6. Петриченко Р.М. Физические основы внутрицилиндровых процессов в двигателях внутреннего сгорания: Учебное пособие /Р.М.. Петриченко Л.-Изд-во Ленингр. ун-та.- 1983.- 244 с.

7. Chung T. J. Computational Fluid Dynamics. Cambridge University Press, 2002 - p. 1012.

8. Issakhov A. Large eddy simulation of turbulent mixing by using 3D decomposition method. Issue 4 // J. Phys.: Conf. Ser. 318. pp. 1282-1288. -2011. doi:10.1088/1742-6596/318/4/042051.

9. Issakhov A. Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant // International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation, 16(5). -2015, -229-238 pp., doi:10.1515/ijnsns-2015-0047.

10. Issakhov A. Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant under various operational capacities // Applied Mathematical Modelling (2015), Volume 40, Issue 2, -2016, - 1082-1096 pp. http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2015.06.024.

11. Zhapbasbaev U.K., Makashev E.P. Diffusion combustion of a system of plane supersonic hydrogen jets in a supersonic flow. Combustion explosion and shock waves. 39(4), pp. 415-422.

УДК 519.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХФАЗНОГО НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОНЦЕПЦИИ ГЛОБАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ НАГНЕТАНИЯ ПАРА

Жумагулов Бакытжан Турсынович, *д.т.н., профессор, Национальная инженерная академия Республики Казахстан, Казахстан, 050000, г. Алматы, ул. Богенбай батыра, 80,*
e-mail: nia_rk@mail.ru
Темирбеков Нурлан Муханович, *д.ф-м.н., профессор, Казахстанский инженерно-технологический университет, Казахстан, 050060, г. Алматы, пр. аль-Фараби, 93 Г/5,*
e-mail: temirbekov@rambler.ru
Байгереев Досан Ракимгалиевич, *Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева, Казахстан, 070000, г. Усть-Каменогорск, ул. Серикбаева 19,* e-mail: dbaigereyev@gmail.com

Работа посвящена моделированию трехфазных неизотермических течений в пористой среде с использованием концепции глобального давления, позволяющей исключить градиенты капиллярных давлений из уравнения для давления с помощью введения замены переменных – глобального давления. Приведена новая постановка данной задачи относительно глобального давления, температуры и двух насыщенностей. Получена априорная оценка для решения разностной задачи. Рассматривается модельная задача оптимального управления для изучаемой модели, которая заключается в минимизации отклонения температуры пласта от заданного распределения температуры к определенному моменту времени разработки посредством управления массового расхода теплоносителя на нагнетательных скважинах. Применен градиентный метод для решения поставленной задачи оптимального управления.

Ключевые слова: трехфазная неизотермическая фильтрация, метод конечных разностей, априорная оценка, оптимальное управление, градиентный метод.

MODELING OF THREE-PHASE NON-ISOTHERMAL FLOW IN POROUS MEDIA USING THE CONCEPT OF GLOBAL PRESSURE

***Zhumagulov Bakytzhan T.**, Dr. Tech., Prof., National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan, Kazakhstan, 050000, Almaty, Bogenbay batyr, 80,* e-mail: nia_rk@mail.ru
***Temirbekov Nurlan M.**, Dr. Phys. Math..,Prof., Kazakhstan Engineering Technological University, Kazakhstan, 050060, Almaty, al-Farabi ave., 93 G/5,* e-mail: temirbekov@rambler.ru
***Baigereyev Dossan R.**, D. Serikbayev East Kazakhstan State Technical University, Kazakhstan, 070000, Ust-Kamenogorsk, Serikbayev 19,* e-mail: dbaigereyev@gmail.com

This paper is devoted to modeling of three-phase non-isothermal flows in porous media using the concept of global pressure allowing to exclude gradients of capillary pressures from the equations for pressure with the use of introduction of change of variables called global pressure. A new formulation of the considered problem regarding global pressure, temperature and two saturations is presented. A priori estimate is obtained for the solution of the difference problem. A model optimal control problem is considered for the studied model which is to minimize the deviation of the reservoir temperature from the given reference temperature by a particular time of development with the use of controlling mass flow of steam on injection wells. A gradient method is used to solve the optimal control problem.

