УДК 517.928

ПОГРАНСЛОЙНЫЕ ЛИНИИ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Алыбаев Курманбек Сарманович*, д.ф.-м.н,. профессор.*
Тампагаров Куштарбек Бекмуратович *к.ф.-м.н., доцент, ЖАГУ, Кыргызстан, 715600, г.Жалал-Абад, ул.Ленина 57,* e-mail*:* alybaevkurmanbek@rambler.ru, tampagarovkak@mail.ru

В данной работе рассматриваются аналитические функции с малым параметром. Доказано, что некоторые классы таких функций обладают специфическими свойствами. В области изменения аргумента естесственным образом возникают погранслойные линии. Эти линии область делят на части. В каждом из частей модуль функции ограничена или неограничена при стремлении малого параметра к нулю.

Ключевые слова: Аналитическая функция, линии уровня, сингулярное возмущение.

THE BOUNDARY LAYER LINE FOR ANALYTICAL FUNCTIONS WITH A SMALL PARAMETER

Alybaev Kurmanbek Sarmanovich *, DF PhD, professor.*
Tampagarov Kushtarbek Bekmuratovich *PhD, Associate Professor, Jalalabat State Universit, Kyrgyzstan, 715600, Jalal-Abad, Lenina 57,* e-mail*:* alybaevkurmanbek@rambler.ru, tampagarovkak@mail.ru

In this paper we consider the analytic functions with a small parameter . It is proved that some of the classes of such functions have specific properties . In the field of the argument estesstvenno arise boundary-layer line . These lines divide the region into parts. In each of the parts of the function module is limited or unlimited if the small parameter tends to zero.

Keywords: analytic function, level lines, singular perturbation.

1. Введение

Пусть $z(t,\varepsilon)\in Q(\Omega)$ − пространство аналитических функций в Ω; $\Omega\subset C$ −комплексная плоскость и Ω −односвязная область; $0<\varepsilon$ − малый параметр. Из [1] заимствуем следующие определения.

Определение 1. Если $|z(t',\varepsilon)|$ ограничена при $\varepsilon\to 0$, то точка $t'\in\Omega$ называется регулярной для $z(t,\varepsilon)$, в противном случае - нерегулярной (сингулярной).

Определение 2. Точка, в любой окрестности которой существуют как регулярные, так и нерегулярные точки , называется погранслойной точкой.

Определение 3. Любое множество погранслойных точек называется порганслойным множеством.

Определение 4. Погранслойное множество, являющееся непрерывным и, локально взаимно-однозначным образом отрезка называется погранслойной линией.

Примечание 1. Определение носит локальный характер. В общем случае погранслойные линии могут иметь другие формы . Это будет потверждена в последующих примерах.

На основе принятых определений докажем , что для некоторых классов аналитических функций из$Q(\Omega)$ существуют погранслойные линии .

Погранслойные линии существуют не для любых аналитических функций с малыми параметрами. К примеру, пусть

$$z(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+t}.$$

При $\varepsilon \to 0$, функция $z(t,\varepsilon)$ не стремится к нулю, только в окрестности точки $t = 0$. Следовательно для $z(t,\varepsilon)$ несуществуют погранслойные линии.

2. Примеры аналитических функций.

2.1. Пусть

$$z(t,\varepsilon) = e^{\frac{F(t)-F(t_0)}{\varepsilon}} \tag{1}$$

и выполняется условие

U. $F(t) \epsilon Q(\Omega), t_0$ – внутренняя точка Ω; $\forall t \epsilon \Omega :$ $F'(t) \neq 0$

Пусть $t = t_1 + it_2$, где t_1, t_2- действительные переменые, $i = \sqrt{(-1)}.$

Определим функции $Re\,F(t) = F_1(t_1,t_2)$, $JmF(t) = F_2(t_1,t_2)$.

$F(t)\epsilon Q(\Omega)$, F_k $(t_1 t_2)$-гармонические функции ($k=1,2$) .

Определение 5. Множество $\{ (t_1,t_2) \epsilon \Omega \,|F_k(t_1,t_2) = p_k - const\}$ –назовем линией уровня функции $F_k(t_1,t_2)$ и обозначим (p_k).

Пусть $t_0 = t_{10} + it_{20}$.

Линию уровня $\{(t_1,t_2)\epsilon\, \Omega | F_k(t_1,t_2) = F_k(t_{10},t_{20})\}$ обозначим (p_{k0}).

