$$\| \varphi_2(t,\varepsilon) \| = \| \frac{1}{\varepsilon}\int_a^t X(t,s,\varepsilon)\cdot[u(s)-u(t)]ds - [u(t)-u(s)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-a)} \| \le$$

$$\le L\{(t-s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-s)}|_{s=a}^{s=t} + \int_a^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-s)}ds + (t-a)e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-a)}\} \le$$

$$\le | L\{-(t-a)e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-a)} + \int_a^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-s)}ds - (t-a)e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-a)}\} \le L\varepsilon(1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-a)}) \le$$

$$\le L\varepsilon; \quad (17)$$

Так как $|\varphi(t,\varepsilon)| = |\varphi_1(t,\varepsilon)| + |\varphi_2(t,\varepsilon)|$, то

$$|\varphi(t,\varepsilon)| = (M_0 N_0 L(b-a)e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-a)} + L\varepsilon), \text{ где } t \in [a,b] \quad (18)$$

Лемма 1 доказана.

Список литературы

1. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. Докл.АН СССР. – 1959 -Т.127, № 1-с.31-33
2. Иманалиев М.И. Методы решения нелинейных обратных задач и их приложения. – Фрунзе: Илим, 1977 – 348 с.
3. Иманалиев М.И., Асанов А.А. Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений Вольтерра первого рода. //Исследования по интегро – дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1988 –Вып. 21.-с.3-38
4. Саадабаев А.С. Оценка точности приближенного решения интегрального уравнения первого рода в равномерной метрике.// там же - с. 77-83.

УДК 517

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА

Сапарова Гульмира Баатыровна *Ошский Технологический Университет, кафедра «Прикладная математика», г. Ош E-mail:gulya141005@mail.ru*

Построена регуляризация решения системы нелинейного интегрального уравнения Фредгольма первого рода в пространстве C[a,b].

Ключевые слова: интегральные уравнения, первого рода, единственность, резольвента, разрывное ядро, решение, существование, условие Липшица, регуляризация.

REGULARIZATION SOLUTION SYSTEM OF NON – LINED INTEGRAL EQUATION OF FREDGOLM OF FIRST TYPE.

Gulmira Saparova *Osh Technological University, chair "Applied Mathematics", Osh city E-mail:gulya141005@mail.ru*

Partial regularization of solutions system of non – lined integral equation of Fredgolm of first type with discontinuous kernel in sphere C[a,b] is provid

Key words: *integral equation of the first kind, discontinuous kernel, solution, existence, uniqueness, resolvent, Lipschitz condition, regularization.*

Рассмотрим системy

$$\int_a^t H(s)u(s)ds + \int_t^b N(s)u(s)ds + \int_a^t K(t,s,u(s))ds = g(t) \quad t\in[a,b], \tag{1}$$

где *H(s),N(s)* – n x n – мерные известные матричные функции, K(t,s,u(s)) – известная непрерывная n – мерная вектор-функция, g(t) и u(t) – известная и искомая функции.

Наряду с системой (1) будем рассматривать систему

$$\varepsilon v(t,\varepsilon) + \int_a^t H(s)v(s,\varepsilon)ds + \int_t^b N(s)v(s,\varepsilon)ds + \int_a^t K(t,s,v(s,\varepsilon))ds = g(t) + \varepsilon u(a), \tag{2}$$

где u(t) – решение системы (1), 0 < ε - малый параметр.