Keywords: three-phase non-isothermal flow, finite difference method, a priori estimate, optimal control, gradient method.

В последнее время изучению трехфазных неизотермических потоков в пористой среде уделяется большое внимание в связи с их значимостью в различных промышленных задачах, в частности, при моделировании процессов, протекающих в нефтяных пластах при разработке месторождений тяжелой нефти. Технология паротеплового воздействия на нефтяные пласты получила широкое распространение в качестве метода добычи трудноизвлекаемых запасов тяжелой нефти, при котором увеличение нефтеотдачи достигается за счет прогрева пласта, способствующего уменьшению вязкости нефти, увеличению ее подвижности и др. Однако, вследствие довольно высокой стоимости этой технологии и высокой энергоемкости, большое практическое значение имеют исследования, направленные на повышение ее эффективности.

Целью данной статьи является моделирование трехфазных неизотермических потоков в пористой среде на основе введения замены переменных для исключения градиентов капиллярных давлений из уравнения для давления, а также численное решение модельной задачи оптимального управления для рассматриваемой модели, которая заключается в минимизации отклонения температуры пласта от заданного распределения температуры к определенному времени разработки, посредством управления массового расхода теплоносителя на нагнетательных скважинах.

В области $\Omega=[0,l]\times[0,l]$ рассматривается задача трехфазной неизотермической фильтрации несмешивающихся жидкостей с учетом капиллярных сил и фазовых переходов в пароводяной системе [3, 10]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho_\alpha s_\alpha)+\nabla\cdot(\rho_\alpha\vec{u}_\alpha)+\mathrm{I}_\alpha=\rho_\alpha q_\alpha,\ \alpha=w,o,g, \tag{1}$$

$$\vec{u}_\alpha=-\frac{kk_\alpha}{\mu_\alpha}\nabla(p_\alpha-\rho_\alpha\vec{g}),\ \alpha=w,o,g, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\sum_\alpha\rho_\alpha s_\alpha U_\alpha+(1-\phi)\rho_r U_r\right)+\nabla\cdot\sum_{\alpha=w,o,g}\rho_\alpha\vec{u}_\alpha i_\alpha-\nabla\cdot(k_h\nabla T)=q_T, \tag{3}$$

$$s_w+s_o+s_g=1, \tag{4}$$

$$p_{ow} = p_o - p_w,\ p_{go} = p_g - p_o, \tag{5}$$

$$\rho_\alpha = \rho_\alpha(p_\alpha, T),\ \alpha = w,o,g, \tag{6}$$

где нижними индексами w,o,g,r обозначены фазы воды, нефти, теплоносителя и порода; $\phi(x)$ и K - пористость и проводимость среды, $x \in \Omega$; p_α, s_α, ρ_α, k_α, μ_α, i_α, U_α - соответственно, давление, насыщенность, плотность, относительная фазовая проницаемость, вязкость, энтальпия и внутренняя энергия фазы α; k_h - коэффициент теплопроводности; q_α и q_T - соответственно, функции источников/стоков и тепловой дебит; $\vec{u}_\alpha$ - вектор скорости фильтрации, I_α - интенсивность фазовых переходов и время t изменяется на некотором отрезке $[0,t_1]$. Уравнения (1)-(6) дополняются начальными и граничными условиями:

$$T(x,0) = T_0,\ p_w(x,0) = p_0,\ s_\alpha(x,0) = s_{\alpha 0},\ \alpha = w,o,\ s_g(x,0) = 0,\ x \in \Omega, \tag{7}$$

$$\vec{u}\,|_{\partial\Omega} = 0,\ \left.\frac{\partial T}{\partial \vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0. \tag{8}$$