В силу условия U линии уровня (p_k) не имеют точек ветвления т.е через любую точку области Ω проходит единственая линия уровня функции $F_k(t_1,t_2)$. Область Ω полностью покрывается сетью взаимно ортогональных линий уровня функций $F_k(t_1,t_2)$.

Пусть $t\epsilon\, (p_{10})$. Вдоль (p_{10}) функция(1) представима в виде

$$z(t,\varepsilon) = e^{\frac{i(F_2(t_1,t_2)-F_2(t_{10},t_{20}))}{\varepsilon}}. \tag{2}$$

Предел функции (2) при $\varepsilon \to 0$ не существует, но$|z(t,\varepsilon)| \equiv 1$.

Линией уровня (p_{10}) область Ω делится на части Ω_1 и Ω_2, причем имеет место одно из следующих соотношений:

$$\begin{gathered}(\forall t \epsilon\, \Omega_1 : \ F_1(t_1,t_2)\text{-}\,F_1(t_{10},t_{20}) \leq 0 \wedge \ \wedge \\ \wedge\, \forall t \epsilon\, \Omega_2 : \ F_1(t_1,t_2) - F_1(t_{10},t_{20}) \geq 0) \ \vee \\ \vee \ \vee (\forall t \epsilon\, \Omega_1 : \ F_1(t_1,t_2) - F_1(t_{10},t_{20}) \geq 0 \ \wedge \ \wedge \\ \wedge\, \forall t \epsilon\, \Omega_2 : \ F_1(t_1,t_2) - F_1(t_{10},t_{20}) \leq 0).\end{gathered}$$

Равентсва имеют место только для точек (p_{10}).

Таким образом (p_{10}) состоит из множества точек , в любой окрестности которых содержатся регулярные и сингулярные точки .

С другой стороны (p_{10}) – как линия уровня гармонической функции является взаимно-однозначным образом отрезка. Согласно определения 4 линия (p_{10}) является погранслойной линией.

2.2. Рассмотрим пример когда нарушается условие U.

$$z(t,\varepsilon) = e^{\frac{t^n}{\varepsilon}}, \qquad n \epsilon N$$

Для этого случая линия уровня $\{(t_1,t_2)\epsilon\, \mathrm{C} | Ret^n = 0\} = (p_{10})$ в точке t=0 имеет точку ветвления. Вся комплексная плоскость данной линией уровня разделяется на 2n частей. В

каждом из этих частей $Ret^n \leq 0 \vee$, $Ret^n \geq 0$. При этом равенство имеет место только для значений t которые принадлежат (p_{10}).
Части для которых $Ret^n < 0$ являются регулярными, где $Ret^n > 0$ – сингулярными. Ветви (p_{10}) – погранслойные линии .

2.3. Пусть задана функция

$$z(t,\varepsilon) = t^{\frac{1}{\varepsilon}} \tag{3}$$

Функция в точке *t=0* имеет особенность. Представим (3) в следующем виде

$$z(t,\varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon}lnt} = e^{\frac{1}{\varepsilon}[ln|t|+iargt]} \tag{4}$$

Рассмотрим (4) вдоль линии уровня

$$\{t \in \mathrm{C}|\, ln|t| = 0\} = (p_{10}).$$

На этой линии уровня, (4) не имеет предела при $\varepsilon \to 0$, но $|z(t,\varepsilon)| \equiv 1$.

Кривая (p_{10}) всю плоскость делит на две части.

(p_{10}) – есть окружность с цетром в точке $t = 0$ и радиуса $r_0 = 1$. Линии уровня функции $ln|t|$ являются концентрическими окружностями с центром в точке $t = 0$. В частях для которых $r > 1$, функция $ln|t| > 0$.

Следовательно $|z(t,\varepsilon)|$ не ограничена. Если $r < 1$, тогда $|z(t,\varepsilon)|$ ограничена. Таким образом линия уровня (p_{10}) является погранслойной линией.

2.4. В качестве следующего примера рассмотрим следующее линейное сингулярно возмущенное уравнение

$$\varepsilon\, z'(t,\varepsilon) = a(t)\, z(t,\varepsilon) + \varepsilon b(t) \tag{5}$$

с начальным условием

$$z((t_0,\varepsilon) = z^0, \tag{6}$$

где $a(t)$, $b(t) \epsilon Q(\Omega)$, $\Omega \subset \mathrm{C}$ и Ω – односвязная, ограниченная область; t_0 – ее внутренняя точка. U. Пусть $\forall t \in \Omega \ : a(t) \neq 0$.

