УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Аблабеков Бактыбай Сапарбекович, *доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая и прикладная математика» Кыргызского государственногого технического университета, Кыргызская Республика, г. Бишкек*
Курманбаева Айнура Кудайбергеновна, *канд. физ.-мат. наук, доцент, заведующая кафедрой «Высшая и прикладная математика» Кыргызского государственного технического университета, Кыргызская Республика, г. Бишкек*

В работе изучается вопрос об однозначной разрешимости обратной задачи определения правой части для одномерного уравнения фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде зависящей от времени по переопределению во внутренней точке. Сначала обратная задача сводится к эквивалентной системе интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода. Далее пользуясь свойствами фундаментального решения оператора фильтрации доказывается существование и единственность решения исходной обратной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, уравнение фильтрации, условия переопределения, интегральное уравнение Вольтерра.

INVERSE PROBLEM FOR THE FILTRATION OF LIQUIDS IN FRACTURED POROUS MEDIA

B.S.Ablabekov, *professor, KSTU after I.Razzakov*
A.K.Kurmanbaeva, *phd,docent, KSTU after I.Razzakov*

Abstract. We have studied the inverse problem of determining the right side of the time-dependent one-dimensional equations of fluid flow in fractured porous media with a redefinition of the internal point. First, the inverse problem is reduced to an equivalent system of integral equations of type Volterra of the second kind. Then using the properties of the fundamental solution of the filtering operator the existence and uniqueness of solutions of the inverse problem is proved.

Keywords: inverse problem, filtration equation, over determination conditions, Volterra integral equation

Введение. Известно, что в теории обратных задач для уравнений с частными производными основополагающую роль играют свойства решений соответствующих прямых задач. Задача Коши и начально-краевые задачи для линейных псевдо параболических уравнений изучены многими авторами. В частности, в работе [1] получено в явном виде решение задачи Коши для одномерного псевдопараболического уравнения.

Обратные задачи возникают в самых различных областях человеческой деятельности таких, как геофизика, сейсмология, аэродинамика, гидродинамика, теории фильтрации, разведка полезных ископаемых, биология, медицина компьютерной томографии и т.д., что ставит их в ряд актуальных проблем современной математики.

Обратные задачи для псевдопараболических уравнений, в частности для уравнения фильтрации жидкостей в трещиновато-пористой среде изучались рядом авторов (см.[1]-[3]).

Более подробную библиографию по обратным задачам для псевдопараболических уравнений можно найти в монографии [1].

Целью данной работы является доказательство существования и единственности решения обратной задачи для уравнения фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде с переопределением во внутренней точке.

Ранее обратные задачи для псевдопараболического уравнения с условием внутреннего переопределения изучались в работах [1]. В [2] изучался вопрос существования решений соответствующей обратной задачи для псевдопараболического уравнения с гладкими данными. В данной работе исследование однозначной разрешимости обратной задачи проводится более слабых по сравнению с работой [1] требованиях на гладкость функций, входящих в условие задачи.

1.Постановка задачи. Пусть $Q_T=\left\{(x,t)\middle|\, x\in R,\quad 0<t\le T\right\}$, $Q_T^{+}=\{(x,t):0<x<+\infty,\, 0<t\le T\}$, где $T>0$ – заданная фиксированная постоянная.

Обратная задача. Найти пару функций $\{u(x,t),\, f(t)\}\in C^{(2,1)}_{M_\gamma}(Q_T^{+})\times C([0,T]\}$ удовлетворяющую уравнению

$$Lu=u_t-\eta u_{xxt}-\chi u_{xx}=f(t)h(x,t)+g(x,t),\quad (x,t)\in Q_T^{+}, \tag{1}$$

начальному условию

$$u(x,0)=u_0(x),\qquad x\in[0,+\infty), \tag{2}$$

граничному условию

$$u_x(0,t)=\varphi(t),\qquad 0\le t\le T, \tag{3}$$

и условию переопределения

$$u(0,t)=\psi(t),\qquad 0\le t\le T, \tag{4}$$

где $u_0(x), h(x,t), g(x,t)$, $\varphi(t), \psi(t)$ - некоторые заданные функции.