Особенность данной модели заключается в неограниченном росте градиентов капиллярных давлений (5), когда насыщенности приближаются к соответствующим остаточным значениям. В работах [1, 6] предложен новый подход решения задачи двухфазной изотермической фильтрации, идея которого состоит во введении новой переменной - глобального давления по формуле

$$p = p_o - \int_{s_w}^{1} \frac{\lambda_w}{\lambda_w + \lambda_o} \frac{\partial p_c}{\partial s_w} d\xi,\ \lambda_\alpha = \frac{k_\alpha}{\mu_\alpha}.$$

Данный подход состоит в том, чтобы заменить трехфазный поток потоком некоторой фиктивной жидкости, движение которой описывается законом Дарси. Численному решению задачи изотермической фильтрации с помощью введения глобального давления посвящено множество исследований. Исследования показывают, что указанный подход может быть успешно применен для моделирования двухфазного сжимаемого [8], трехфазного сжимаемого [7], многокомпонентного сжимаемого [4], неизотермического двухфазного несжимаемого [9] потока, а также для случая пористой среды с разрывом [5]. В работе [7] показано, что с вычислительной точки зрения решение задачи трехфазной фильтрации с использованием глобального давления является более эффективным, чем системы с фазовым давлением. В работе [10] указанный подход обобщен для задачи трехфазной неизотермической фильтрации, при этом глобальное давление определено в виде

$$p = p_o + \int_1^{s_w} \left[-\theta_w(\eta,0,p,T)\frac{\partial p_{ow}}{\partial s_w}(\eta,0) + \theta_g(\eta,0,p,T)\frac{\partial p_{go}}{\partial s_w}(\eta,0) \right] d\eta +$$

$$+ \int_0^{s_g} \left[-\theta_w(s_w,\eta,p,T)\frac{\partial p_{ow}}{\partial s_g}(s_w,\eta) + \theta_g(s_w,\eta,p,T)\frac{\partial p_{go}}{\partial s_g}(s_w,\eta) \right] d\eta. \tag{9}$$

В результате исходная система уравнений (1)-(6) сведена к системе уравнений относительно глобального давления p, температуры T и двух насыщенностей s_w, s_o:

$$c_T \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T - \nabla \cdot (k_h \nabla T) = f_T, \tag{10}$$

$$\beta_p \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot (k_p \nabla p) - \beta_T \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (k_T \nabla T) = f_p, \tag{11}$$

$$\frac{\partial s_w}{\partial t} - \nabla \cdot (\omega \nabla s_w) - \nabla \cdot (\nu_w \nabla (p - p_c)) = f_w, \tag{12}$$

$$\frac{\partial s_o}{\partial t} - \nabla \cdot (\nu_o \nabla (p - p_c)) = f_o, \tag{13}$$

$$\vec{u} = \rho_w c_w \vec{u}_w + \rho_o c_o \vec{u}_o + \rho_g c_g \vec{u}_g, \tag{14}$$

где

$$c_T = \phi\rho_v + (1-\phi)\rho_r c_r,\; k_p = K\lambda\gamma,\; k_T = K\lambda\xi,\; \omega = -\nu_\alpha \frac{\partial p_{ow}}{\partial s_w},\; \nu_a = \frac{Kk_\alpha}{\mu_a},$$

$$\gamma = 1 - \frac{\partial p_c}{\partial p},\; \xi = 1 - \frac{\partial p_c}{\partial T}.$$

