УДК 517.968.74

ОБ ОЦЕНКАХ СНИЗУ РЕШЕНИЙ ВОЛЬТЕРРОВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ФУНКЦИОНАЛОМ

С. Искандаров, Г.Т. Халилова

Устанавливаются достаточные условия оценки снизу на полуоси и стремления к бесконечности решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка с функционалом.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение; оценка снизу; стремление к бесконечности; многообразие начальных данных; влияние интегральных возмущений.

ABOUT LOWER ESTIMATES OF SOLUTIONS OF VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FIRST ORDER WITH A FUNCTIONAL

S. Iskandarov, G.T. Khalilova

The paper establishes the sufficient conditions for lower estimates on the half and the tend to infinity of solutions of linear Volterra integro-differential equation of first order with the functional.

Keywords: integro-differential equation; the lower estimates; tend to infinity; a variety of initial data; the impact of integrated perturbations.

Все фигурирующие ниже функции и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \ge t_0$, $t \ge \tau \ge t_0$; $J = [t_0, \infty)$; ИДУ – интегро-дифференциальное уравнение; ДУ – дифференциальное уравнение; ФДУ – функционально – ДУ. В статье решается следующая

ЗАДАЧА. Установить достаточные условия для оценки снизу на бесконечном полуинтервале J и стремления к бесконечности при $t \to \infty$ решений линейного неоднородного ИДУ первого порядка типа Вольтерра:

$$x'(t) + a(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau = f(t) + F(t;x), \quad t \ge t_0 \tag{1}$$

при выполнении условия

$$xF(t;x) \ge 0. \tag{F}$$

Эта задача в такой общей постановке решается впервые. Отметим, что аналогичная задача решена в [1] для линейного однородного ИДУ вида (1) $f(t) \equiv 0$, $F(t;x) \equiv 0$, а в [2] для линейного неоднородного ИДУ вида (1) ($F(t;x) \equiv 0$). В настоящей работе некоторые результаты из [2, 3] переносятся на случай ИДУ (1) и развивается метод цитированных работ, а именно метод весовых и срезывающих функций [3]. При этом выявляется влияние на ограниченность решений простейшего линейного ДУ:

$$x'(t) = f(t), \quad t \ge t_0 \tag{1_1}$$

и на ограниченность решений ФДУ

$$x'(t) = F(t;x), \quad t \ge t_0, \tag{1_2}$$

т.е. сформулированная задача решается в случаях, когда все решения ДУ (1_1) и ФДУ (1_2) могут быть ограниченными на ОА J.

Отметим также, что оценки снизу решений близких к (1) уравнений проведены в работах [4–7].

Речь идет о решениях $x(t) \in C^1(J,R)$ ИДУ (1) с любым начальным данным $x(t_0) \in R$. Предполагается, что такое решение ИДУ (1) существует.

Пусть [1, 2]: $0 < \varphi(t)$ – некоторая весовая функция

$$K(t,\tau) = \sum_{i=1}^{n} K_i(t,\tau), \; f(t) = \sum_{i=0}^{n} f_i(t);$$

(K), (f) $\psi_i(t)$ ($i = 1..n$) – некоторые срезывающие функции;

$R_i(t,\tau)$ $\varphi(t)$ $K_i(t,\tau)$ $(\psi_i(t)\,\psi_i(\tau))^{-1}$, $E_i(t) \equiv \varphi(t)\, f_i(t)\, (\psi_i(t))^{-1}$ ($i = 1..n$); $c_i(t)$ $i = 1..n$ – некоторые функции.