Решение задачи (5)-(6) представим в виде

$$z(t,\varepsilon) = z^0 e^{\frac{F(t)}{\varepsilon}} + \int_{t_0}^{t} e^{\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}} b(\tau)d\tau, \tag{7}$$

где $F(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau$.

Функция определяемая (7) принадлежит Q(Ω). Для интеграла в (7) путь интегрирования можно выбрать произвольным, но соединяющим точки t_0, t и полностью принадлежащим Ω.

Примечание 2. В дальнейших вычислениях все функции входящие в рассматриваемые выражения являются аналитическими в Ω и ограничены . Следовательно об этом особо не будем оговариваться.

Введем в рассмотрение функции $F_k\ (t_1,t_2)\ \ (k = 1,2)$ как и в примере 1.

Пусть $t \epsilon (p_{10}) = \{t \in \Omega | F_1(t) = 0\}$.

Согласно U имеем $\forall t \in \Omega \ : F'(t) = \frac{\partial F_1}{\partial t_1} - i\frac{\partial F_1}{\partial t_2} \neq 0$.

Отсюда $\forall t \in \Omega \ : \left(\frac{\partial F_1}{\partial t_1} \neq 0\right) \vee \left(\frac{\partial F_1}{\partial t_2} \neq 0\right)$.

Для определенности возьмем $\forall t \in \Omega \ : \frac{\partial F_1}{\partial t_2} \neq 0$. При таком условии из уравнения $F_1(t_1 t_2) = 0$ определяется однозначная, бесконечно дифференцуемая функция $t_2 = \varphi(t_1)$ с областью определения $\alpha_1 < t_1 < \alpha_2$.

В (7) за путь интегрирования возьмем часть(p_{10}) соединяющего точки t_0 и t.

Теперь (5) можно представить в виде

$$z(t,\varepsilon) = z^0 e^{\frac{iF_2(t_1,\varphi(t))}{\varepsilon}} + \int_{t_{10}}^{t_1} e^{\frac{i(F_2(t_1,\varphi(t_1)) - F_2(\tau_1, \ \varphi(\tau_1))}{\varepsilon}} \big(1 + i\varphi'(\tau_1)\big) d\tau_1. \tag{8}$$

К интегралу в (8) применяя интегрирование по частям получим

$$z(t,\varepsilon) = z^0 \, e^{\frac{iF_{21}(t_1)}{\varepsilon}} + \varepsilon\varphi_1(t_{10}) e^{\frac{i(F_{21}(t_1) - F_{21}(t_{10}))}{\varepsilon}} - \varepsilon\varphi_1(t_1) +$$
$$+ \varepsilon \int_{t_{10}}^{t_1} e^{\frac{i(F_{21}(t_1) - F_{21}(\tau_1))}{\varepsilon}} \varphi_1{}'(\tau_1) d\tau_1, \tag{9}$$

где $\quad F_{21}(t_1) \equiv F_2\big(t_1, \ \varphi(t_1)\big), \ \varphi_1(t_1) \equiv -\frac{1 + i\varphi'(t_1)}{F'_{21}(t_1)}.$

Из (9) следует оценка $|z(t,\varepsilon)| \leq |z^0| + c_1\varepsilon$, где $0 < c_1$- некоторая постоянная не зависящая от ε.

Как и в примере 1 рассмотрим области Ω_1 и Ω_2.

Пусть $\tilde{t}_0 = \tilde{t}_{10} + i\tilde{t}_{20}$ произвольная точка принадлежащая (p_{10}). Через эту точку проходит единственная линия уровня

$$\{\, t \in \Omega | F_2(t_1, t_2) = F_2(\tilde{t}_{10} + \tilde{t}_{20})\} = (\tilde{p}_{20}).$$

(p_{20}) является направлением наибыстрейшего возрастания или убывания функции $F_1(t_1, t_2)$. Из точки $(\tilde{t}_{10}, \tilde{t}_{20})$ исходят две направления, одна к Ω_1, а другая к Ω_2. Без ограничения общности будем считать, что в направлении к Ω_1 функция $F_1(t_1, t_2)$ убывает. Тогда в направлении к Ω_2 функция $F_1(t_1, t_2)$ возрастает.

Теперь выберем пути интегрирования. Путь для $t \in \Omega_1$ и $t \in \Omega_2$ состоит из двух частей : части (p_{10}) соединяющего точки t_0 и $\tilde{t}_0$; из части (p_{20}) соединяющего точки $\tilde{t}_0$ и t.

