерной прямой задачи геоэлектрики.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу определения *u (x,y,t)* из модельной задачи геолектрики

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\varepsilon}(z,y)\bar{\mu}(z,y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\bar{\sigma}(z,y)\bar{\mu}(z,y)\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta_{z,y}u(z,y,t)-\\ &-\nabla_{z,y}\ln\bar{\mu}(z,y)\nabla_{z,y}u(z,y,t),\quad t\in R_+,\ z\in R_+,\ y\in R,\\ &u(z,y,t)\,|_{t<0}\equiv 0,\quad z\in R_+,\quad y\in R,\\ &\frac{\partial u(z,y,t)}{\partial z}\,|_{z=0}=h(y)\delta(t)r(y)\theta(t),\quad t\in(0,T),\quad y\in(-D,D),\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

где, $\bar{\varepsilon}(z,y)$- диэлектрическая проницаемость, $\bar{\mu}(z,y)$ - магнитная проницаемость, $\bar{\sigma}(z,y)$ - электропроводимость среды $h(y)$, $r(y)$ - заданные функции, $\delta(y)$, $\theta(y)$ - дельта-функция Дирака и тета-функция Хевисайда соответственно.

Последнее граничное условие моделирует, так называемую, плоскую границу и шнуровой источник. Относительно коэффициентов уравнения $\bar{\varepsilon}(z,y),\bar{\mu}(z,y),\bar{\sigma}(z,y)$ и источника $h(y)$, $r(y)$ предположим, что выполнены

$$\bar{\varepsilon}(z,y),\quad \bar{\mu}(z,y),\quad \bar{\sigma}(z,y)\in\Lambda_1,\tag{2}$$

$$h(y), r(y)\in\Lambda_2.\tag{3}$$

Теорема 1. [3]. Если выполнены условия (2) и (3), то существует решение прямой задачи (1) и имеет производные до четвертого порядка включительно в области регулярности $\Omega(T,D)$.

$$\Lambda_1=\left\{\begin{matrix}\rho_1(x,y)\in C^6((0,d)\times(-D_1,D_1)),\ supu\{\rho_1(x,y)\}\subset((0,d)\times(-D_1,D_1)),\\ a=\|\rho_1\|_{C^2((0,d)\times(-D_1,D_1))},\quad a\langle\langle M_1\end{matrix}\right\},$$

$$\Lambda_2=\{supu\,h(y)\in(-D,D), h(y)\in C^5(-D,D)\},\quad 0<M_1,M_2,M_3,D_1,d=const.$$

$$D=D_1+T(M_2+a), T=2d/(M_1-a), \Omega(T,D)=\{(x,y,t): x\in(-T,T),\ y\in(-D,D),\quad |x|<t<T\}$$

2. Сведение к регулярной задаче с данными на характеристиках

Введем новую переменную:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_z^2(z,y)+\alpha_y^2(z,y)=\bar{\varepsilon}(z,y)\cdot\bar{\mu}(z,y),\\ &\alpha(z,y)\big|_{z=0}=0,\quad \alpha_z\big|_{z=0}=\bar{\varepsilon}(0,y)\cdot\bar{\mu}(0,y),\\ &\alpha_z>0,\quad \lim_{z\to\infty}\alpha(z,y)=\infty\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

и введем новые функции

$$\mu(\alpha,y)=\bar{\mu}(z,y),\quad \varepsilon(\alpha,y)=\bar{\varepsilon}(z,y),\ \sigma(\alpha,y)=\bar{\sigma}(z,y),\quad \vartheta(\alpha,y,t)=u(z,y,t)$$

Задача (4) называется задачей Эйконала.

Относительно функции $\alpha(z,y)$ пусть выполнены все условии предыдущего раздела. Задача (1) в терминах новых функций, после продолжения все функции по z на R_- четным образом, имеет вид

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \alpha^2}+L_1\vartheta(\alpha,y,t), \quad |\alpha|<t<T, \qquad y\in(-D,D),\\ &\vartheta\,|_{t=0}=0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t}\,|_{t=0}=\varepsilon(0,y)\mu(0,y)h(y)\delta(\alpha)+\\ &+\varepsilon(0,y)\mu(0,y)r(y)\theta(t),\\ &y\in(-D,D), \qquad |\alpha|<t<T,\\ &\vartheta\,|_{y=-D}=\vartheta\,|_{y=D}=0,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где $D=D_1+M_1T$ для всех $t\in[O,T]$.

