УДК 51-7:330.4

МЕТОД МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Бердимуратов Амангельди ***к.****ф.м.н. доцент КНУ им Ж.Баласагына Кыргызстан, 720044, г.Бишкек, ул.Фрунзе 547, e-mail: aman2460@mail.ru,*
Омуралиева Бакыт Байышовна*, ст.преподователь, КНУ им Ж.Баласагына, Кыргызстан, 720044, г.Бишкек, ул.Фрунзе 547, e-mail: bakubaish@mail.ru*

Целью данной работы является о эффективности применение метода максимального правдоподобия и некоторые особенности для оценки параметров нелинейных эконометрических моделей.

Ключевые слова: правдоподобия, бинарной модель, логарифм, производная, *probit*-модели, модель Пуассона.

THE METHOD OF HIGHEST POSSIBLE VERISIMILITUDE FOR APPRAISAL PARAMETERS OF UNLINEAR ECONOMETRIC MODELS

Berdimuratov Amangeldi *phd, docent KNU. J. Balasagyn, Kyrgyzstan, 720044, Bishkek, Frunze 547 e-mail: aman2460@mail.ru*
Omuralieva Bakyt Baiyshovna *senior lecturer, KNU J. Balasagyn, Kyrgyzstan, 720044, Bishkek, Frunze 547, bakubaish@mail.ru*

The aim of this work yavyaetsya effektinosti use the maximum likelihood method and some features for estimating parameters of nonlinear econometric models.

Keywords: likelihood of a binary model , the logarithm of the derivative , probit- model , the Poisson model .

Метод максимального правдоподобия имеет некоторые особенности.
Предположим, что наблюдения $y_1, y_2, \ldots, y_T$ независимы. Поскольку y_t может принимать только значения 0 и 1, то функция правдоподобия для бинарной модели имеет следующий вид:

$$\alpha' \boldsymbol{x}_t)] \prod_{y_t=1} F(\alpha' \boldsymbol{x}_t). \qquad (1)$$

Представим выражение (1) в несколько другой форме:

$$L=\prod_{t=1}^{T} F[(\alpha' \boldsymbol{x}_t)]^{y_t} \cdot [1-F(\alpha' \boldsymbol{x}_t)]^{1-y_t} \qquad (2)$$

где переменная y_t принимает значение 0 или 1.
Логарифм выражения (2) имеет следующий вид:

$$l=\ln L=\sum_{t=1}^{T} \{y_t \ln F(\alpha' \boldsymbol{x}_t)+(1-y_t)\cdot \ln[1-F(\alpha' \boldsymbol{x}_t)]\}^{*}. \qquad (3)$$

Необходимыми условиями максимизации функции правдоподобия являются равенства нулю всех частных производных ее логарифма по параметрам α, т. е.

$$\partial l/\partial \alpha=\sum_{t=1}^{T}[\frac{y_t f_t}{F_t}+(1-y_t)\cdot \frac{-f_t}{(1-F_t)}]\cdot \boldsymbol{x}_t=\boldsymbol{0}. \qquad (4)$$

где $f_t=f(\alpha' \boldsymbol{x}_t)$ и $F_t=F(\alpha' \boldsymbol{x}_t)$, т. е. функции f_t и F_t имеют аргумент $\alpha' \boldsymbol{x}_t$.

Подходы к решению системы (1), т. е. к получению оценок коэффициентов α, зависят от формы функционалов $f(\alpha' x)$ и $F(\alpha' x)$. При этом заметим, что если $F(\alpha' x_t)$ нелинейны, то уравнения в (1) также нелинейны. Для их решения (т. е. для получения оценок параметров α) используются итеративные методы.

В частности, для *logit*-модели логарифм правдоподобия вылядит следующим образом:

$$\ln L = \sum_{t=1}^{T}\{y_t \cdot \ln \frac{e^{\alpha' x_t}}{1+e^{\alpha' x_t}} + (1-y_t)\cdot \ln(1-\ln \frac{e^{\alpha' x_t}}{1+e^{\alpha' x_t}})\}, \quad (5)$$

а необходимыми условиями его максимизации являются:

$$\partial l/\partial \boldsymbol{\alpha} = \sum_{t=1}^{T}(y_t - \frac{e^{\alpha' x_t}}{1+e^{\alpha' x_t}}) \cdot \boldsymbol{x}_t = \mathbf{0}. \quad (6)$$

Для нормального распределения логарифм функции максимального правдоподобия может быть записан в следующем виде:

$$l = \ln L = \sum_{y_t=0} \ln[1-\Phi(\boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{x}_t)] + \sum_{y_t=1} \ln\Phi(\boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{x}_t). \quad (7)$$

В этом случае необходимые условия максимизации функции правдоподобия могут быть представлены в виде системы:

$$\partial l/\partial \boldsymbol{\alpha} = \sum_{y_t=0}^{T} \frac{-\varphi_t}{1-\Phi_t} \cdot \boldsymbol{x}_t + \sum_{y_t=1}^{T} \frac{\varphi_t}{\Phi_t} \cdot \boldsymbol{x}_t = \mathbf{0}, \quad (8)$$

