

выполнения других сервисов, выполняемых на этом вычислительном узле. Если для данного вычислительного узла нет записей, то тогда делается предположение относительно его длительности на основании заранее заданных значений, зависящих от типа сервиса.

8. Заключение.

Спроектирована и разработана, а также интегрирована в существующую инфраструктуру Портала ИДСТУ СО РАН система выполнения композиций сервисов в гетерогенной среде. Основные преимущества системы: способность к перестройке расписания вызова сервисов при изменениях состояния гетерогенной среды; планирование с учетом динамического изменения графа зависимостей заданий. Задание композиций сервисов с помощью JavaScript позволяет поддерживать планирование и синхронизировать выполнение сервисов и передачу данных между ними, что упрощает процесс разработки композиций сервисов.

Список литературы

1. Компоненты среды WPS-сервисов обработки геоданных/ И.В. Бычков и др. // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. – 2014. - № 12. – С. 16-23.
2. Emig C., Weisser J., Abeck S.. Development of SOA-Based Software Systems - an Evolutionary Programming Approach // Advanced Int'l Conference on Telecommunications and Int'l Conference on Internet and Web Applications and Services (AICT-ICIW'06). – 2006. С. 14-15.
3. Learn REST: Representation State Transfer [Электронный ресурс] // URL:<http://rest.elkstein.org>(дата обращения: 17.6.2016).
4. Nasonov D., Butakov N., Balakhontseva M., Knyazkov K., Boukhanovsky A. Hybrid Evolutionary Workflow Scheduling Algorithm for Dynamic Heterogeneous Distributed Computational Environment // Advances in Intelligent Systems and Computing. – 2014. Vol. 299. С. 83-92.
5. OASIS Web Services Business Process Execution Language (WSBP) TC [Электронный ресурс] // URL: https://www.oasis-open.org/committees/tc_home.php?wg_abbrev=wsbp (дата обращения: 25.6.2016).
6. Oinn T., Addis M., Ferris J., Marvin D., Senger M., Greenwood M., Carver T., Glover K., Pocock M.. Taverna: a tool for the composition and enactment of bioinformatics workflows // Bioinformatics. – 2004. Vol. 20. С. 82-98.
7. Oracle BPEL Process Manager [Электронный ресурс] // URL: <http://www.oracle.com/technetwork/middleware/bpel/overview/index.html> (дата обращения: 24.6.2016).
8. Sachdeva S., Rana P.. A Review of Multiprocessor Directed Acyclic Graph (DAG) Scheduling Algorithms // International Journal of Computer Science & Communication. – 2015. – Vol. 66, N. 11. С. 67-72.
9. Service Orientation | Learn Service-Oriented-Architecture [Электронный ресурс] // URL: <http://serviceorientation.com/> (дата обращения: 29.6.2016).
10. Shirazi B., Wang M. Analysis and evaluation of heuristic methods for static task scheduling // Journal of Parallel and Distributed Computing. – 2010. - Vol. 10, Is. 3. С. 222-232.

УДК 51:517.9

О ЗАДАЧЕ ДАРБУ-ГУРСА-БОДО В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Бердимуратов Амангельди Мухтарович, к.ф.м.н., КНУ им. Ж.Баласагына, Кыргызстан,
e-mail: aman2460@mail.ru

Цель статьи - в этой статье находятся достаточные условия для того, чтобы всякое обобщенное решение уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами, определенное в некоторой окрестности объединения трех соседних граней $\pi_1 \cup \pi_2 \cup \pi_3$ параллелепипеда можно было продолжить в некоторую окрестность параллелепипеда π в пространстве непрерывных функций.

Ключевые слова: Параллелепипед, подпространство, компакт, множество, характеристическая матрица, класс Соболева.

ON THE PROBLEM OF THE DARBOUX-GOURSAT-BODO IN THE SPACE OF CONTINUOUS FUNCTIONS

Berdimuratov Amangeldi Muhtarovich, k.f.m.n, KNU im.J.Balasagyna Kyrgyzstan,
e-mail: aman2460@mail.ru

In this article, there are sufficient conditions to ensure that every generalized solution of partial differential equation with constant coefficients, defined in a neighborhood of the union of three adjacent faces of the parallelepiped can be continued to a neighborhood of the box in the space of continuous functions.

Keywords: box, subspace, CDs, set the characteristic matrix, Sobolev class.

Пусть π – параллелепипед в R^n , n – граней которого лежат в координатных подпространствах

$$\xi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Обозначим через π , его $(n-1)$ – мерную грань, лежащую в подпространстве

$$\xi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Через D_F^β обозначаем пространства бесконечно дифференцируемых функции, принадлежащих классу Жеврея порядка $\beta > 1$, с носителями, принадлежащими компакту $F \subset R^n$. Через U_F^β - обозначим пространство линейных функционалов на D_F^β .