$$L_1\vartheta(\alpha,y,t)=\frac{1}{\varepsilon(\alpha,y)\mu(\alpha,y)}\left[\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2}+\Delta\alpha\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}+\alpha_y\,\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\alpha\partial y}\right]-$$

$$-\frac{\mu_\alpha{}'(\alpha,y)}{\mu(\alpha,y)}\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}-\frac{1}{\varepsilon(\alpha,y)\mu(\alpha,y)}\left[\frac{\mu_\alpha{}'(\alpha,y)}{\mu(\alpha,y)}\alpha_y\,\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+\frac{\mu_y{}'(\alpha,y)}{\mu(\alpha,y)}\alpha_y\,\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}+\right.$$

$$\left.+\frac{\mu_y{}'(\alpha,y)}{\mu(\alpha,y)}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right]-\frac{\sigma(\alpha,y)}{\varepsilon(\alpha,y)}\frac{\partial\vartheta}{\partial t}.$$

По методике В. Г. Романова [4] представим решение задачи (5), для выделения регулярных и сингулярных частей решения, в виде:

$$\vartheta(\alpha,y,t)=S(\alpha,y)\theta(t-|\alpha|)+R(\alpha,y)\theta_1(t-|\alpha|)+\tilde{\vartheta}(\alpha,y,t), \tag{6}$$

где $\tilde{\vartheta}(\alpha,y,t)$- непрерывная функция.

Решение задачи (5) по формуле Даламбера будет

$$\vartheta(\alpha,y,t)=\frac{\varepsilon(0,y)\mu(0,y)h(y)}{2}\delta(t-|\alpha|)+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\alpha-t+\tau}^{\alpha+t-\tau}L_1\vartheta(\xi,y,\tau)d\xi d\tau.$$

Подставляя (6) в формулу Даламбера и приравнивая коэффициенты перед одинаковыми сингулярными частями, получим

$$S(\alpha,y)=\frac{h(y)\mu(o,y)\varepsilon(o,y)}{2}+\frac{1}{2}\int_{o}^{\alpha}\left\{\frac{1}{\varepsilon(\tau,y)\mu(\tau,y)}\left[\alpha_{y}S(\tau,y)+\Delta\alpha S(\tau,y)\right]-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{\mu'_{\tau}(\tau,y)}{\mu(\tau,y)}+\frac{\mu'_{y}(\tau,y)}{\mu(\tau,y)}\cdot\alpha_{y}\cdot\frac{1}{\varepsilon(\tau,y)\mu(\tau,y)}\right]*S(\tau,y)-\frac{\sigma(\tau,y)}{\varepsilon(\tau,y)}S(\tau,y)\right\}d\tau, \tag{7}$$

$$t\in[0,T], \qquad y\in(-D,D),$$

$$R(\alpha,y)=\frac{1}{2}\int_{0}^{\alpha}\frac{1}{\varepsilon(\tau,y)\mu(\tau,y)}\left\{S_{yy}-\frac{\mu'_{y}(\tau,y)}{\mu(\tau,y)}S_{y}-\right.$$

$$-\frac{\mu'_{\tau}(\tau,y)}{\mu(\tau,y)}\alpha_{y}S_{y}+\alpha_{y}R_{y}+\Delta\alpha R(\tau,y)-\left[\frac{\mu'_{\tau}}{\mu(\tau,y)}+\frac{\mu'_{y}(\tau,y)}{\mu(\tau,y)}*\right. \tag{8}$$

$$\left.\left.*\frac{1}{\varepsilon(\tau,y)\mu(\tau,y)}-\frac{\sigma(\tau,y)}{\varepsilon(\tau,y)}\right]*R(\tau,y)\right\}d\tau,\ \alpha\in[0,T], \qquad y\in(-D,D).$$

Существование решений последних уравнений (7), (8) можно найти в [2].