где

$$\varphi_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y_t - \alpha' x_t)'(y_t - \alpha' x_t)}{\sigma^2}\right); \quad (9)$$

$$\Phi_t = \int_{-\infty}^{\alpha' x_t} \varphi(u)du \quad (10)$$

Рассмотрим особенности применения метода максимального правдоподобия для оценки двумерной *probit*-модели [8,9]. Для конкретного индивидуума принимают соответственно значения y_{t1} и y_{t2}, рассчитывается как

$$P(Y_1 = y_{t1}, Y_2 = y_{t2}) = \Phi_2(w_{t1}, w_{t2}, p_{t*}), \quad (11)$$

где

$$w_{tj} = q_{tj} \cdot z_{tj}; \quad z_{tj} = \boldsymbol{\alpha}'_j \boldsymbol{x}_{tj}, \quad j=1,2; \quad (12)$$

$$\rho_{t*} = q_{t1} \cdot q_{t2} \cdot \rho; \quad (13)$$

$$q_{t1} = 2y_{t1} - 1; \; q_{t2} = 2y_{t2} - 1. \quad (14)$$

Логарифм функции правдоподобия будет иметь следующий вид:

$$l = \ln L = \sum_{t=1}^{T} \ln \Phi_2(w_{t1}, w_{t2}, \rho_{t*}),$$

где

$$\Phi_2(w_{1t}, w_{2t}, \rho_{t*}) = \int_{-\infty}^{w_{2t}} \int_{-\infty}^{W_{1t}} \varphi_2(u_1, u_2, \rho_t) d_{u1} d_{u2}, \quad (15)$$

а плотность этого распределения имеет следующий вид:

$$\varphi_2(W_{1t}, W_{2t}, p_{t*}) = \frac{e^{-(\frac{1}{2})\cdot(w_{1t}^2 + w_{2t}^2 - p_{t*}\cdot w_{1t}\cdot w_{2t})/(1-p_{t*}{}^2}}{2\pi(1-p_{t*}^2)^{1/2}} \quad (16)$$

Первые производные логарифма правдоподобия по параметрам α_j, j=1,2; и ρ определяются как

$$\partial \ln L/\partial \alpha_j=\sum_{t=1}^{m}\left[\frac{(2y_{tj}-1)\cdot g_{tj}}{\Phi_2}\right]\cdot x_{tj}, j=1,2; \quad (17)$$

$$\partial \ln L/\partial \rho=\sum_{t-1}^{m}\frac{(2y_{t1}-1)\cdot(2y_{t2}-1)\cdot\varphi_2}{\Phi_2} \quad (18)$$

где

$$g_{t1}=\varphi(w_{t1})\cdot\Phi\left(\frac{w_{t2}-\rho_{t*}\cdot w_{t1}}{\sqrt{1-\rho_{t*}^2}}\right)=\varphi[(2y_{t1}-1)\cdot\boldsymbol{\alpha}_1'\boldsymbol{x}_{t1}]\times$$

$$\text{х}\phi\ \frac{(2y_{t2}-1)\cdot\alpha_2' x_{t2}-p_{t*}\cdot(2y_{t1}-1)\cdot\alpha_1' x_{t1}}{\sqrt{1-p_{t*}^2}} \quad (19)$$

и индексы 1 и 2 в q_{t1} перевернуты для получения q_{t2}.

Оценки максимального правдоподобия получаются путем одновременного приравнивания трех производных (по α_1, α_2 и ρ) нулю.

Логарифм функции правдоподобия для модели Пуассона имеет следующий вид:

$$l=\ln L=\sum_{t=1}^{T}[-\lambda_t+y_t\cdot\boldsymbol{\alpha}'\cdot\boldsymbol{x}_t-\ln(y_t!)]=\sum_{t=1}^{T}[-e^{\alpha' x_t}+y_t\cdot\boldsymbol{\alpha}'\cdot\boldsymbol{x}_t-\ln(y_t!)]. \quad (20)$$

Необходимые условия его максимизации можно записать следующим образом:

$$\partial \ln L/\partial\boldsymbol{\alpha}=\sum_{t=1}^{T}(y_t-e^{\alpha' x_t})\cdot\boldsymbol{x}_t=\mathbf{0}.$$

Пример. Имеется нелинейное уравнение регрессии

$$y_t=\alpha+\varepsilon_t,$$

где ε_t распределена по закону Коши с функцией плотности $f(z)=1/\pi(1+z^2)$.

Требуется.

Построить алгоритм метода максимального правдоподобия Ньютона-Рафсона.

Решение.