Исследуем более подробно задачу без учета капиллярных сил. Прямыми вычислениями можно убедиться в том, что в этом случае $k_T \equiv 0$, $p_c \equiv 0$, $\omega \equiv 0$, $\xi \equiv 0$. Поставим в соответствие данной задаче разностную схему

$$c_T T_t + \Lambda_1 \hat{T} = f_T, \tag{15}$$

$$p_t + \Lambda_2 \hat{p} = \beta_T T_t + f_p, \tag{16}$$

$$s_{\alpha,t} + \Lambda_{3\alpha}\hat{p} = f_\alpha,\; \alpha = w,o \tag{17}$$

$$T_i^0 = T_0,\; p_i^0 = p_0,\; s_{\alpha,i}^0 = s_{\alpha 0}, \tag{18}$$

где $\Lambda_1 = \Lambda_1^{(1)} + \Lambda_1^{(2)}$, $\Lambda_2 = \Lambda_2^{(1)} + \Lambda_2^{(2)}$, $\Lambda_{3\alpha} = \Lambda_{3\alpha}^{(1)} + \Lambda_{3\alpha}^{(2)}$,

$$\Lambda_1^{(m)} w = \begin{cases} -\frac{1}{2}\left(\lambda \breve{p}_{\bar{x}m}\right)^{(+1_m)} w_{x_m} - \frac{2}{h}\breve{k}_h^{(+1_m)} w_{x_m}, & x_m = 0, \\ -\frac{1}{2}\left(\lambda \breve{p}_{\bar{x}m}\right)^{(+1_m)} w_{x_m} - \frac{1}{2}\left(\lambda \breve{p}_{\bar{x}m}\right) w_{\bar{x}m} - \left(\breve{k}_h w_{\bar{x}m}\right)_{x_m}, & x_m \in \omega_m, \\ -\frac{1}{2}\left(\lambda \breve{p}_{\bar{x}m}\right) w_{\bar{x}m} + \frac{2}{h}\breve{k}_h w_{\bar{x}m}, & x_m = l, \end{cases}$$

$$\Lambda_2^{(m)} w = \begin{cases} -\frac{2}{h}\breve{k}_p^{(+1_m)} w_{x_m}, & x_m = 0, \\ -\left(\breve{k}_p w_{\bar{x}m}\right)_{x_m}, & x_m \in \omega_m, \\ \frac{2}{h}\breve{k}_p w_{\bar{x}m}, & x_m = l, \end{cases} \quad \Lambda_{3\alpha}^{(m)} w = \begin{cases} -\frac{2}{h}\breve{\nu}_\alpha^{(+1_m)} w_{x_m}, & x_m = 0, \\ -\left(\breve{\nu}_\alpha w_{\bar{x}m}\right)_{x_m}, & x_m \in \omega_m, \\ \frac{2}{h}\breve{\nu}_\alpha w_{\bar{x}m} & x_m = l, \end{cases}$$

где использованы обозначения из [11]. Имеет место следующая теорема:

Теорема 1 [11]. При выполнении условий

$$c_0 \le \left(c_T, \lambda, k_h, k_p, \beta_T, \nu_\alpha, \psi_\alpha, \rho_*\right) \le c_1, \tag{19}$$

$$2 - \frac{1}{c_0}\left\|\hat{T}\right\|_C \sum_{m=1}^{2} \left\|u_m\right\|_C^2 > 0 \tag{20}$$

для решения разностной задачи (15)-(18) выполняется неравенство

$$E^{n+1} \le E^0 + M\left(\left\|f_w\right\|_{-1}^2 + \left\|f_o\right\|_{-1}^2 + \left\|f_T\right\|_{-1}^2 + \left\|f_p\right\|_{-1}^2\right) \tag{21}$$

где $E^n = \left\|T^n\right\|_1^2 + \left\|p^n\right\|_1^2 + \left\|s_w^n\right\|_0^2 + \left\|s_o^n\right\|_0^2$.