Из вышеизложенных, учитывая (6), получим следующую задачу с данными на характеристиках, эквивалентную к задаче (1):

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\alpha^2}+L_1\vartheta(\alpha,y,t),\ |\alpha|\langle t\langle T, \qquad y\in(-D,D),\\&\vartheta\,|_{|\alpha|=t}=S(t,y), \qquad t\in[0,T], \qquad y\in(-D,D),\\&\vartheta\,|_{y=-D}=\vartheta\,|_{y=+D}=0.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Здесь также можно получить следующие соотношения для дальнейшей раскладки

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\,|_{|\alpha|=t}=S_{y}(t,y), \qquad t\in[0,\mathrm{T}], \qquad y\in(-D,D),\\&\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\,|_{|\alpha|=t}=S_{t}(t,y)+R(t,y), \qquad t\in[0,T], \qquad y\in(-D,D),\\&\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\,|_{|\alpha|=t}=-sign\alpha R(t,y), \qquad t\in[0,T], \qquad y\in(-D,D).\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

3. Теорема единственности

Введем обозначения и норму

$$\Pi_{11}=\min_{|\alpha|<T}\min_{y\in(-D,D)}\{|\mu(\alpha,y)|,|\varepsilon(\alpha,y)|\},$$
$$\Pi_{12}=\max_{|\alpha|<T}\max_{y\in(-D,D)}\{|\mu'_{\alpha}(\alpha,y)|,|\mu'_{y}(\alpha,y)|\},$$
$$\Pi_{13}=\max_{|\alpha|<T}\max_{y\in(-D,D)}\{\sigma(\alpha,y)\}, \tag{11}$$
$$\Pi_{14}=\max_{z\in T}\max_{y\in(-D,D)}\{|\alpha_y|,|\alpha_{yy}|,|\Delta\alpha|\},$$
$$\|\vartheta\|^2(t)=\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\vartheta^2(\alpha,y,t)d\alpha dy,\quad t\in[0,T].$$

Теперь умножая каждый член уравнения (9) на $2\frac{\partial\vartheta}{\partial t}$ и интегрируя полученные по области $\Omega(T,D)$ можем получить следующие оценки

$$\|\vartheta\|_1^2(t)\le 2\|\vartheta\|_1^2(|\alpha|)+\frac{2\Pi_{14}}{\Pi_{11}^2}\int_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right\|(\tau)d\tau+$$
$$+\frac{2}{\Pi_{11}^2}\int_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right\|(\tau)d\tau+\frac{2\Pi_{14}}{\Pi_{11}^2}\int_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right\|(\tau)d\tau+$$
$$+\frac{2\Pi_{12}}{\Pi_{11}}\int_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right\|(\tau)d\tau+\frac{2\Pi_{12}\Pi_{14}}{\Pi_{11}^3}\int_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right\|(\tau)d\tau+$$
$$+\frac{2\Pi_{12}\Pi_{14}}{\Pi_{11}^3}\int_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right\|(\tau)d\tau+\frac{2\Pi_{12}}{\Pi_{11}^3}\int_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right\|(\tau)d\tau+$$
$$+\frac{2\Pi_{13}}{\Pi_{11}}\int_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right\|^2(\tau)d\tau, \tag{12}$$

ãäå

$$\|\vartheta\|_1^2(t)=\|\vartheta_t\|^2(t)+\|\vartheta_\alpha\|^2+\frac{1}{\Pi_{11}^2}\|\vartheta_y\|^2(t)+\frac{\Pi_{14}}{\Pi_{11}}\|\vartheta_\alpha\vartheta_y\|(t).$$

Оценим интеграл

$$\int_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right\|(\tau)d\tau\le\int_{|\alpha|}^{t}\left[\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right\|^2+\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right\|^2\right](\tau)d\tau\le\int_{|\alpha|}^{t}\|\vartheta\|_1^2(\tau)d\tau.$$

Остальные интегралы также оценивая таким же образом и используя формулу Гроноулла-Беллмана [1] из неравенства (12)

$$\|\vartheta\|_1^2(t)\le\|\vartheta\|_1^2(|\alpha|)\cdot\exp\left[\left(6\frac{\Pi_{14}}{\Pi_{11}^2}+\frac{2}{\Pi_{11}^2}+\frac{4\Pi_{12}\Pi_{14}}{\Pi_{11}^3}+\frac{2\Pi_{12}}{\Pi_{11}}+\frac{2\Pi_{13}}{\Pi_{11}}\right)t\right].$$

