УДК 517.928

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ПОГРАНИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТОЧКОЙ ПОВОРОТА

Алымкулов Келдибай, *д-р физ.-мат. наук, профессор, ОшГУ, Кыргызстан,723500, г.Ош, ул.Ленина 331, e-mail: keldibay@mail.ru,*
Турсунов Дилмурат Абдиллажанович, *д-р физ.-мат. наук, доцент, ОшГУ, Кыргызстан,723500, г.Ош, ул.Ленина 33, e-mail: d_osh@rambler.ru*
Кожобеков Кудайберди Гапаралиевич, *канд. физ.-мат. наук, доцент, ОшГУ, Кыргызстан,723500, г.Ош, ул.Ленина 33, e-mail: kudayberdi.kozhobekov@mail.ru*

Цель статьи – доказать применимость обобщенного метода пограничных функций при построении асимптотики решения сингулярной задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, с точкой поворота.

Ключевые слова: задача Коши, система обыкновенных дифференциальных уравнений, сингулярное возмущение, точка поворота, асимптотика, обобщенный метод пограничных функций,.

THE GENERALIZED METHOD OF BOUNDARY FUNCTIONS FOR SYSTEM ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TURNING POINT

Keldibay Alymkulov *full Professor, OshSU, Kyrgyzstan, 723500, c. Osh,str. Lenina 331, e-mail: keldibay@mail.ru*
Dilmurat A. Tursunov *Associate Professor, OshSU, Kyrgyzstan, 723500, c. Osh, str. Lenina 331, e-mail: d_osh@rambler.ru*
Kudayberdi G. Kozhobekov *Associate Professor, OshSU, Kyrgyzstan, 723500, c. Osh, str. Lenina 331, e-mail: kudayberdi.kozhobekov@mail.ru*

The purpose of this article is to proof the applicability to of the generalized method of the boundary layer function for asymptotical expansion of the solution for system ordinary differential equation with the turn point.

Keywords: problem Cauchy, system ordinary differential equation, singulary perturbed, turning point, asymptotic, generalized method of the boundary functions.

В теории сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений особый интерес представляют задачи с нестабильным спектром, т.е. задачи с точками поворота. Для построения асимптотики решения таких задач разработаны различные методы, например, метод сращивания, метод регуляризации С.А. Ломова [5,6,7], метод ВБК, обобщенный метод погранфункций [1]-[4], [8,9] и т.д.

В данной работе с помощью обобщенного метода пограничных функций [1]-[4], [8,9] построим асимптотику решения бисингулярной задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В работах [1]-[4], [8,9] обобщенным методом пограничных функций построены асимптотики решения скалярных обыкновенных дифференциальных уравнений с различными условиями.

Постановка задачи. Исследуем асимптотическое поведение решения задачи Коши

$$\varepsilon Y'(x) + xAY(x) = F(x),\ 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$Y(0) = Y^0, \tag{2}$$

где 0<ε – скалярный малый параметр, $F(x),\ Y(x),\ Y^0 \in R^n$, A – положительная квадратная матрица-функция n-го порядка с собственными значениями $0<\lambda_i$, λ_i–const, $\lambda_i \neq \lambda_j$ $i\neq j$, $i,j=1,2,\ldots,n$; $F(x)=\sum_{j=0}^{\infty} x^j F_j$.

Как нам известно, существует такая невырожденная квадратная матрица B n-го порядка, для которого справедливо равенство

$$B^{-1}AB=D,$$

где $D=\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n\}$ – диагональная матрица, $\det(B)\neq 0$.

Применяя подстановку $Y(x)=BZ(x)$ к задаче (1)-(2), затем полученные равенства умножая слева на матрицу B^{-1}, приведем к стандартному виду

$$\varepsilon Z'(x)+xDZ(x)=\widetilde{F}(x),\ 0<x<1, \tag{3}$$

$$Z(0)=Z^0, \tag{4}$$

где $\widetilde{F}(x)=B^{-1}F(x),\ Z^0=B^{-1}Y^0$.

Решения задачи Коши (3)-(4) ищем в виде

$$\mathrm{Z}(x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k Z_k(x)+\sum_{k=-1}^{2n}\mu^k \Pi_k(t)+R_n(x,\varepsilon), \tag{5}$$

где $\varepsilon=\mu^2,\ t=x/\mu$.