Рассмотрим теперь следующую модельную задачу оптимального управления для модели без учета капиллярных сил с дополнительным предположением $\beta_T \equiv 0$:

$$c_T \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla T - \nabla\cdot\left(k_h \nabla T\right) = \rho_*(x)\sum_{k=1}^{n} q_k(t)\psi_k(x), \tag{22}$$

$$\beta\frac{\partial p}{\partial t} - \nabla\cdot\left(k_p \nabla p\right) = \sum_{k=1}^{n} q_k(t)\psi_k(x), \tag{23}$$

$$\frac{\partial s_w}{\partial t} - \nabla\cdot\left(\nu_w \nabla p\right) = f_w(x), \tag{24}$$

$$\frac{\partial s_g}{\partial t} - \nabla\cdot\left(\nu_g \nabla p\right) = \sum_{k=1}^{n} q_k(t)\psi_k(x), \tag{25}$$

$$\vec{u} = \rho_w c_w \vec{u}_w + \rho_o c_o \vec{u}_o + \rho_g c_g \vec{u}_g \tag{26}$$

с начальными и граничными условиями

$$T(x,0) = T_0,\ p(x,0) = p_0,\ s_\alpha(x,0) = s_{\alpha 0},\ \alpha = w,o,g, \tag{27}$$

$$k_h \frac{\partial T}{\partial \vec{n}}\bigg|_\Gamma = 0,\ k_p \frac{\partial p}{\partial \vec{n}}\bigg|_\Gamma = 0. \tag{28}$$

Пусть $q_k \in L_2(0,t_1)$ - массовый расход пара, соответствующий скважине k; обозначим управление $q = (q_1(t),...,q_n(t)) \in H \equiv (L_2(0,t_1))^n$, для которого выполнено условие

$$\|q\|_H^2 \le C,\ C > 0, \tag{29}$$

где

$$\|v\|_H^2 = (v,v)_H,\ (v,w)_H = \sum_{k=1}^n \int_0^{t_1} v_k(t) w_k(t) dt.$$

Введем в рассмотрение функционал

$$J_\varepsilon(q) = \int_\Omega (T(x,t_1;q) - \varphi(x))^2 dx + \frac{1}{\varepsilon^2}\|q\|_H^2, \tag{30}$$

где зависимость $T(x,t_1;q)$ от управления $q(t)$ означает, что решение задачи (22)-(28) найдено в соответствии с заданным массовым расходом пара q, $\varphi(x) \in L_2(\Omega)$. Рассмотрим задачу

$$J_\varepsilon(z) = \inf_{q \in H} J_\varepsilon(q). \tag{31}$$

Другими словами, требуется определить массовый расход пара $q = q(t)$ на нагнетательных скважинах так, чтобы температура пласта наименее отклонялась от заданного эталонного распределения $\varphi(x)$.

Для решения задачи (22)-(28), (30)-(31) будем использовать итерационный градиентный метод. Вычислим градиент функционала (30) и сформулируем необходимые условия оптимальности. Имеет место следующая теорема:

Теорема 2 [2]: Если θ - решение вспомогательной задачи

$$c_T \frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot (\theta \vec{u}) + \nabla \cdot (k_h \nabla \theta) = 0, \tag{32}$$

с финальными и граничными условиями

$$\theta(x,t_1) = 2c_T^{-1}(T(x,t_1;q) - \varphi(x)), \tag{33}$$

$$k_h \frac{\partial \theta}{\partial \vec{n}}\bigg|_\Gamma = 0, \tag{34}$$

то функционал (30) дифференцируем по Фреше на множестве H и для его градиента справедливо соотношение

$$\operatorname{grad} J_\varepsilon(q) = \iint_{\Omega \times (0,t_1)} \rho_*(x) \theta(x,t) \psi_k(x) dx dt + \frac{2}{\varepsilon^2} q(t). \tag{35}$$