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$P(D)u = \sum_{j \leq m} \left[a_{j_1, \dots, j_n} \frac{\partial^{ij} u(\xi)}{\partial \xi_1^{j_1} \dots \partial \xi_n^{j_n}} \right] = 0, \quad \xi \in R^n \quad (1)$$

В уравнении (1) $a_j \in c$, $j = (j_1, \dots, j_n)$ – вектор с целыми неотрицательными компонентами, причем $|j| = j_1 + \dots + j_n$, $i = \sqrt{-1}$, а $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n_1})$ – некоторая фиксированная система координат в R^n ;

Через $P(z)$ обозначим характеристический многочлен для оператора, определяемого уравнением (1).

В этой работе находятся достаточные условия для того, чтобы всякое обобщенное решение уравнение (1) определенное в некоторой окрестности объединения трех соседних граней $\pi_1 \cup \pi_2 \cup \pi_3$ можно было продолжить в некоторую окрестность параллелепипеда π . Эту задачу можно рассматривать как некоторый аналог классической задачи Дарбу-Гурса-Бодо в пространстве непрерывных функций. При этом решение уравнение (1) заданное в окрестности объединения граней $\pi_1 \cup \pi_2 \cup \pi_3$ играет роль системы начальных данных.

Обозначим через N характеристическое множество оператора $P(D)$, то есть множество

$$N = \{z \in C^n; rang P(z) < s\},$$

где $P(z)$ - характеристическая матрица оператора $P(D)$. Пусть F - замыкание ограниченной области в R^n , а q - произвольное целое число, через W_F^q обозначим класс Соболева порядка q , образованный функциями, заданными на F . Под символом W_F^q мы будем понимать прямую сумму экземпляров этого пространства, а элементы W_F^q интерпретировать как столбцы высоты s , образованные функциями из W_F^q . Через $\|\cdot\|_F^q$ мы обозначим норму для элементов пространства W_F^q .

Теорема. Пусть для некоторого $C_0 > 0$,

$$N \subset \bigcup_{i=1}^3 \{z \in C^n; |z_i| \leq C_0\}$$

Тогда для любой окрестности L компакта $\bigcup_{k=1}^3 \pi_k$ существует окрестность L' параллелепипеда π , такая что для любого целого q всякую обобщенную функцию $u \in W_L^q$, являющуюся обобщенным решением (1) на L , можно продолжить функцией $\mathcal{G} \in W_{L'}^{q-c_1}$, являющейся обобщенным решением (1) на L' причем

$$\|\mathcal{G}\|_{L'}^{q-c_1} \leq C_2 \|u\|_L^q,$$

где C_2 не зависит от U , а C_1 зависит лишь от оператора P .

Введем следующее пространство. Для любых $q, m > 0$ и компакта $F \subset R^n$ через $S_{m,F}^q$ обозначим пространство бесконечно дифференцируемых функций ψ в C^n , для которых

$$|D^\alpha \psi(x, y)| \leq C \cdot J_F(y) \cdot (1 + |z|)^q$$

При любом целом $\alpha, |\alpha| \leq m$.

Рассмотрим пространство $S_F^q = \bigcap_{m \geq 0} S_{m,F}^q$. В пространстве S_F^q введем систему норм

$$\|\psi(x, y)\|_{m,F}^q = \max_{|\alpha| \leq m} \sup_z \frac{|D^\alpha \psi|}{J_F(y) \cdot (1 + |z|)^q}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Через $(S_F^q)'$ обозначим пространство непрерывных линейных функционалов на S_F^q , а через $(S_F^q)_p'$ обозначим множество функционалов $f \in (S_F^q)'$, для которых $(f, p' \psi) = 0$ при любом $\psi \in S_F^{q-A_1}$, где $A_1 > 0$ максимальный порядок элементов матрицы p' . Норму для элементов пространства $(S_F^q)'$, сопряженную с нормой $\|\cdot\|_{m,F}^q$ в пространстве S_F^q обозначим через $\|\cdot\|_{m,F}^q$. Легко проверить, что операторы $\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}, j = \overline{1, n}$ непрерывно действуют в пространстве S_F^q , а операторы $z_j, \bar{z}_j, j = \overline{1, n}$ непрерывно действуют из пространства S_F^q в пространство S_F^{q+1} . Так как коэффициенты операторов $d^\lambda(z, D_z)$ являются полиномиальными, то обозначая наивысшую степень с которой z входит при любом $\lambda = \overline{0, e}$ в $d^\lambda(z, D_z)$ через A_2 , а наивысший порядок производной в $d^\lambda(z, D_z), \lambda = \overline{0, e}$ через m_1 , мы для любого

$$\psi \in S_F^{q-A_2}$$

получим оценку

$$\|d^\lambda(z, D_z)\psi\|_{0,F}^q \leq \|\psi\|_{m_1,F}^{q-A_2} \quad (2)$$

Применяя теорему В.П. Паламодова [1], (гл. VI, §4, т.I, сл.I) к функционалу к каждому из выпуклых компактов π_i^α по отдельности мы получим три представления

$$(\overline{u}, \varphi) = \sum_{\lambda=0}^e \int_{N^\lambda} d^\lambda(z, D_z) \tilde{\varphi}^* \mu^{\lambda,i}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_{\pi_i^{\alpha-1}}$$