Введем обозначения:

3) $<\cdot,\cdot>$ - скалярные произведения в R^n, ||A||, ||u|| - нормы соответственно n x n – мерной матрицы A и n – мерного вектора u, то есть для любых $u=(u_1,u_2,.....u_n), v=(v_1,v_2,.....v_n)\in R^n, <u,v>=u_1v_1+u_2v_2+.....+u_nv_n$,

$\|u\|=\sqrt{<u,u>}$;

4) $C_n[a,b]$- пространство n – мерных векторов с элементами из C[*a,b*], $\|\cdot\|_c$-норма в $C_n[a,b]$, то есть для любого $u(t)\in C_n[a,b]$

$$\|u(t)\|_C = \max_{t\in[a,b]}\|u(t)\|$$

Предполагаем выполнение следующих условий:

а) $\det[H(t)-N(t)]\neq 0$ при всех t∈[*a,b*]. Не ограничиваясь общности будем считать $(H(t)-N(t))=I_n$ при всех t∈[a,b], где $I_n - nxn$- мерная единичная матрица. Так как в случае $\det[H(t)-N(t)]\neq 0$, t∈[*a,b*] в системе (1) можем сделать замену $u(t)=[H(t)-N(t)]^{-1}u_1(t)$;

б) при t > τ для любых $(t,s,u_1),(\tau,s,u_1),(t,s,u_2),(\tau,s,u_2)\in G\times R$

справедлива оценка:

$$|K(t,s,u_1)-K(\tau,s,u_1)-K(t,s,u_2)+K(\tau,s,u_2)|\le M_1(t-\tau)(u_1-u_2)$$

где $G=\{(t,s): a\le s\le t\le b\}$, 0 < M_1 – известная постоянная.

Предположим выполнения следующих условий:

в) $\det(I_n - M(\varepsilon))\neq 0$ при ε > 0, где

$$M(\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\int_a^b N(s)X(s,a,\varepsilon)ds, \quad X(t,s,\varepsilon)=I_n e^{-\frac{t-s}{\varepsilon}};$$

г) $\lambda_i(t), i=1,2,.....n-$ собственные значения матрицы $\frac{1}{2}[H(t)-N(t)+H^*(t)-N^*(t)]$ и $\min\lambda_i(t)=\lambda(t)\ge\alpha>0$, при t∈[*a,b*];

д) K(t,t,u)=0, для любых (t,u)∈[*a,b*]xR;

е) K(t,s,0)=0, при (t,s) ∈G={(t,s): $a\le s\le t\le b$} и

$$\| X(t,s,\varepsilon) \| = e^{-\frac{t-s}{\varepsilon}}$$

$$N_0 = \sup_{t\in[a,b]} \|N(s)\|$$

Подставляем в систему (2) формулу

$$v(t,\varepsilon) = u(t) + \xi(t,\varepsilon) \tag{3}$$

где u(t) – решение системы (1).

$$\varepsilon\xi(t,\varepsilon) + \int_a^t H(s)\xi(s,\varepsilon)ds + \int_t^b N(s)\xi(s,\varepsilon)ds = -\int_a^t [K(t,s,u(s)+\xi(s,\varepsilon)) - K(t,s,u(s))]ds -$$

$$-\varepsilon[u(t)-u(a)].$$

Вводим обозначения

$$g(t,\varepsilon) = -\int_a^t [K(t,s,u(s)+\xi(s,\varepsilon)) - K(t,s,u(s))]ds - \varepsilon[u(t)-u(a)] \tag{4}$$

Отсюда применяя формулу Дирихле, имеем

$$\xi(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} X(t,a,\varepsilon)\cdot(I_n - M(\varepsilon))^{-1} \cdot \int_a^b\int_\tau^b N(s)[K(s,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon)) - K(s,\tau,u(\tau))]d\tau ds +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon} X(t,a,\varepsilon)\cdot(I_n - M(\varepsilon))^{-1} \int_a^b N(s)[u(s)-u(a)]ds -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^3} X(t,a,\varepsilon)\cdot(I_n - M(\varepsilon))^{-1} \int_a^b\int_\tau^b\int_\tau^s N(s)X(s,\rho,\varepsilon)\cdot[K(\rho,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon)) - K(\rho,\tau,u(\tau))]d\rho$$

$$ds d\tau - \frac{1}{\varepsilon^2} X(t,a,\varepsilon)\cdot(I_n - M(\varepsilon))^{-1} \int_a^b\int_a^s N(s)X(s,\rho,\varepsilon)[u(\rho)-u(a)]d\rho ds -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t K(t,s,u(s)+\xi(s,\varepsilon)) - K(t,s,u(s))ds - [u(t)-u(a)] +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_a^t\int_\tau^t X(t,s,\varepsilon)\cdot[K(s,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon)) - K(s,\tau,u(\tau))]d\tau ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_a^t X(t,s,\varepsilon)\cdot[u(s)-u(a)]ds$$