Далее поступаем аналогично как в [2, 3]. Для произвольно фиксированного решения $x(t)$ ИДУ (1) умножаем на $\varphi(t)\,x(t)$, интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, при этом вводим условия (K), (f), функции $\psi_i(t)$, $R_i(t,\tau)$, $E_i(t)$, $c_i(t)$ с применением лемм 1.4, 1.5 [8], а также применяем следующее преобразование с выделением полного квадрата и с условием $a(t) \neq 0$:

$$\int_{t_0}^{t}[a(s)\varphi(s)(x(s))^2-2f_0(s)\varphi(s)x(s)]ds=\int_{t_0}^{t}\varphi(s)a(s)[(x(s))^2-2f_0(s)(a(s))^{-1}x(s)+(f_0(s))^2(a(s))^{-2}-(f_0(s))^2(a(s))^{-2}]ds=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\varphi(s)a(s)[x(s)-f_0(s)(a(s))^{-1}]^2ds-\int_{t_0}^{t}\varphi(s)(f_0(s))^2(a(s))^{-1}ds.$$

Тогда получаем тождество:

$$\varphi(t)(x(t))^2+\int_{t_0}^{t}\varphi(s)a(s)[x(s)-f_0(s)(a(s))^{-1}]^2ds+\int_{t_0}^{t}\Delta_1(s)\varphi(s)(x(s))^2ds+\sum_{i=1}^{n}\{R_i(t,t_0)(X_i(t,t_0))^2-2E_i(t)X_i(t,t_0)+$$

$$+c_i(t)-\int_{t_0}^{t}[R_i'(s,t_0)(X_i(t,t_0))^2-2E_i'(s)X_i(s,t_0)+c_i'(s)]ds+\int_{t_0}^{t}R_{i\tau}'(t,\tau)(X_i(t,\tau))^2d\tau-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}R_{is\tau}''(s,\tau)(X_i(s,\tau))^2d\tau\,ds\}\equiv$$

$$\equiv c_0-\int_{t_0}^{t}\varphi(s)(f_0(s))^2(a(s))^{-1}ds+2\int_{t_0}^{t}\varphi(s)x(s)F(s;x)ds, \qquad (2)$$

где $\Delta_1(t) \equiv a(t)-\varphi'(t)(\varphi(t))^{-1}$, $X_i(t,\tau)\equiv\int_{\tau}^{t}\psi_i(\eta)x(\eta)d\eta$ $(i=1..n)$, $c_0=\varphi(t_0)(x(t_0))^2+\sum_{i=1}^{n}c_i(t_0)$.

Введем обозначение: $c_*=\varphi(t_0)(x(t_0))^2-\sum_{i=1}^{n}|c_i(t_0)|-\int_{t_0}^{\infty}\varphi(s)(f_0(s))^2|a(s)|^{-1}ds.$

Переходя от тождества (2) к интегральному неравенству, применяя теорему [9, с. 187], аналогично теореме 1 [1] доказывается

ТЕОРЕМА 1. Пусть 1) $\varphi(t) > 0$ выполняются условия (F), (K), (f);

2) $a(t) < 0$, $\Delta_1(t) \le 0$; 3) $R_i(t,t_0) \le 0$, $R_i'(t,t_0)\ge 0$, существуют функции $c_i(t)$ ($i = 1..n$) такие, что $(E_i^{(k)}(t))^2 \le$ $\le R_i^{(k)}(t,t_0)\,c_i^{(k)}(t)$ ($i = 1..n$; $k = 1,0$);

4) $R_{i\tau}'(t,\tau)\le 0$, $R_{it\tau}''(t,\tau)\ge 0$ ($i = 1..n$); 5) $f_{0*}=\int_{t_0}^{\infty}\varphi(s)(f_0(s))^2|a(s)|^{-1}ds<\infty$.

Тогда для любого решения $x(t)$ ИДУ (1), удовлетворяющего условию $c_* > 0$, справедлива следующая оценка снизу:

$$|x(t)|\ge\sqrt{c_*}(\varphi(t))^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}|\Delta_1(s)|ds\right). \qquad (3)$$

Из теоремы 1 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Если выполняются все условия теоремы 1 и $\lim\limits_{t\to\infty}(\varphi(t))^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}|\Delta_1(s)|ds\right)=\infty$, то все решения ИДУ (1), для которых $c_* > 0$, стремятся к бесконечности при $t \to \infty$.