Также используя энергетические неравенства для гиперболических уравнений [5], из последнего неравенства получим

$$\max_{|\alpha|\le\tau\le t\le T}\left\{\|\vartheta\|_2^2(\tau)\right\}\le\left\{\|\vartheta\|_2^2|\alpha|\right\}*$$

$$*\exp\left[\left(\frac{7\Pi_{14}}{\Pi_{11}^2}+\frac{3}{\Pi_{11}^2}+\frac{4\Pi_{12}\Pi_{14}}{\Pi_{11}^3}+\frac{2\Pi_{12}}{\Pi_{11}}+\frac{2\Pi_{13}}{\Pi_{11}}\right)t\right],$$

$$где \qquad \|\vartheta\|_2^2(t)=\left(\|\vartheta\|^2+\|\vartheta_t\|^2+\|\vartheta_\alpha\|^2+\|\vartheta_y\|^2\right)(t).$$

Теорема 2. Пусть функции $\mu(\alpha,y),\ \varepsilon(\alpha,y),\ \sigma(\alpha,y),\ \Delta y,\ \Delta\alpha$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка и пусть решение задачи (9) существует и принадлежит в $C^2(\Omega(T,D))$ и выполнено (4). Тогда решение задачи (9) единственно в области $\Omega(T,D)$ и имеет оценка

$$\max_{|\alpha|\le t\le T}\left\{\|\vartheta\|_2^2(t)\right\}\le\|\vartheta\|_2^2(|\alpha|)*\exp(\Pi_{15}t),$$

$$где \qquad \Pi_{15}=\frac{7\Pi_{14}}{\Pi_{11}^2}+\frac{3}{\Pi_{11}^2}+\frac{4\Pi_{12}\Pi_{14}}{\Pi_{11}^3}+\frac{2\Pi_{12}}{\Pi_{11}}+\frac{2\Pi_{13}}{\Pi_{11}}. \qquad (13)$$

Из эквивалентности задач (9) и (1) следует, что решение задачи (1) также единственно в области $\Omega(T,D)$, при выполнении условии теоремы 2.

4. Конечно-разностное решение

Введем сеточную область, используя монографии А. А. Самарского [5] и получим конечно-разностный аналог дифференциальной задачи (9).

Заменим дифференциальную задачу разностной задачей

$$\left.\begin{aligned}
&V_{t\bar t}=V_{\alpha\bar\alpha}+L_1V_{ij}^k,\quad (ih_1,jh_2,k\tau)\in\Omega_{ij}^k,\\
&V_{\pm i,j}^{|2i|}=S_j^{|2i|},\quad i=\overline{-N,N};\quad j=\overline{-L,L},\\
&V_{i,L}^k=V_{i,-L}^k=0,\quad i=\overline{-N,N};\ k=\overline{|2i|,2N},
\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

$$где \quad L_1V_{ij}^k=\frac{1}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}}\left[V_{y\bar y}+\alpha_{ij}V_{\alpha\bar y}+\Delta\alpha_{ij}V_{\overset{0}{\alpha}}\right]-\frac{(\mu_{ij})_{\overset{0}{\alpha}}}{\mu_{ij}}V_{\overset{0}{\alpha}}-$$

$$-\frac{1}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}}\left[\frac{(\mu_{ij})_{\overset{0}{\alpha}}}{\mu_{ij}}\alpha_{ij}V_{\overset{0}{y}}+\frac{(\mu_{ij})_{\overset{0}{y}}}{\mu_{ij}}\alpha_{ij}V_{\overset{0}{\alpha}}+\frac{(\mu_{ij})_{\overset{0}{y}}}{\mu_{ij}}V_{\overset{0}{y}}\right]-\frac{\sigma_{ij}}{\varepsilon_{ij}}V_{\overset{0}{t}}.$$