Подставляя соотношение (5) в равенство (3) получаем

$$\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k\left(\varepsilon Z'_k(x)+xDZ_k(x)\right)+\sum_{k=0}^{2n+1}\mu^k\left(\Pi'_{k-1}(t)+tD\Pi_{k-1}(t)\right)=\widetilde{F}(x), \tag{6}$$

Равенство (6) можно записать в виде:

$$xDZ_0(x)+\Pi'_{-1}(t)+tD\Pi_{-1}(t)=\widetilde{F}(x)-\widetilde{F}(0)+\widetilde{F}(0),$$

$$Z'_{k-1}(x)+xDZ_k(x)+\Pi'_{2k-1}(t)+tD\Pi_{2k-1}(t)=Z'_{k-1}(0)-Z'_{k-1}(0),\ k=1,2,\ldots,n$$

$$\Pi'_{2k}(t)+tD\Pi_{2k}(t)=0,\ k=0,1,\ldots,n$$

$$\varepsilon R_n'(x,\varepsilon)+xDR_n(x,\varepsilon)=-\varepsilon^{n+1}Z'_n(x),\ 0<x<1$$

Отсюда, имеем

$$xDZ_0(x)=\widetilde{F}(x)-\widetilde{F}(0),$$

$$\Pi'_{-1}(t)+tD\Pi_{-1}(t)=\widetilde{F}(0),\ \Pi_{-1}(0)=0,$$

$$Z'_{k-1}(x)+xDZ_k(x)=Z'_{k-1}(0),\ k=1,2,\ldots,n,$$

$$\Pi'_{2k-1}(t)+tD\Pi_{2k-1}(t)=-Z'_{k-1}(0),\ k=1,2,\ldots,n,\ \Pi_{2k-1}(0)=0,$$

$$\Pi'_{2k}(t)+tD\Pi_{2k}(t)=0,\ k=0,1,\ldots,n\ ,\ \Pi_0(0)=Z^0-Z_0(0),\ \Pi_{2k}(0)=-Z_k(0).$$

Находим неизвестные матрицы-функции:

$$Z_0(x)=\frac{1}{x}D^{-1}(\widetilde{F}(x)-\widetilde{F}(0)),$$

$$Z_k(x)=\frac{1}{x}D^{-1}\left(Z'_{k-1}(0)-Z'_{k-1}(x)\right),\ k=1,2,\ldots,n,$$

$$\Pi_{-1}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}D}\left(\int_0^t e^{\frac{s^2}{2}D}ds\right)\widetilde{F}(0),$$

$$\Pi_{2k-1}(t) = -e^{-\frac{t^2}{2}D} \int_0^t Z'_{k-1}(0) e^{\frac{s^2}{2}D} ds,$$

$$\Pi_0(t) = (Z^0 - Z_0(0)) e^{-\frac{t^2}{2}D}, \ \Pi_{2k}(t) = -Z_k(0) e^{-\frac{t^2}{2}D}.$$

Заметим, что матрицы-функции $\Pi_{2k}(t)$ – экспоненциально убывают при $t \to \infty$. А функций $\Pi_{2k-1}(t)$ степенным ростом:

$$\Pi_{2k-1}(t) = \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^3} + \frac{3}{t^5} + \ldots\right) C_k, \ t \to \infty \ k=0,1,2,\ldots$$

$C_0 = \widetilde{F}(0)$, $C_k = -Z'_{k-1}(0)$.

Таким образом, нами определены все члены асимптотического разложения (5), кроме остаточной функции.

Приступаем к исследованию асимптотического поведения остаточной функции. Имеем задачу

$$\varepsilon R_n'(x,\varepsilon) + xDR_n(x,\varepsilon) = -\varepsilon^{n+1} Z'_n(x), \ 0 < x < 1,$$
$$R_n(0,\varepsilon) = 0.$$

Эта задача имеет единственное решение

$$R_n(x,\varepsilon) = -\varepsilon^n e^{-\frac{x^2}{2}D} \int_0^x Z'_n(s) e^{\frac{s^2}{2}D} ds,$$

и для него справедлива оценка $R_n(x,\varepsilon) = O(\varepsilon^n)$, $\varepsilon \to 0$, $0 \le x < 1$.

Вывод. Обобщенным методом пограничных функций К. Алымкулова построено равномерное асимптотическое разложение решения бисингулярной задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в действительной области. А также получена оценка для остаточной функции асимптотического ряда, т.е. асимптотическое разложение обосновано. Хотелось бы отметить, что предлагаемый метод намного упрощает механических вычислений при построении асимптотического ряда и в его обосновании.