По предложению $\forall t \in \Omega: \frac{\partial F_1}{\partial t_2} \neq 0$ отсюда следует, что$\forall t \in \Omega: \frac{\partial F_2}{\partial t_1} \neq 0$. Таким образом из уравнения

$$F_2(t_1, t_2) = F_2(\tilde{t}_{10}, \tilde{t}_{20})$$

определяется однозначная , бесконечно дифференцируемая функция $t_1 = \Psi(t_2)$ с областью определения $\beta_1 < t_2 < \beta_2$.

Оценим функцию (7) для $t \in \Omega_1$. Учитывая выбранный путь интегрирования из (7) имеем

$$z(t,\varepsilon) = z^0 \, e^{\frac{F_{11}(t_2) + iF_{21}(\tilde{t}_{20})}{\varepsilon}} + \int_{t_{10}}^{\tilde{t}_{10}} e^{\frac{F_{11}(t_2) + iF_{21}(\tilde{t}_{20}) - iF_{21}(\tau_1)}{\varepsilon}} \big(1 + i\varphi'(\tau_1)\big) d\tau_1 +$$
$$+ \int_{\tilde{t}_{20}}^{t_2} e^{\frac{F_{11}(t_2) - F_{11}(\tau_2)}{\varepsilon}} (\Psi'(\tau_2) + i) d\tau_2. \tag{10}$$

Далее учитывая, что $F_{11}(t_2) < 0$ и применяя интегрирование по частям к интегралам в (10) получим следующую оценку.

$$|z(t,\varepsilon)| \leq |z^0| + c_2\varepsilon,$$

где $0 < c_2$ − некоторая постоянная не зависящая от ε.

Эта оценка показывает, что $\forall t \epsilon \Omega_1$ функция $|z(t,\varepsilon)|$ ограничена.

Пусть $t \epsilon \Omega_2$. Для этого случая также можно использовать (10). В этом случае $F_{11}(t_2) > 0$. Применяя интегрирование по частям имеем оценку.

$$|z(t,\varepsilon)| \geq e^{\frac{F_{11}(t_2)}{\varepsilon}} \left||z^0| - c_2\varepsilon\right|. \quad (11)$$

Оценка (11) показывает, что для некоторых точек Ω_2, "отстающих от (p_{10}) на расстояние не зависящего от ε ",$|z(t,\varepsilon)|$ не ограничена.

Например для точек принадлежащих части Ω_2 ограниченного линиями уровней.

$\{ t \epsilon \Omega_2 | F_1(t_1, t_2) = \varepsilon^{\lambda}(0 < \lambda < 1)\}$ и $\{t \epsilon \Omega_2 | F_1(t_1, t_2) = q,\ 0 < q - const$
не зависящая от ε }.

(p_{10}) является локально взаимно однозначным образом отрезка (это вытекает из того, что уравнение (p_{10}) представляется функцией $t_2 = \varphi(t_1)$ с областью определения $\alpha_1 < t_1 < \alpha_2$).Далее (p_{10}) состоит из погранслойных точек, в любой окрестности которых имеются регулярные так и нерегулярные точки.
Из всего сказанного, согласно определения 4, вытекает, что (p_{10}) − погранслойная линия .

3. Выводы: Как показывают проведенные исследования для некоторых классов аналитических функций существуют погранслойные линии.

Список литературы

1. Явление погранслойных линий и асимптотика решений сингулярно возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями/ П.С Панков, К.С. Алыбаев, К.Б.Тампагаров, М.Р.Нарбаев //Вестник ОшГУ.- 2013.- Вып.1 (специальный выпуск). – с.227-231.

УДК 517.923:517.977.5

ДЕКОМПОЗИЦИЯ И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С МАЛЫМ ШАГОМ

Аширбаев Бейшембек Ыбышевич, *кандидат физико-математических наук, доцент КГТУ им. И. Раззакова, Кыргызстан, 720044, г.Бишкек, пр. Ч. Айтматова 66,*
e-mail: ashirbaev-58@mail.ru

Аннотация: Цель статьи – разработка алгоритмов решений задач оптимального управления с малым шагом на основе декомпозиции системы объекта управления.

При решении задач управления объектами из различных областей науки и техники возникают сложности, обусловленные высокой размерностью моделей и наличием нескольких временных масштабов. В связи с этим актуальной является задача декомпозиция моделей.

Предлагаемый подход сочетает в себе приемы асимптотических и приближенных методов анализа.

Ключевые слова: декомпозиция системы, дискретная система с малым шагом, матрица простой структуры, период квантования, инвариантное подпространство.