Введем обозначения и норму

$$\Pi_{15}=\min_{i=-N,N}\min_{j=-L,L}\left\{|\mu_{ij}|,|\varepsilon_{ij}|\right\},\qquad \Pi_{16}=\max_{i=-N,N}\max_{j=-L,L}\left\{|(\alpha_{ij})_{\bar y}|,|\Delta\alpha_{ij}|\right\},$$

$$\Pi_{17}=\max_{i=-N,N}\max_{j=-L,L}\left\{|\mu_{ij}|_\alpha,|\mu_{ij}|_{\overset{0}{y}}\right\},\qquad \Pi_{18}=\min_{i=-N,N}\min_{j=-L,L}\left\{|(\alpha_{ij})_{\bar y}|,|\Delta\alpha_{ij}|\right\},$$

$$\Pi_{19}=\max_{i=-N,N}\max_{j=-L,L}\left\{|\mu_{ij}|,|\varepsilon_{ij}|\right\},\qquad \Pi_{20}=\max_{i=-N,N}\max_{j=-L,L}\left\{|\sigma_{ij}|_\alpha\right\},$$

$$\|V\|^2(i,k)=h_1h_2\sum_{i=-L+1}^{L-1}\sum_{i=-N+2}^{N-2}\left(V_{ij}^k\right)^2 .$$

Каждый член уравнения (14) умножая на $\left(V_t+V_{\bar t}\right)$ и используя полученные оценки [6] предыдущего раздела получим оценку

$$\begin{aligned}
&\left(\|V_{\bar t}\|^2+\|V_\alpha\|^2+\frac{1}{\Pi_{19}^2}\|V_y\|^2\right)(i,2N)\le\left(\|V_{\bar t}\|^2+\|V_\alpha\|^2+\frac{1}{\Pi_{15}^2}\|V_y\|^2\right)(i,|2i|+3)+\\
&+\|\Gamma\|_3^2(i,|2i|+3)+\frac{\tau}{h_1}\left[\|V_\alpha\|^2+\|V_{\bar t}\|^2\right](i,2N)+\frac{\tau}{h_1}\left[\|V_\alpha\|^2+\|V_{\bar t}\|^2\right](i,|2i|+3)+\\
&+\frac{\tau}{h_2\Pi_{15}^2}\left[\|V_y\|^2+\|V_{\bar t}\|^2\right](i,2N)+\frac{\tau}{h_2\Pi_{15}^2}\left[\|V_\alpha\|^2+\|V_{\bar t}\|^2\right](i,|2i|+3)+\\
&+\frac{\Pi_{18}}{\Pi_{19}^2}\left[\|V_\alpha\|^2+\frac{\tau}{h_1}\|V_{\bar t}\|^2+\left(1+\frac{\tau}{h_1}\right)\|V_y\|^2\right](i,2N)+\\
&+\frac{\Pi_{16}}{\Pi_{15}^2}\left[\|V_\alpha\|^2+\frac{\tau}{h_1}\|V_{\bar t}\|^2+\left(1+\frac{\tau}{h_1}\right)\|V_y\|^2\right](i,|2i|+3)+\\
&+\frac{\tau}{\Pi_{15}^2}\sum_{k=|2i|+3}^{2N}\left[\|V_{\bar t}\|^2+\|V_y\|^2\right](i,k)+3\tau\frac{\Pi_{16}}{\Pi_{15}^2}\sum_{k=|2i|+3}^{2N}\left[\|V_{\bar t}\|^2+\|V_\alpha\|^2\right](i,k)+\\
&+\frac{\tau}{\Pi_{15}^2}\sum_{k=|2i|+3}^{2N}\left[\|V_{\bar t}\|^2+\|V_y\|^2\right](i,k)+\frac{\tau\Pi_{17}}{\Pi_{15}^2}\sum_{k=|2i|+3}^{2N}\left[\|V_{\bar t}\|^2+\|V_\alpha\|^2\right](i,k)+\\
&+\frac{\tau\Pi_{16}\Pi_{17}}{\Pi_{15}^3}\sum_{k=|2i|+3}^{2N}\left[\|V_{\bar t}\|^2+\|V_y\|^2\right](i,k)+\frac{\tau\Pi_{16}\Pi_{17}}{\Pi_{15}^3}\sum_{k=|2i|+3}^{2N}\left[\|V_{\bar t}\|^2+\|V_\alpha\|^2\right](i,k)+\\
&+\frac{\tau\Pi_{17}}{\Pi_{15}^3}\sum_{k=|2i|+3}^{2N}\left[\|V_{\bar t}\|^2+\|V_y\|^2\right](i,k)+\frac{2\tau\Pi_{20}}{\Pi_{15}}\sum_{k=|2i|+3}^{2N}\left[\|V_{\bar t}\|^2\right](i,k),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\|\Gamma\|_3^2(i,|2i|+3)=\frac{\tau}{h_1}\Bigg\{&\rangle\sum_{i=0}^{-N+2}\left(\|V_\alpha\|^2+\|V_{\bar t}\|^2\right)(i,|2i|+3)+\\
&+\rangle\sum_{i=0}^{N-2}\left(\|V_\alpha\|^2+\|V_{\bar t}\|^2\right)(i,|2i|+4)+\rangle\sum_{i=-N+2}^{-1}\left(\|V_\alpha\|^2+\|V_{\bar t}\|^2\right)(i,|2i|+1)+\\
&+\rangle\sum_{i=1}^{-N+2}\left(\|V_\alpha\|^2+\|V_{\bar t}\|^2\right)(i,|2i|+3)\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Собирая одинаковые нормы из последней имеем оценку