Функция плотности распределения ошибки для t-го периода запишется следующим образом:

$f(\varepsilon_t)=\frac{1}{\pi}*(1+\varepsilon_t^2)=\frac{1}{\pi}*[1+(y_t-\alpha)^2]$,

соответственно ее логарифм

$$\ln f(\varepsilon_t)=\ln\frac{1}{\pi}+\ln[1+(y_t-\alpha)^2],$$

Логарифм функции правдоподобия

$$l(\alpha)=\sum\ln\frac{1}{\pi}+\sum\ln[1+(y_t-\alpha)^2]=\text{const}+\sum\ln[1+(y_t-\alpha)^2].$$

Необходимые условием экстремума функции правдоподобия является равенство нулю ее первой производной.

$$\frac{dl}{d\alpha}=\sum\frac{-(y_t-\alpha)}{1+(y_t-\alpha)^2}=0.$$

Таким образом, требуется решить нелинейное уравнение. В соответствии с методом Ньютона-Рафсона получим

$$\alpha_{n+1}=\alpha_n-\frac{ds/d\alpha|\alpha_n}{d^2s/d\alpha^2|\alpha_n}=\alpha_n-\sum\frac{-(y_t-\alpha_n)}{1+(y_t-\alpha_n)^2}\Big/\sum\frac{1-(y_t-\alpha_n)^2}{[1+(y_t-\alpha)^2]^2}.$$

Выводы: истинная ошибка εt является "абсолютно" случайной переменной. Ее закон распределения выражает закон распределения значений yt относительно расчетных значений $\hat{y}_t$, рассматриваемых при известных значениях параметров $\alpha 0$, $\alpha 1$,..., αn, как выборочные математические ожидания $M[yt]=\hat{y}_t=\alpha 0+\alpha 1x1t+...+\alpha nxnt$. Отклонение значения yt от его математического ожидания объясняется влиянием на этот процесс каких-либо случайных воздействий, которые невозможно учесть в рамках данной модели.

Список литературы

1. 1.Айвазян С.А. Прикладная статистика и основы эконометрики: Учебник для вузов/ С.А. Айвазян, В.С. Мхитарян.- М.- ЮНИТИ, 1998.
2. Бокс Дж. Анализ временных рядов. Прогноз и управление/ Дж.Бокс, Г. Дженкинс Пер. в анг. – М.: Мир, 1974.
3. Грубер Й. Эконометрия 1: Введение во множественную регрессию и эконометрию/ Й. Грубер . Ч.1,2,3. Б.м.: Б.и., 1993.
4. Джонстон Дж. Эконометрические методы / Дж. Джонстон . М.-Статистика, 1980.
5. Доугерти К. Введение в эконометрику/ К.Доугерти. М.: ИНФРА – М.- 1997.
6. Дрейпер Н. Прикладной регрессионный анализ: В 2-х кн./ Н.Дрейпер, Г. Смит.- М.- Финансы и статистика, 1987-88.
7. Кейн Э. Экономическая статистика и эконометрика / Э. Кейн. М.- Статистика, 1977.
8. Магнус Я.Р.Эконометрика: Начальный курс / Я.Р. Магнус, П.К. Катышев, А.А. Пересецкий .- М.- Дело, 2000.

УДК 519.8

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УГЛЯ МЕЖДУ ПОТРЕБИТЕЛЯМИ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ РАСЧЕТОВ

Джакыпбеков Каныбек, *кандидат физико-математических наук, профессор, Института горного дела и горных технологий им. У.Асаналиева. г. Бишкек, Кыргызская Республика,*
e-mail: (kanybek@mail.ru).
Асанкулова Майрам, *кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института теоретической и прикладной математики НАН КР;*
e-mail: May_as@mail.ru
Жусупбаев Амангельди, *доктор физико-математических наук, зав. лабораторией Института теоретической и прикладной математики НАН КР;*
e-mail: aman_jus@mail.ru
Жусупбаева Гульзат Амангельдиевна, *кандидат физико-математических наук, доцент Кыргызского национального аграрного университета им. КИ. Скрябина;*
e-mail: aman_jus@mail.ru

В работе рассматривается проблема оптимизации распределения угля между потребителями (потребителями на основе договора и оптовыми покупателями) по критерию максимума чистого дохода предприятиями ассоциации угольной промышленности. Предлагается метод решения задачи. Полученные результаты могут быть использованы хозяйствующими субъектами горнодобывающих отраслей.

Ключевые слова: месторождения угля, математическая модель, потребитель, прибыль.

THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF DISTRIBUTION OF COAL BETWEEN CONSUMERS BY SUCCESSIVE CALCULATION

Dzhakypbekov Kanibek, *candidate of physical and mathematical sciences, professor of the Institute of mining and mountain technologies named after. U. Asanaliev. Bishkek, Kyrgyz Republic;*
e-mail: kanybek@mail.ru.
Asmankulova Mairam, *Candidate of Physical and Mathematical Sciences, senior researcher at the Institute of Theoretical and Applied Mathematics, National Academy of Sciences;*
e-mail: May_as@mail.ru;