Рассмотрим случай, когда

$$0\ge f_0(t)=f_{01}(t)f_{02}(t), \qquad (f_0)$$

$$\int_{t_0}^{\infty}\varphi(s)(f_{01}(s))^2ds\equiv f_{0**}<\infty. \qquad (f_{01})$$

Тогда справедливо соотношение:

$$2\int_{t_0}^{t}f_0(s)\varphi(s)x(s)ds=-2\int_{t_0}^{t}\varphi(s)|f_{01}(s)f_{02}(s)x(s)|ds\ge-\int_{t_0}^{t}\varphi(s)(f_{01}(s))^2ds-\int_{t_0}^{t}\varphi(s)(f_{02}(s))^2(x(s))^2ds. \qquad (4)$$

С учетом преобразования (4), вместо тождества (2) имеем неравенство:

$$\varphi(t)(x(t))^2+\int_{t_0}^{t}\Delta_2(s)\varphi(s)(x(s))^2ds+\sum_{i=1}^{n}\{R_i(t,t_0)(X_i(t,t_0))^2-2E_i(t)X_i(t,t_0)+c_i(t)-$$

$$-\int_{t_0}^{t}[R_i'(s,t_0)(X_i(t,t_0))^2-2E_i'(s)X_i(s,t_0)+c_i'(s)]ds+\int_{t_0}^{t}R_{i\tau}'(t,\tau)(X_i(t,\tau))^2d\tau-$$
$$-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}R_{is\tau}''(s,\tau)(X_i(s,\tau))^2d\tau\,ds\ge c_{**}, \quad (5)$$

где $\Delta_2(t)\equiv 2a(t)+(f_{02}(t))^2-\varphi'(t)(\varphi(t))^{-1}$, $c_{**}=c_0-\int_{t_0}^{\infty}\varphi(s)(f_{01}(s))^2ds=c_0-f_{0**}$.

Исходя из неравенства (5), аналогично теореме 1 устанавливается

ТЕОРЕМА 2. Пусть 1) выполняются условия 1), 3), 4) теоремы 1 и (f_0), (f_{01}); 2) $\Delta_2(t)\le 0$. Тогда для любого решения $x(t)$ ИДУ (1), удовлетворяющего условию $c_{**}>0$, верна следующая оценка снизу:

$$|x(t)|\ge\sqrt{c_{**}}(\varphi(t))^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}|\Delta_2(s)|ds\right). \quad (6)$$

Из теоремы 2 аналогично следствию 1 получается

СЛЕДСТВИЕ 2. Если выполняются все условия теоремы 2 и $\lim_{t\to\infty}(\varphi(t))^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}|\Delta_2(s)|ds\right)=\infty$, то все решения ИДУ (1), для которых $c_{**}>0$, стремятся к бесконечности при $t\to\infty$.

В теореме 2 может быть $f_0(t)\equiv 0$. Тогда из теоремы 2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3. Если верны условия 1) с $f_0(t)\equiv 0$, 3), 4) теоремы 1 и $\Delta(t)\equiv 2a(t)-\varphi'(t)(\varphi(t))^{-1}\le 0$, то все решения ИДУ (1), для которых $c_0=\varphi(t_0)(x(t_0))^2-\sum_{i=1}^{n}|c_i(t_0)|>0$, стремятся к бесконечности при $t\to\infty$.