Как известно, уравнение (1) описывает фильтрацию неньютоновской жидкости в пористой среде [3], где χ , η – коэффициенты пьезопроводности и неравновесности.

2. Предварительное сведения.

Введем некотрые обозначения и функциональные пространства, используемые в дальнейшем.

$C^{(n,m)}(Q_T)$- пространство функций $v(x,t)$, определенных в Q_T и таких, что $\dfrac{\partial^{k+l}v}{\partial x^k\partial t^l}\in C(Q_T)$ при $0\le k\le n,\quad 0\le l\le m$;

$M_\gamma(Q_T)$ - класс функций $v(x,t)$, заданных на Q_T, для которых имеет место оценка $|v(x,t)|\le C(t)\exp\{\alpha|x|\},\, x\in R,\quad 0\le t\le T, C(t)\in C([0,T])$, $\gamma\ge 0$ - вещественное число;

$M_\gamma(R)$ - класс функций $f(x)$, для которых имеет место оценка $|f(x)|\le C\exp\{\gamma|x|\},\quad x\in R,\ C=const>0$;

$C^{(n,m)}_{M_\gamma}(Q_T)$ - множество функций из $C^{(n,m)}(Q_T)$, которые вместе со своими производными вплоть до порядка (n,m) принадлежат $M_\gamma(Q_T)$, т.е. $\dfrac{\partial^{k+l}v}{\partial x^k\partial t^l}\in M_\gamma(Q_T)$ при $0\le k\le n,\quad 0\le l\le m$, аналогично определяется пространство $C^{(n)}_{M_\gamma}(R)$;

Сначала сформулируем терему существования и единственности решения прямой задачи (1)-(3) при $h(x,t)=0$, доказанное в [2] нужном далее нам виде

Теорема 1. Пусть $u_0(x)\in C^{(2)}_{M_\gamma}(\overline{R}^+)$, $g(x,t)\in C^{(1,0)}_{M_\gamma}(\overline{Q}^+_T)$ при γ<1-*T*, кроме того, $\varphi(t)\in C^{(1)}([0,T])$ и выполнены условия согласования $u_0'(0)=\varphi(0)=0,\ g_x(0,t)=0$. Тогда существует единственное классическое решение задачи (1)-(3), принадлежащее $C^{(2,1)}_{M_\gamma}(Q^+_T)$. Это решение имеет вид

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^\infty(Z(x-\xi,t-\tau)-Z(x+\xi,t-\tau))g(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^\infty(Z(x-\xi,t)-Z(x+\xi,t))L_1[u_0](\xi)d\xi+ \tag{5}$$
$$+\int_0^t Z(x,0,t-\tau)\left[\eta\varphi'(\tau)+\chi\varphi'(\tau)\right]d\tau,$$

где $E(x,t)=\theta(t)Z(x,t)$ - фундаментальное решение оператора L, а

$$Z(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\eta\xi^2+1}e^{-\frac{\chi\xi^2}{\eta\xi^2+1}t+i\xi x}d\xi.$$

Отметим, одно свойства функции $E(x,t)$ ([2]) при $\gamma^2=1/\eta,\ \beta=\chi/\mu$:

$$\left|\frac{\partial^{k+l}E(x,t)}{\partial x^k\partial t^l}\right|\le\frac{e^{-\beta|x|(1-\alpha t)}}{2}\left(\alpha(2+\beta|x|)\right)^l\left(\beta(1+\alpha t)\right)^k. \tag{6}$$

3. Сведение обратной задачи к интегральному уравнению.

Теорема 2. Пусть $u_0(x)\in C^{(2)}_{M_\gamma}(R)$, $h(x,t),g(x,t)\in C^{(2,0)}_{M_\gamma}(\overline{Q}^+_T)$, $\varphi(t)\in C^1([0,T])$, $\psi(t)\in C^1([0,T])$, $|h(0,t)|\ge h_0>0$ и выполнены условия согласования $u_0'(0)=\varphi(0)=0$, $u_0(0)=\psi(0)=0$, $h_x(0,t)=g_x(0,t)=0$. Тогда существует единственное решение обратной задачи (1)-(4), такое, что $\{u(x,t),f(t)\}\in C^{(2,1)}_{M_\gamma}(Q^+_T)\times C([0,T]\}=Q$.