Причем, векторные меры $\mu^{\lambda,i} = \mu_1^{\lambda,i}, \dots, \mu_{e_\lambda}^{\lambda,i}$, таковы, что

$$\sum_{\lambda=0}^e \int_{N^\lambda} (1+|z|)^{q-A} \cdot J_{\pi_i^{\alpha-1}}(y) |\mu^{\lambda,i}| \leq c \|\mu\|_{\pi_i^\alpha}^q, \quad i=1,2,3.$$

Здесь $N^\lambda, (\lambda = \overline{0, e})$ - некоторые алгебраические многообразия, такие, что $\bigcup_{\lambda} N^\lambda = N$, а $\mu_j^{\lambda,i}$ -

комплексные меры сосредоточенные $\forall j = \overline{1, e_\lambda}$ на N^λ и $|\mu^{\lambda,i}| = \sum_{j=1}^{e_\lambda} |\mu_j^{\lambda,i}|$, а постоянная A

зависит лишь от матрицы p . Введем в c^n

обобщенные функции $\mu^i = \sum_{\lambda=0}^e d^{\lambda*}(z, D_z) \mu^{\lambda,i}, \quad i=1,2,3.$

Очевидно $\forall \varphi \in \mathcal{D}_{(\pi_i \cap \pi_j)^{\alpha-1}}$ имеем $(\mu^i, \tilde{\varphi}^*) = (\mu^j, \tilde{\varphi}^*)$, где $i \neq j, i, j = 1, 2, 3$. Отсюда $(\mu^i - \mu^j, \tilde{\varphi}^*) = 0$. Обозначая $\mu^i - \mu^j$ через $\chi^{i,j}$ будем иметь

$$(\chi^{i,j}, \tilde{\varphi}^*) = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_{(\pi_i \cap \pi_j)^{\alpha-1}} \quad (3)$$

Покажем, что $\forall \lambda = \overline{0, e}$ и $\forall j = \overline{1, e_\lambda}, \mu_j^{\lambda,i} \in (S_{\pi_i^{\alpha-1}}^{q-A})$, $j=1,2,3$.

Для любого $\psi \in S_{\pi_i^{\alpha-1}}^{q-A}$ имеем

$$|(\mu_j^{\lambda,i}, \psi)| = \left| \int_{N^\lambda} \psi \cdot \mu_j^{\lambda,i} \right| \leq \sup_z \frac{|\psi|}{J_{\pi_i^{\alpha-1}}(y)(1+|z|)^{q-A}} \int_{N^\lambda} (1+|z|)^{q-A} J_{\pi_i^{\alpha-1}}(y) |\mu_j^{\lambda,i}| \leq c' \|\mu\|_{\pi_i^\alpha}^q \|\psi\|_{0, \pi_i^{\alpha-1}}^{q-A}$$

Откуда вытекает, что норма функционала $\mu^{\lambda,i} = (\mu_1^{\lambda,i}, \dots, \mu_{e_\lambda}^{\lambda,i})$ в пространстве $(S_{\pi_i^{\alpha-1}}^{q-A})$

удовлетворяет неравенству $\|\mu^{\lambda,i}\|_{\theta, \pi_i^{\alpha-1}}^{q-A} \leq c' \|\mu\|_{\pi_i^\alpha}^q$.

Покажем, что $\mu^i \in (S_{\pi_i^{\alpha-1}}^{q-A-A_2})_p$, $i=1,2,3$.

Мы будем использовать следующие теоремы Мальгранжа, которые соответственно вытекают из [1] и [2] (см. MalgrangeB).

Теорема 2. Если F и $F' \supset F$ выпуклые компакты в R^n , то всякий функционал $\chi \in (S_{F'}^q)_p$ равный нулю на целых функциях пространства $S_{F'}^q$ можно записать в виде

$\chi = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right)^* \chi_j$, где $\chi_j \in (S_F^{q-d})_p$, а $d > 0$ не зависит от q . При этом, для любого $m \geq 0$

существует $m' \geq m$ такое что, если функционал $\partial \ell$ непрерывен по норме $\|\cdot\|_{m, F'}^q$, то

функционалы χ_j могут быть выбраны непрерывными по норме $\|\cdot\|_{m',F}^{q-d}$ таким образом, что имеет место неравенство $\sum_{j=1}^n \|\chi_j\|_{m',F}^{q-d} \leq c \|\chi\|_{m,F}^q$, где c не зависит от χ .