Из теорем 1, 2 также получается

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть для ИДУ (1) выполняются условие (F) и

$$K(t,\tau)=b(t)\sum_{i=1}^{n}\alpha_iP_i(t,\tau)Q_i(t)Q_i(\tau),\quad b(t)>0,\quad \alpha_i>0\quad (i=1..n),$$
$$f(t)=b(t)\sum_{i=1}^{n}\beta_iP_i(t,t_0)Q_i(t),\ \beta_i>0\quad (i=1..n),\quad 2a(t)+b'(t)(b(t))^{-1}\le 0,$$
$$\lim_{t\to\infty}(b(t))^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left|2a(s)+b'(s)(b(s))^{-1}\right|ds\right)=\infty,$$
$$P_i(t,t_0)\le 0,\quad P_i'(t,t_0)\ge 0,\quad P_{i\tau}''(t,\tau)\le 0,\quad P_{i\tau}'(t,\tau)\ge 0\qquad (i=1..n).$$

Тогда все решения такого ИДУ, для которых

$$(b(t_0))^{-1}(x(t_0))^2-\sum_{i=1}^{n}\delta_iP_i(t_0,t_0)>0,\ \delta_i\ge\beta_i^2\ \alpha_i^{-1}\ (i=1..n),$$

стремятся к бесконечности при $t\to\infty$.

В этом случае $\varphi(t)\equiv(b(t))^{-1}$, $\psi_i(t)\equiv Q_i(t)\ (i=1..n)$, $\Delta(t)\equiv 2a(t)+b'(t)(b(t))^{-1}$, $c_i(t)\equiv\delta_iP_i(t,t_0)\ (i=1..n)$ и из теоремы 2 вытекает утверждение этого следствия.

ПРИМЕР 1. Для ИДУ

$$x'(t)-a_0Q(t)x(t)-K_0\int_{0}^{t}Q(t)Q(\tau)x(\tau)d\tau=q_0Q(t),\quad t\ge 0, \quad (1_*)$$

где постоянные $a_0>0$, $K_0>0$; $q_0\ne 0$ функция $Q(t)>0$, $\int_0^{\infty}Q(t)dt=\infty$, выполняются все условия следствия 4, здесь $a(t)\equiv -a_0Q(t)$, $b(t)\equiv 1$, $n=1$, $P_0(t,\tau)\equiv -1$, $Q_1(t)\equiv Q(t)$, $F(t;x)\equiv 0$ и все его решения, для которых $(x(0))^2-\delta>0$, $\delta\ge\frac{q_0^2}{K_0}$, стремятся к бесконечности при $t\to\infty$. Заметим, что ИДУ (1_*) имеет общее решение

$$x(t)=[\lambda_1e^{\lambda_1\int_0^tQ(s)ds}-\lambda_2e^{\lambda_2\int_0^tQ(s)ds}]c-\frac{q_0}{\lambda_1}e^{\lambda_2\int_0^tQ(s)ds}$$ (c – произвольная постоянная).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $f_0(t) \equiv 0$ и выполняются условия следствия 3. Тогда для любого решения $x(t)$ ИДУ (1), для которых $c_0 > 0$, справедлива оценка снизу:

$$|x(t)| \geq \sqrt{c_0}\,(\varphi(t))^{-\frac{1}{2}} \exp(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} |\Delta(s)| ds). \qquad (7)$$

Пусть

$$R_i(t,t_0) = A_i(t) + B_i(t) (i = 1..n). \qquad (R)$$

В силу условия (R) с учетом $\Delta_2(t) \equiv \Delta(t)$, $c_{**} = c_0$ вместо неравенства (5) получаем тождество:

$$\varphi(t)(x(t))^2 + \int_{t_0}^{t} \Delta(s)\varphi(s)(x(s))^2 ds + \sum_{i=1}^{n} \{A_i(t)(X_i(t,t_0))^2 - \int_{t_0}^{t} A_i'(s)(X_i(s,t_0))^2 ds + B_i(t)(X_i(t,t_0))^2 - 2E_i(t)X_i(t,t_0) + c_i(t) -$$