Доказательство.Пусть $C^1_0([0,T])=\{r(t):r(t)\in C^1([0,T]),\ r(0)=r'(0)=0\}$.

Заметим, что для доказательства существования и единственности решения задачи обратной задачи (1)-(4) в классе Q достаточно доказать существование и единственность обратной задачи определения пары функций $\{u(x,t),f(t)\}\in C^{(2,1)}_{M_\gamma}(Q^+_T)\times C_0([0,T])\}=Q_0$ для любой $\psi(t)\in C^1_0([0,T])$ из условий

$$u_t-\eta u_{xxt}-\chi u_{xx}=f(t)h(x,t),\quad (x,t)\in Q^+_T, \tag{7}$$
$$u(x,0)=0,\qquad x\in[0,+\infty), \tag{8}$$
$$u_x(0,t)=0,\qquad 0\le t\le T, \tag{9}$$
$$u(0,t)=\psi(t)\quad 0\le t\le T. \tag{10}$$

В самом деле, пусть $(u,f)\in Q$ - решение задачи (1)-(4). Тогда (u,f) можно представить в виде

$$\{u(x,t),f(t)\}=\{v(x,t),0\}+\{w(x,t),f(t)\}, \tag{11}$$

где $v(x,t)$ - решение в Q^+_T прямой задачи

$$v_t - \eta\, v_{xxt} - \chi\, v_{xx} = g(x,t), \quad (x,t) \in Q_T^+, \tag{12}$$
$$v(x,0) = u_0(x), \qquad x \in [0,+\infty), \tag{13}$$
$$v_x(0,t) = \varphi(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{14}$$

а пара $\{w(x,t), f(t)\}$ - решение в Q_T^+ обратной задачи

$$w_t - \eta\, w_{xxt} - \chi\, w_{xx} = f(t)h(x,t), \quad (x,t) \in Q_T^+, \tag{15}$$
$$w(x,0) = 0, \qquad 0 \le x < \infty, \tag{16}$$
$$w_x(0,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \tag{17}$$
$$w(0,t) = \psi(t) - v(0,t), \qquad 0 \le t \le T. \tag{18}$$

При этом в силу условий согласования и теоремы 1, имеем $v(x,t) \in C^{(2,1)}_{M_\gamma}(\overline{Q}_T^+)$, $\psi(t) - v(0,t) \in C_0^1([0,T])$.

Обратно, имея решение задачи (7)-(10) для любой $\psi(t) \in C_0^1([0,T])$, легко построить решение более общей задачи (1)-(4). Для этого достаточно решить задачи (12)-(14), (15)-(18) и воспользоваться формулой (11).

Используя фундаментальное решение оператора L, заменим задачу (7)-(9), эквивалентным интегральным представлением

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^\infty \left[E(x+\xi, t-\tau + E(x+\xi, t-\tau)\right] f(\tau) h(\xi,\tau)\, d\xi d\tau. \tag{19}$$

Так как

$$u_t = \eta\, u_{xxt} + \chi\, u_{xx} + f(t)h(x,t),$$

то из (7) положив $x=0$, и учитывая условие (10), представление (19), имеем

$$\psi'(t) = \int_0^t \int_0^\infty \left(\eta \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} + \chi \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left[E(x-\xi, t-\tau + E(x+\xi, t-\tau)\right]\Big|_{x=0} f(\tau) h(\xi,\tau)\, d\xi d\tau +$$
$$+ f(t)h(0,t)$$

или

$$f(t) + \int_0^t K(t,\tau) f(\tau)\, d\tau = g_1(t) \tag{20}$$

где

$$K(t,\tau) = \frac{1}{h(0,t)} \int_0^\infty \left(\eta \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} + \chi \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left[E(x-\xi, t-\tau + E(x+\xi, t-\tau)\right]\Big|_{x=0} h(\xi,\tau)\, d\xi, \tag{21}$$

$g_1(t) = \psi'(t) / h(0,t)$.