$$\left[1-\frac{\tau}{h_1}-\frac{\tau}{h_2\ddot{I}_{15}^{\,2}}-\frac{\tau}{h_1}\frac{\ddot{I}_{18}}{\ddot{I}_{19}^{\,2}}\right]\left\|V_{\bar{\imath}}\right\|^2(i,2N)+\left[1-\frac{\tau}{h_1}-\frac{\ddot{I}_{18}}{\ddot{I}_{19}^{\,2}}\right]\left\|V_{\alpha}\right\|^2(i,2N)+$$

$$+\left[\frac{1}{\ddot{I}_{19}^{\,2}}-\frac{\tau}{h_2\ddot{I}_{15}^{\,2}}-\frac{\ddot{I}_{18}}{\ddot{I}_{19}^{\,2}}-\frac{\tau}{h_1}\frac{\ddot{I}_{18}}{\ddot{I}_{19}^{\,2}}\right]\left\|V_y\right\|^2(i,2N)\le\left\|\tilde{A}\right\|_3^2(i,|2i|+3)+$$

$$+\left[1+\frac{\tau}{h_1}+\frac{\tau}{h_2\ddot{I}_{15}^{\,2}}+\frac{\tau}{h_1}\frac{\ddot{I}_{16}}{\ddot{I}_{15}^{\,2}}\right]\left\|V_{\bar{\imath}}\right\|^2(i,|2i|+3)+\left[1+\frac{\tau}{h_1}+\frac{\ddot{I}_{16}}{\ddot{I}_{15}^{\,2}}\right]\left\|V_{\alpha}\right\|^2(i,|2i|+3)+$$

$$+\left[\frac{1}{\ddot{I}_{15}^{\,2}}+\frac{\tau}{h_2\ddot{I}_{15}^{\,2}}+\frac{\ddot{I}_{16}}{\ddot{I}_{15}^{\,2}}+\frac{\tau\ddot{I}_{16}}{h_1\ddot{I}_{15}^{\,2}}\right]\left\|V_y\right\|^2(i,|2i+3|)+ \tag{15}$$

$$+\left[\frac{2\tau}{\ddot{I}_{15}^{\,2}}+\frac{3\tau\ddot{I}_{16}}{\ddot{I}_{15}^{\,2}}+\frac{\tau\ddot{I}_{17}}{\ddot{I}_{15}}+\frac{2\tau\ddot{I}_{16}\ddot{I}_{17}}{\ddot{I}_{15}^{\,3}}+\frac{\tau\ddot{I}_{17}}{\ddot{I}_{15}^{\,3}}+\frac{2\tau\ddot{I}_{20}}{\ddot{I}_{15}}\right]*$$

$$*\sum_{k=|2i|+3}^{2N}\left\|V\right\|_1^2(i,k),$$

Обозначим $\left\|V\right\|_1^2(i,k)=\left(\left\|V_t\right\|^2+\left\|V_{\alpha}\right\|^2+\left\|V_y\right\|^2\right)(i,k)$.