$$- \int_{t_0}^{t} [B_i'(s)(X_i(s,t_0))^2 - 2E_i'(s)X_i(s,t_0) + c_i'(s)]ds + \int_{t_0}^{t} R_{i\tau}'(t,\tau)(X_i(t,\tau))^2 d\tau - \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} R_{is\tau}''(s,\tau)(X_i(s,\tau))^2 d\tau\, ds \geq c_0. \qquad (8)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть 1) $\varphi(t) > 0$, выполняются условия 1) с $f_0(t) \equiv 0$, 4) теоремы 1 и условие (R); 2) $\Delta(t) \leq 0$; 3) $A_i(t) \leq 0$, $A_i'(t) \geq 0$; 4) $B_i(t) \leq 0$ $B_i'(t) \geq 0$, существуют функции $c_i(t)$ такие, что $(E_i^{(k)}(t))^2 \leq B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t)$ $(i = 1..n;\ k = 0,1)$; 5) $\psi_i(t) \neq 0$ $(1 \leq j \leq n)$. Тогда для любого решения $x(t)$ ИДУ (1), удовлетворяющего условию $c_0 > 0$, справедлива оценка снизу:

$$|x(t)| \geq \sqrt{c_0}\,(\varphi(t))^{-\frac{1}{2}} D(t), \qquad (9)$$

где $D(t) \equiv [\exp(\int_{t_0}^{t} |\Delta(s)| ds) + |A_j(t)|(G_j(t,t_0))^2 + \int_{t_0}^{t} A_j'(s)(G_j(s,t_0))^2 ds + \int_{t_0}^{t} |R_{j\tau}'(t,\tau)|(G_j(t,\tau))^2 d\tau + \quad R \quad s \quad G \quad s \quad d\ ds$

$$+ \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} R_{js\tau}''(s,\tau)(G_j(s,\tau))^2 d\tau ds]^{\frac{1}{2}},$$

$$G_j(t,\tau) \equiv \int_{\tau}^{t} |\psi_j(\eta)| (\varphi(\eta))^{-\frac{1}{2}} \exp(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\eta} |\Delta(s)| ds) d\eta \ \ (1 \leq j \leq n).$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2 [1]. Аналогично теоремам 1, 2 из (8) вытекает справедливость оценки (7), из которой следует, что $x(t) \neq 0$. Тогда, используя условие 5) и оценку (7), имеем следующее соотношение:

$$(X_j(t,\tau))^2 \equiv (\int_{\tau}^{t} \psi_j(\eta)x(\eta)d\eta)^2 = (\int_{\tau}^{t} |\psi_j(\eta)x(\eta)| d\eta)^2 \geq$$

$$\geq (\int_{\tau}^{t} |\psi_j(\eta)| (\varphi(\eta))^{-\frac{1}{2}} \exp(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\eta} |\Delta(s)| ds)^2 c_0 \equiv (G_j(t,\tau))^2 c_0 \ \ (1 \leq j \leq n). \qquad (10)$$

С учетом (10) из тождества (8) вытекает справедливость оценки (9).

СЛЕДСТВИЕ 5. Если выполняются все условия теоремы 3 и $\lim_{t\to\infty} (\varphi(t))^{-\frac{1}{2}} D(t) = \infty$, то все решения ИДУ (1), для которых $c_0 > 0$, стремятся к бесконечности при $t \to \infty$. Это следует из (9).

ПРИМЕР 2. ИДУ

$$x'(t) - 2\int_{0}^{t} \frac{x(\tau)}{t-\tau+1} d\tau = \frac{1}{(t+1)^2} + F(t;x), \ \ t \geq 0, \qquad (*)$$

где $F(t;x) \equiv x\sin^2\{e^t (\cos t)^{\frac{1}{5}} x(\frac{t}{3})\int_{0}^{t} x^3(\tau)d\tau\}$, $t \geq 0$, удовлетворяет всем условиям следствия 5 при $\varphi(t) \equiv 1$, $n = 1$, $\psi 1(t) \equiv 1$, здесь $t_0 = 0$, $A_1(t) \equiv -\frac{1}{t+1}$, $B_1(t) \equiv -\frac{1}{t+1}$, $E_1(t) \equiv -\frac{1}{(t+1)^2}$, $c_1(t) \equiv -\frac{4}{t+1}$.