Покажем, что интегральное уравнение (20) имеет единственное решение в классе $C([0,T])$. Для этого докажем, что ядро определяемой формулой (21) является непрерывной.

Так как $h(x,t) \in C^{(2,0)}_{M_\gamma}(\overline{Q}_T)$, то учитывая оценки (6), из (21) получим, что функция $K(t,\tau)$ удовлетворяет неравенству $|K(t,\tau)| \le C$, где C зависит от $E(x,t), h(x,t), \eta, \chi$.

Следовательно, ядро $K(t,\tau)$ является непрерывной. Отсюда следует, что решение интегрального уравнения (20) существует единственно и имеет вид

$$f(t)=\int_0^t R(t,\tau)g_1(\tau)d\tau+g_1(t), \qquad (22)$$

где функция $R(t,\tau)$ – разрешающее ядро для $K(t,\tau)$.

Легко показать, что $f(t)$ функция определяемая формулой (22) принадлежит пространству $f(t)\in C([0,T])$. Подставляя (22) в (19), найдем функцию $u(x,t)$.

Теперь, покажем, что пара функций $u(x,t)$, $f(t)$, где $f(t)$- определена формулой (22), а $u(x,t)$ определяется уравнением (19) удовлетворяет задаче (1)-(4) с однородными начальными и граничными условиями. Легко заметить, что функция $u(x,t)$ заданная формулой (19) является единственным решением задачи (1)-(3). Проверим, что условие (4) также выполнено.

Пусть функция $u(0,t)=\psi_1(t)$ удовлетворяет равенству

$$\psi_1(t)=\left(\eta\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}+\chi\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\int_0^t\int_0^\infty\left[E(x+\xi,t-\tau+E(x+\xi,t-\tau)\right]f(\tau)h(\xi,\tau)\Big|_{x=0}d\xi d\tau+ \qquad (23)$$

$$+h(0,t)f(t).$$

Так как $f(t)$- решение уравнения (20), то из (19) и (23) относительно функции $\tilde{\psi}(t)=\psi(t)-\psi_1(t)$ получим обыкновенные дифференциальные уравнения с нулевыми начальными данными: $\tilde{\psi}'(t)=0,\quad \tilde{\psi}(0)=0$.

Следовательно, $\psi(t)=\psi_1(t)$ и условие (4) выполнено.

Список литературы

1. Аблабеков, Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений [Текст] /Б.С.Аблабеков. - Бишкек: Илим, 2001. –183 с.
2. Атаманов, Э.Р. Неклассические задачи для псевдопараболических уравнений [Текст] /Э.Р.Атаманов, О.Ш.Мамаюсупов. – Фрунзе: Илим, 1990. –101с.
3. Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах [Текст] /Г.И.Баренблатт, Ю.П.Желтов, И.Н.Кочина // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24.- №5. – С. 852– 864.
4. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи [Текст] /С.И.Кабанихин.– Новосибирск: Сибирское научное. изд.- 2009. – 457с.

УДК 538.113:539.12.04. 548.4

ЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ И РАСПАД РАДИАЦИОННЫХ ДЕФЕКТОВ В ЩГК

Арапов Б., Орозбаева А.А., Кайназарова Г. Т., *ОшГУ, Кыргызстан, 723500, г.Ош, ул.Ленина 331, e-mail:baish-arapov@yandex.ru*

Возникновение рекомбинационной люминесценции и распад радиационно-наведенных дефектов в ионных кристаллах происходят в результате ионных, ионно-дырочных и ионно-электронных процессов. Предложен механизм распада радиационных дефектов и возникновения рекомбинационной люминесценции в ЩГК.

Ключевые слова: рекомбинационная люминесценция, радиационные дефекты, распад дефектов, ионные процессы, ионно-дырочные процессы, ионно-электронные процессы, механизм распада.