Для численного решения оптимизационной задачи использован метод проекции градиента, который состоит в определении последовательности $\{q^{(\lambda)}\}$ по формулам

$$q^{(\lambda+1)} = \begin{cases} v_\lambda \equiv q^{(\lambda)} - \tau_{\lambda+1} \operatorname{grad} J_\varepsilon(q^{(\lambda)}), & m_0 \le v_\lambda \le m_1, \\ m_0, & v_\lambda < m_0, \\ m_1, & v_\lambda > m_1, \end{cases} \tag{36}$$

$$q^{(0)} = q_0. \tag{37}$$

Алгоритм численной реализации задачи определим следующим образом. Зададим начальное приближение (37). Итерационный процесс начинается с решения прямой задачи (22)-(28). Используя решение последней в финальный момент времени $t = t_1$, решается задача (32)-(34). Далее, вычисляется градиент функционала J_ε по формуле (35). Значение управления $q^{(\lambda+1)}$ определяется по формуле (36). Итерационный процесс (36) выполняется до достижения условия

$$\max_{t\in[0,t_1]}\left|q^{(\lambda+1)}(t)-q^{(\lambda)}(t)\right|<\varepsilon_0,\ \varepsilon_0>0.$$

В качестве $\psi_k(x)$ можно принять, например, $\psi_k(x)=\delta(x-x_k)$, где $x_k\in\Omega$ - заданные расположения нагнетательных скважин.

Выводы: Таким образом, в работе приводится новая постановка задачи трехфазной неизотермической фильтрации, в основу которой положена замена переменных для исключения градиентов капиллярных давлений. Получена априорная оценка для решения разностной задачи, выражающая устойчивость разностной схемы по начальным данным и правым частям уравнений. Рассмотрена задача оптимального управления для системы уравнений, описывающей трехфазный неизотермический поток в пористой среде без учета гравитационных и капиллярных сил. Задача оптимального управления сведена к минимизации целевого ε-функционала. Для применения градиентного итерационного метода получена явная формула для его градиента, который выражается через решение вспомогательной задачи, включающей уравнение типа конвекции-диффузии с обратным временем для температуры.

Список литературы

1. Антонцев С. Н. Краевые задачи для некоторых вырождающихся уравнений механики сплошной среды /С.Н. Антонцев, В.Н Монахов. – Новосибирск: Новосибирский государственный университет.-1977. – 48 с.
2. Байгереев Д. Р. О задаче оптимального управления для уравнений трехфазной неизотермической фильтрации /Д. Р Байгереев// Вестник КазНИТУ, (4):577–581, 7 2016.
3. Жумагулов Б. Т. Компьютерное моделирование в процессах нефтедобычи /Б. Т Жумагулов, В. Н Монахов, Смагулов Ш. С. – Алматы.-Гылым.- 2002. - 308 с.
4. Amaziane B., Jurak M., Keko A. Modeling compositional compressible two-phase flow in porous media by the concept of the global pressure // Computational Geoscience. – 2014. – Vol. 18. – No. 3. – pp. 297-309.
5. Bastian P. Numerical Computation of Multiphase Flows in Porous Media (PhD thesis). - Christian-Albrechts-Universität Kiel, 1999.
6. Chavent G., Jaffre J. Mathematical models and finite elements for reservoir simulation. – Elsevier, 1986. – 375 p.
7. Chen Z., Ewing R. Comparison of various formulation of three-phase flow in porous media // Journal of Computational Physics . – 1997. – Vol. 132. – pp. 362-373.
8. Saad B., Saad M. Study of full implicit petroleum engineering finite volume scheme for compressible two phase flow in porous media // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 2013. – pp. 1–34.
9. Steinkamp K., Schumacher J.O. A non-isothermal PEM fuel cell model including two water transport mechanisms in the membrane // Journal of fuel cell science and technology. – 2008. - Vol. 5. – No. 1. – pp. 1-26.
10. Temirbekov N. M., Baigereyev D. R. Modeling of three-phase non-isothermal flow in porous media using the approach of reduced pressure // Mathematical modeling of technological processes: 8th International Conference, CITech-2015, Almaty, Kazakhstan, September 24-28, 2015, Proceedings / edited by N. Danaev, Yu. Shokin, D. Akhmed-Zaki. – Almaty, 2015. – P. 166-176.
11. Temirbekov N. M., Baigereyev D. R. On the stability of a difference scheme for the three-phase non-isothermal flow problems // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. – 2016. – Т. 2. - № 89. – С. 19–26.