Значит, все решения $x(t)$ этого ИДУ, для которых $c_0 = (x(0))^2 - 4 > 0$, стремятся к бесконечности при $t \to \infty$. Однако все решения $x(t) = c - \frac{1}{t+1}$ (с – произвольная постоянная) ДУ: $x'(t) = \frac{1}{(t+1)^2}$, $t \geq 0$, соответствующего приведенному ИДУ, ограничены на полуоси $R_+ = [0, \infty]$.

Пример 2 показывает, что в условиях теоремы 3 все решения ДУ (1_0) могут быть ограниченными на J.

ПРИМЕР 3. Для ИДУ (*), где $F(t; x) \equiv x\sin^6(e^{-t})\cos^4(x(\frac{t}{5}))$, $t \geq 0$, выполняются также все условия следствия 5. При этом все решения ФДУ:

$$x'(t) = x\sin^6(e^{-t})\cos^4(x(\frac{t}{5})), \quad t \geq 0$$

ограничены на полуоси $t \geq 0$, что следует из оценки $|x(t)| \leq |x(t_0)|\exp(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}e^{-6t})$, которая вытекает применением леммы Гронуолла–Беллмана к интегральному неравенству $|x(t)| \leq |x(t_0)| + \int_0^t e^{-6s}|x(s)|ds$, $t \geq 0$, получаемого из этого ФДУ интегрированием и с учетом соотношения: $\sin^6(e^{-t})\cos^4(x(\frac{t}{5})) \leq e^{-6t}$.

Тем самым, выявлено влияние интегральных возмущений типа Вольтерра на ограниченность решений ДУ (1_1) и ФДУ (1_2).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При выполнении условий теорем 1, 2, 3 все решения $x(t)$ ИДУ (1), для которых соответственно выполнены условия $c_* > 0$, $c_{**} > 0$, $c_0 > 0$, не имеют нулей на полуинтервале J, и значит, ИДУ (1) не имеет особенных точек [10, с. 27].

Литература

1. *Искандаров С.* Оценки снизу решений линейного однородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка / С. Искандаров // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 9. С. 1508–1512.
2. *Искандаров С.* Оценки снизу решений линейного неоднородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка / С. Искандаров, Г.Т. Халилова // Исслед. по интегро-диффренц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2009. Вып. 41. С. 46–52.
3. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра / С. Искандаров. Бишкек: Илим, 2002. 216 с.
4. *Красносельский М.А.* Положительные решения операторных уравнений: главы нелинейного анализа / М.А. Красносельский. М.: Наука, 1962. 394 с.
5. *Burton T.A.* Volterra Integral and Differential Equations / T.A. Burton. New York a.o.: Acad.Press, 1983. X+313 p.
6. *Смолин Ю.Н.* Об оценке снизу решений интегро-дифференциальных уравнений с запаздываниями / Ю.Н. Смолин // Краевые задачи: Межвуз. сб. науч. тр. Пермь: Пермск. политехн. ин-т, 1979. С. 183–186.
7. *Agarwal R.P.* Nonoscillation Theory of Functional Differential Equations with Applications / R.P. Agarwal, L. Berezansky, E. Braverman, A. Domoshnitsky. New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer, 2012. 520 p.
8. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра: автореф. дис… докт. физ.-мат. наук / С. Искандаров. Бишкек, 2003. 34 с.
9. *Беккенбах Э.* Неравенства / Э. Беккенбах, Р. Беллман; пер. с англ.; под ред. В.И. Левина. М.: Мир, 1965. 276 с.
10. *Быков Я.В.* О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений / Я.В. Быков. Фрунзе: Киргиз. гос. ун-т, 1957. 328 с.