(5)

Введем, новые обозначения $H_1(t,\tau,\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon), H_2(t,\tau,\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon), \varphi(t,\varepsilon)$, и получаем новое уравнение

$$\xi(t,\varepsilon) = \int_a^b H_1(t,\tau,\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)d\tau + \int_a^t H_2(t,\tau,\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)d\tau + \varphi(t,\varepsilon) \tag{6}$$

где

$$H_1(t,\tau,\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \mathrm{X}(\mathrm{t},\mathrm{a},\varepsilon)(\mathrm{I}_\mathrm{n} - \mathrm{M}(\varepsilon))^{-1} \int_\tau^b \mathrm{N(s)}[\mathrm{K}(\mathrm{s},\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon)) - \mathrm{K}(\mathrm{s},\tau,\mathrm{u}(\tau))]\mathrm{ds} -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^3} \mathrm{X}(\mathrm{t},\mathrm{a},\varepsilon)(\mathrm{I}_\mathrm{n} - \mathrm{M}(\varepsilon))^{-1} \cdot \int_\tau^b\int_\tau^s N(s)X(s,\rho,\varepsilon)[K(\rho,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon)) - \mathrm{K}(\rho,\tau,\mathrm{u}(\tau))]\mathrm{d}\rho\mathrm{ds}, \tag{9}$$

$$H_2(t,\tau,\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}[K(t,s,u(s)+\xi(s,\varepsilon))-K(t,s,u(s))]+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\rho}^{t}X(t,\rho,\varepsilon)[\cdot K(\rho,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))-K(\rho,\tau,u(\tau))]d\rho, \qquad (7)$$

$$\varphi(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}X(t,a,\varepsilon)(I_n-M(\varepsilon))^{-1}\int_a^b N(s)[u(s)-u(a)]ds-$$
$$-\frac{1}{\varepsilon^2}X(t,a,\varepsilon)(I_n-M(\varepsilon))^{-1}\int_a^b\int_a^s N(s)X(s,\rho,\varepsilon)[u(\rho)-u(a)]d\rho ds-$$
$$-[u(t)-u(a)]+\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t X(t,s,\varepsilon)[u(s)-u(a)]ds, \qquad (8)$$

ЛЕММА 1. Пусть выполняются условия а), б), в), и г) $\left\|(I_n-M(\varepsilon))^{-1}\right\|\le M_0$, где известная постоянная $0<M_0$ не зависит от ε > 0, $H_1(t,\tau,\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon), H_2(t,\tau,\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon), \varphi(t,\varepsilon)$ определены по формулам (6),(7),(8), тогда справедливы следующие оценки:

$$\left\|H_1(t,\tau,\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\right\|\le\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-a)}M_0N_0M_1(b-a) \text{ при всех } t,\tau\in[a,b]; \qquad (9)$$

$$\left\|H_2(t,\tau,\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\right\|\le M_1 \quad \text{при всех } (t,\tau)\in G; \qquad (10)$$

$$\left\|\varphi(t,\varepsilon)\right\|\le(M_0N_0L(b-a)e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-a)}+L\varepsilon), \text{при всех } t\in[a,b] \qquad (11)$$