Теорема 3. Если F и $F' \supset F$ выпуклые компакты в R^n , то для любых функционалов $\chi_j \in (S_{F'}^q)_p$ таких, что $\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right)^* \chi_j = 0$, существуют функционалы $\chi_{j,k} \in (S_F^{q-d_1})_p$ такие, что $\chi_j = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right)^* \chi_{j,k}$ и $\chi_{j,k} = -\chi_{k,j}$. При этом $d_1 > 0$, не зависит от q и для любого $m > 0$ существует $m' \geq m$ такое, что, если функционалы χ_j непрерывны по норме $\|\cdot\|_{m,F'}^q$, то функционалы $\chi_{j,k}$ могут быть выбраны непрерывными по норме $\|\cdot\|_{m',F}^{q-d_1}$ таким образом, что имеет место неравенство $\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \|\chi_{j,k}\|_{m',F}^{q-d_1} \leq c \cdot \sum_{j=1}^n \|\chi_j\|_{m,F'}^q$, где c не зависит от χ_j , $j = \overline{1, n}$.

Доказательство.

Покажем, что функционал $\mathcal{G}$ является решением (1) в окрестности параллелепипеда π . Так как

$$\tilde{\mu} \in (S_{\pi^{\alpha-4}}^{q-c_1})_p, \text{ то } \forall \varphi \in [L_{\pi^{\alpha-5}}] \text{ имеем } (\overline{p(D)\mathcal{G}, \varphi}) = (\overline{\mathcal{G}, p^*(D)\varphi}) = (\tilde{\mu}, (\overline{p^*(D)\varphi})^*) = (\tilde{\mu}, p' \tilde{\varphi}^*) = 0$$

Покажем, что $\forall \psi \in S_{\pi_i^{\alpha-4}}^{q-c_1-A_1-b}$ имеет место равенство $(\tilde{\mu}, \psi) = (\tilde{\mu}^i, \psi)$, $i = 1, 2, 3$. что $\tilde{\mu}^i = \tilde{\mu}^j$ на функциях пространства $S_{(\pi_i \cap \pi_j)^{\alpha-4}}^{q-c_1-A_1-b}$ для любого $\psi \in S_{\pi_i^{\alpha-4}}^{q-c_1-A_1-b}$ будем иметь

$$(\tilde{\mu}, \psi) = \sum_{j=1}^3 (\tilde{\mu}^j, h_j \psi) = \sum_{j=1}^3 (\tilde{\mu}^i, h_j \psi) = \left(\tilde{\mu}^i, \sum_{j=1}^3 h_j \psi \right) = (\tilde{\mu}^i, (h_0 + h_1 + h_2 + h_3) \psi) = (\tilde{\mu}^i, \psi), \quad i = 1, 2, 3.$$

Теперь покажем, что обобщенные функции u и v совпадают на компакте $\left(\bigcup_{k=1}^3 \pi_k \right)^{\alpha-6}$.

Для любого $\psi \in L_{\pi_i^{\alpha-5}}$ будем иметь:

$$(\overline{\mathcal{G}, \varphi}) = (\tilde{\mu}, \tilde{\varphi}^*) = (\tilde{\mu}^i, \tilde{\varphi}^*) = (\mu^i, \tilde{\varphi}^*) - \left(\sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_s} \right)^* \chi_s^i, \tilde{\varphi}^* \right) = (\mu^i, \tilde{\varphi}^*) - \sum_{s=1}^n \left(\chi_s^i, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_s} \tilde{\varphi}^* \right) = (\mu^i, \tilde{\varphi}^*) = (\overline{u}, \varphi)$$

$\forall \varphi \in L_{\left(\bigcup_{k=1}^3 \pi_k \right)^{\alpha-6}}$ имеем $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$, где $\varphi_i \in L_{\pi_i^{\alpha-5}}$, $i = 1, 2, 3$. Поэтому

$$(\overline{\mathcal{G}, \varphi}) = \sum_{i=1}^3 (\overline{\mathcal{G}, \varphi}) = \sum_{i=1}^3 (\overline{u}, \varphi_i) = (\overline{u}, \varphi).$$

Выводы: Получено условие на характеристическое множество дифференциального оператора с постоянными коэффициентами обеспечивающие разрешимость задач Дарбу-Гурса-Бодо в пространстве непрерывных функций.

Список литературы

1. Паламодов В.П. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, М, «Наука», 1967
2. Systemes differentials a coefficients constants, seminaire Bourbaki. Paris. 1962/63, №246.
3. Sur les systemes differentials a coefficients constants, senaire College de France, 1961/62, exp.8.