Аналогично можно исследовать асимптотические поведения решений задачи Коши для систем сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с точками поворота в комплексной плоскости, а также задачу Валле Пуссена для систем сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с нестабильным спектром.

Список литературы

1. Алымкулов К. Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно-возмущенного дифференциального уравнения второго порядка/ К.Алымкулов, Т.Д. Асылбеков, С.Ф. Долбеева // Математические заметки. – М. – 2013. Т. 94. Вып. 4. – С. 484-487.

2. Алымкулов К. Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой/ К.Алымкулов, А.А. Халматов // Математические заметки.-М.- 2012.-Т. 92. Вып. 6. – С. 819-824.

3. Алымкулов К.Об одном методе построения асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных задач/ К.Алымкулов, Д.А. Турсунов // Известия вузов. Математика. М.-2016.- № 12. – С. 3–11.

4. Alymkulov, K. Analog of Method of Boundary Layer Function for the Solution of the Lighthill's Model Equation with the regular Singular Point // American J.Math. & Statistics, 2013, v. 3, n.1. – P. 53-61.

5. Бобочко В.Н. Равномерная асимптотика решения неоднородной системы двух дифференциальных уравнений с точкой поворота/ В.Н. Бобочко // Известия вузов. Математика. 2006.- № 5. – С. 8–18.

6. Бобочко В.Н. Краевая задача для системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с недиагонализируемым предельным оператором / В.Н. Бобочко // Известия вузов. Математика.М.- 1999.- № 4. – С. 14–23.

7. Бобочко В.Н. Система дифференциальных уравнений с точкой поворота в случае недиагонализируемого предельного оператора/ В.Н. Бобочко // Дифференциальные уравнения М.-1998.- Т.34б.- № 10. – С. 1304-1312.

8. Турсунов Д.А. Асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота/ Д.А. Турсунов // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. -Т. 22.- № 1.–С. 271-281.

9. Турсунов Д.А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с двумя точками поворота / Д.А Турсунов // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2013. 1(21). –С. 34–39

УДК 517.928

БИСИНГУЛЯРНАЯ ЗАДАЧА КОУЛА СО СЛАБОЙ ТОЧКОЙ ПОВОРОТА

Алымкулов Келдибай, *д-р физ.-мат. наук, профессор, ОшГУ, Кыргызстан,723500, г.Ош, ул.Ленина 331, e-mail: keldibay@mail.ru,*
Турсунов Дилмурат Абдиллажанович, *д-р физ.-мат. наук, доцент, ОшГУ, Кыргызстан,723500, г.Ош, ул.Ленина 331, e-mail: d_osh@rambler.ru.*
Азимов Бектур Абдырахманович, *директор уч. центра «Адис» ОшГУ, ОшГУ, Кыргызстан,723500, г.Ош, ул.Ленина 331, e-mail: bk_12@rambler.ru*

С обобщением асимптотического метода пограничных функций Вишика-Люстерника-Иманалиева построено асимптотическое разложение любого порядка по малому параметру решения краевой, бисингулярной задачи Коула со слабой особой точкой. С помощью принципа максимума получена оценка для остаточного члена.

Ключевые слова: бисингулярная задача, слабая особая точка, асимптотика, обобщенный метод пограничных функций, задача Дирихле, задача Коула, принцип максимума.

BISINGULARLY PROBLEM OF COLE WITH A WEAK TURNING POINT

Keldibay Alymkulov *full Professor, OshSU, Kyrgyzstan, 723500, c. Osh,str. Lenina 331, e-mail: keldibay@mail.ru*
Dilmurat A. Tursunov *Associate Professor, OshSU, Kyrgyzstan, 723500, c. Osh, str. Lenina 331, e-mail: d_osh@rambler.ru*
Bektur A. Azimov *Manager of the Educational center "Adis", OshSU, Kyrgyzstan, 723500, c. Osh, str. Lenina 331, e-mail: bk_12@rambler.ru*

By generalized of the asymptotic method boundary function of Vishik-Lusternik-Imanalievs is constructed the uniform asymptotic expansion of the solution in power by the small parameter of the boundary value problem for the model equation of Cole. By using the maximum principle was obtain at the estimates of the remainder term.