Здесь выберем произвольные постоянные p_7, p_8 таким образом, чтобы выполнялось следующее условие

$$p_7\ge\left\{\left[1-\frac{\tau}{h_1}-\frac{\tau}{h_2\Pi_{15}^2}-\frac{\tau}{h_1}\frac{\Pi_{18}}{\Pi_{19}^2}\right],\left[1-\frac{\tau}{h_1}-\frac{\Pi_4}{\Pi_5^2}\right],\right.$$

$$\left.\left[\frac{1}{\Pi_{19}^2}-\frac{\tau}{h_2\Pi_{15}^2}-\frac{\Pi_{18}}{\Pi_{19}^2}-\frac{\tau}{h_1}\frac{\Pi_{18}}{\Pi_{19}^2}\right]\right\}\ge p_8>0.$$

Отсюда получим оценку

$$\left\|V\right\|_1^2(i,2N)\le\frac{1}{p_8}\left\|\Gamma\right\|_3^2(i,|2i|+3)+\frac{p_9}{p_8}\left\|V\right\|_1^2(i,|2i|+3)+\frac{\tau p_{10}}{p_8}\sum_{k=|2i|+3}^{2N}\left\|V\right\|_1^2(i,k), \tag{16}$$

здесь

$$p_9=\max\left\{\left[1+\frac{\tau}{h_1}+\frac{\tau}{h_2\Pi_{15}^2}+\frac{\tau}{h_1}\frac{\Pi_{18}}{\Pi_{19}^2}\right],\left[1+\frac{\tau}{h_1}+\frac{\Pi_{18}}{\Pi_{19}^2}\right],\right.$$

$$\left.\left[\frac{1}{\Pi_{19}^2}+\frac{\tau}{h_2\Pi_{15}^2}+\frac{\Pi_{18}}{\Pi_{19}^2}+\frac{\tau\Pi_{18}}{h_1\Pi_{19}^2}\right]\right\},$$

$$p_{10}=\left[\frac{2}{\Pi_{15}^2}+\frac{3\Pi_{16}}{\Pi_{15}^2}+\frac{\Pi_{17}}{\Pi_{15}}+\frac{2\Pi_{16}\Pi_{17}}{\Pi_{15}^3}+\frac{\Pi_{17}}{\Pi_{15}^3}+\frac{2\Pi_{20}}{\Pi_{15}}\right].$$

Отсюда можно получить оценку

$$\|V\|^2(i,2N)\le 2\|V\|\ (i,|2i+3|)+4N\tau^2\sum_{k=|2i|+4}^{2N}\left\|V_{\bar t}\right\|^2(i,k). \tag{17}$$

Из неравенств (16) и (17) следует

$$\|V\|_2^2(i,2N)\le\frac{1}{p_8}\|\Gamma\|_3^2(i,|2i|+3)+\frac{p_9}{p_8}\|V\|_1^2(i,|2i|+3)+$$

$$+2\|V\|^2(i,|2i|+3)+\left[\frac{\tau p_{10}}{p_8}+4N\tau^2\right]\sum_{k=|2i|+3}^{2N}\|V\|_2^2(i,k), \tag{18}$$

где $\|V\|_2^2(i,k)=\|V\|_1^2(i,k)+\|V\|^2(i,k)$.

Обозначим через $p_{11}=\max\left\{2,\dfrac{p_9}{p_8},\dfrac{1}{p_8}\right\}$ и используя дискретный аналог неравенства Гронуолла – Беллмана [4], из последнего неравенства получим

$$\|V\|_2^2(i,2N)\le\delta_{11}\left[\|\tilde A\|_3^2(i,|2i|+3)+\|V\|_2^2(i,|2i|+3)\right]*\exp\left[\left(\frac{\tau\delta_{10}}{\delta_8}+4N\tau^2\right)\tau\right]. \tag{19}$$

Пусть ϑ_{ij}^k - точное сеточное решение задачи (14) тогда для него также можно получить оценку (19) с малым членом $O(h_1^2+h_2^2+\tau^2)$.

Отсюда следует

$$\|\vartheta-V\|(i,2N)\le p_{12}\left(5\tau^2+h_2^2\right),\qquad h_1=2\tau,$$

$$\text{здесь}\qquad p_{12}=\exp\left[\left\{\frac{p_{10}T^2}{p_8}+2T^3\right\}\|\vartheta\|_{C^4(\Omega(T,D))}/12\right]. \tag{20}$$

Таким образом, доказана теорема

Теорема 3. Пусть решение задачи (9) существует и $\vartheta(\alpha,y,t)\in C^4(\Omega(T,D))$ и выполнены условия (2), (3), (4). Тогда существует $C_3>0$ такое, что решение конечно – разностной задачи (4) сходится к точному решению задачи (9) со скоростью порядка $O\left(h_1^2+h_2^2+\tau^2\right)$ в классе $W_2^1(\Omega(T,D))$ при $\dfrac{\tau}{h_2}<C_3$ и справедлива оценка сходимости (20). C_3 – зависит только от нормы коэффициентов уравнения.