где

$$N_0=\sup_{t\in[a,b]}\left|N(s)\right|,$$

а функция u(t) удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом L, то есть для любых t,s ∈ [a,b], при t > s справедлива оценка

$$\left|u(t)-u(s)\right|\le L(t-s)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются условия а), б), в) и система (1) имеет решение $u(t)\in C_n[a,b]$ и

$$N_1=M_0M_1N_0(b-a)e^{M_1(b-a)}<1,$$

$$M_0=(I_n-M(\varepsilon))^{-1}>0$$
$$N_0=\sup_{t\in[a,b]}|N(t)|$$

Тогда, $v(t,\varepsilon)$ - решение системы (2) при ε→0 сходится по норме L[a,b] к u(t). При этом справедлива оценка

$$\int_a^b |v(t,\varepsilon)-u(t)|dt \le \frac{1}{(1-N_1)}(M_0 N_0 L\varepsilon(b-a)+L\varepsilon)e^{M_1(b-a)} \tag{12}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Получив оценки функций $H_1(t,\tau,\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon), H_2(t,\tau,\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon), \varphi(t,\varepsilon)$, имеем

$$\begin{aligned}&\int_a^t |\xi(t,s)|\,ds \le M_0 M_1 N_0(b-a)\int_a^b |\xi(\tau,\varepsilon)|\,d\tau + M_1\int_a^t\left(\int_a^\tau |\xi(\tau,\varepsilon)|\,d\tau\right)dt + \\ &+(\mathrm{M}_0 N_0 L\varepsilon(b-a)+L\varepsilon) \qquad t\in[a,b]\end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\sup_{t\in[a,b]} |N(t)| = N_0$$

$$N_3 = M_0 M_1 N_0(b-a)\int_a^b |\xi(\tau,\varepsilon)|\,d\tau$$

$$N_4 = M_0 N_0 L\varepsilon(b-a)+L\varepsilon$$

Тогда, имеем

$$\int_a^t |\xi(t,s)|\,ds \le M_1\int_a^t\left(\int_a^\tau |\xi(\tau,\varepsilon)|\,d\tau\right)dt + N_3 + N_4, \qquad t\in[a,b]$$

После применения неравенства Гронуолла-Беллмана, имеем

$$\begin{aligned}&\int_a^t |\xi(t,s)|\,ds \le \{M_0 M_1 N_0(b-a)\int_a^b |\xi(\tau,\varepsilon)|\,d\tau + (M_0 N_0 L\varepsilon(b-a)+ \\ &+L\varepsilon)\}e^{M_1(b-a)}\end{aligned} \tag{14}$$

Накладываем условия

$$N_1 = M_0 M_1 N_0(b-a)e^{M_1(b-a)} < 1,$$

где $M_0 = (I_n - M(\varepsilon))^{-1} > 0$

Тогда из (13), имеем

$$(1-N_1)\int_a^b |\xi(\tau,\varepsilon)|\,d\tau \le (M_0 N_0 L\varepsilon(b-a)+L\varepsilon)e^{M_1(b-a)}$$

Отсюда получаем оценку (12).
Теорема 1 доказана.

Список литературы

5. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. Докл.АН СССР. – 1959 -Т.127, № 1-с.31-33

6. Иманалиев М.И. Методы решения нелинейных обратных задач и их приложения. – Фрунзе: Илим, 1977 – 348 с.
7. Иманалиев М.И., Асанов А.А. Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений Вольтерра первого рода. //Исследования по интегро – дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1988 –Вып. 21.-с.3-38
8. Саадабаев А.С. Оценка точности приближенного решения интегрального уравнения первого рода в равномерной метрике.// там же - с. 77-83.
9. Сыдыков Т. Приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода в пространстве C(0,1).// Всесоюз. конф. по некорректно поставленным задачам.- Фрунзе: Илим, 1979
10. Асанов А.А, Сыдыков Т., Сапарова Г. Регуляризация интегрального уравнения Фредгольма первого рода с разрывным ядром.//Сб. науч. статей. – Бишкек:ИГЗ КГПУ им. И.Арабаева, 2002. – с. 225-231.