Из эквивалентности задач (9) и (1) следует, что приближенное конечно-разностное решение задачи (14) также сходится к точному решению (1) со скоростью порядка $O(h^2+h_2^2+\tau^2)$ в классе $W_2^1(\Omega(T,D))$, где h – шаг по z, при выполнении условии теоремы 3.

Вывод. Доказана теорема единственности поставленной задачи. Построено конечно-разностное решение задачи и обоснована сходимость этого решения к точному решению. Эту методику можно произвести для других задач волновых процессов.

Список литературы

1. Беккенбах Э. Неравенства / Э.Беккенбах, Р. Беллман– М.: Мир, 2007.
2. Кабанихин С. И. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений/ С. И. Кабанихин– Новосибирск: Наука, 1988. – 166 с.
3. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики /О. А.Ладыженская– М.: Наука, 1983.
4. Романов В. Г. Устойчивость в обратных задачах /В. Г Романов.– М.: Научный мир, 2005.
5. Самарский А. А. Теория разностных схем/ А. А. Самарский – М.: Наука, 1977.
6. Сатыбаев А. Дж. Конечно-разностное решение прямой задачи геоэлектрики с плоской границей/ А. Дж. Сатыбаев // Межрегиональная научно-техническая конференция «Кыргызская государственность и проблема межкультурного диалога». Сборник научных трудов.-2003. Вып. 3. – С. 172-175.
7. Смирнов В. И. Курс высшей математики /В. И. Смирнов.- М.- 1974.-Т. 4.- Ч. 2. – 525 с.

УДК 622.02 (075.8)

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ СТРУКТУРНО-МЕХАНИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Тажибаев Кушбакали Тажибаевич, *д.т.н, проф., заведующий лаборатории Института геомеханики и освоения недр НАН КР, Кыргызстан, 720052, г.Бишкек,ул. Медерова 98, e-mail: kushbak@yandex.ru*
Султаналиева Рая Мамакеевна, *к.ф-м.н, проф. КГТУ им.И.Раззакова, Кыргызстан, 720044, г.Бишкек, пр.Мира 66, e-mail: raia-ktu@mail.ru*
Конушбаева Айнур Токтосуновна, *ст.преп. каф. «Физика» КГТУ им. И.Раззакова, Кыргызстан, 720044, г.Бишкек, пр.Мира 66, e-mail: aikat80@mail.ru*

Для анализа изменения остаточных структурных напряжений, разработана структурно-механическая модель напряженно-деформированного состояния неоднородной твердой среды. Модель предназначена для описания изменения остаточных (структурных) напряжений, существующих на различных структурных уровнях горных пород (кристаллическая решетка, кристаллическая отдельность, блок мозаики, зерно). Проведены сравнения остаточных напряжений измеренных рентгенографическим методом отдельных минералов горных пород с изменениями в модели. Экспериментальные данные достаточно хорошо согласуются с изменениями напряжений в модели.

Ключевые слова: остаточные напряжения, структурно-механическая модель, неоднородное твердое тело, горная порода, минерал.

INVESTIGATION OF OF RESIDUAL STRESSES ON THE BASIS OF STRUCTURAL-MECHANICAL MODEL

Tajibayev Kushbakali Tajibaevich, *doctor of Technical Sciences, prof., head of laboratory of the Institute of Geomechanics and development of mineral resources of the NAS KR, Kyrgyzstan, 720052, c.Bishkek, str. Mederova 98, e-mail: kushbak@yandex.ru*
Sultanalieva Raia Mamakeevna, *candidate of Physical and Mathematical Sciences, prof. the Kyrgyz State Technical University named after I.Razzakov, c. Bishkek, Mira 66, e-mail: raia-ktu@mail.ru*
Konushbaeva Ainur Toktosunovna*, senior lecturer department of Physics the Kyrgyz State Technical University named after I.Razzakov, c. Bishkek, Mira 66, e-mail: aikat80@mail.ru*