УДК 517.955

# РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С УСЛОВИЕМ КОШИ

*А.Р. Алиева*

Приведены результаты, полученные с использованием преобразования асимптотического характера для решения сингулярно-возмущенной задачи Коши в неограниченной области.

*Ключевые слова:* сингулярно-возмущенная задача Коши; интегро-дифференциальные уравнения.

# SOLUTION TO NONLINEAR SINGULARLY- PERTURBED INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF THIRD ORDER WITH CAUCHY CONDITION

*A.R. Alieva*

The results obtained using the asymptotic character  of the transformation for the solution of the singularly perturbed Cauchy problem in an unbounded domain.

*Keywords:* singularly perturbed Cauchy problem; integro-differential equations.

Несмотря на большое количество фундаментальных работ [1–4, 6], где существуют различные методы исследований сингулярно-возмущенных уравнений, как правило, эти методы применимы вполне к определенным классам указанных уравнений. Существенные трудности возникают при исследовании нелинейных сингулярно-возмущенных уравнений в неограниченной области с условием Коши, где доминируются дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных.

В этой работе приведены результаты, полученные с использованием преобразования асимптотического характера для решения сингулярно-возмущенной задачи Коши в неограниченной области отмеченного выше типа. При этом установлены необходимые и достаточные условия разрешимости исходной и вырожденной задачи с оценкой близости решений в классе непрерывных функций.

Полученные результаты работы применимы к сингулярно-возмущенным обратным задачам [3, 5] в неограниченной области, так как в предлагаемых преобразованиях исходная задача эквивалентно преобразуется к интегральным уравнениям второго рода, в чем и заключается актуальность данной работы.

Рассматривается задача Коши для сингулярно-возмущенного интегро-дифференциального уравнения вида

$$\varepsilon^2(u_{tx^2}+u_{x^3})+\varepsilon\beta uu_x-(u_x+u_t)=f(t,x)+\lambda(Ku)(t,x), \tag{1}$$

$$\begin{cases} u(0,x)=\vartheta(0,x)+\varphi_\varepsilon(x), \forall x\in R, \\ Ku\equiv\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x,\tau)u(t,\tau)d\tau, t\in[0,T]; \;\; D=\{(t,x): 0\le t\le T, x\in R\}, \end{cases} \tag{2}$$

где $0<\beta$, $\lambda$ – известные константы; $0\le K(x,\tau)\in C^{3,0}(D_1), D_1=R\times R$, $C^3(R)\in\varphi_\varepsilon(x)$, $C^{0,3}(D)\in f(t,x)$ – заданные ограниченные функции, причем

$$\sup_R\int\limits_{-\infty}^{\infty}|K(x,\tau)|d\tau\le C_0=const,$$

при этом надо найти функцию $u(x, t)$.

**П. 1.** Если предположим, что $\varepsilon=0$, то из (1) следует задача:

$$\vartheta_t(t,x)+\vartheta_x(t,x)=-(f(t,x)+\lambda K\vartheta), \tag{3}$$

$$\vartheta|_{t=0}=\vartheta(0,x)\equiv\varphi_0(x), \;\forall x\in R, \tag{4}$$

где $C^3(R)\in\varphi_0(x)$. Задача (3), (4) преобразуется к виду

$$\vartheta(t,x)=\varphi_0(x-t)-\int_0^t[f(\nu,x-(t-\nu))+\lambda(K\vartheta)(\nu,x-(t-\nu))]d\nu\equiv P\vartheta, \tag{5}$$

так как имеет место

$$\begin{cases}\vartheta_t(t,x)=-\varphi_{0l_1}(x-t)-(f(t,x)+\lambda K\vartheta)+\int_0^t[f_l(\nu,x-(t-\nu))+\lambda(K\vartheta)_l(\nu,x-(t-\nu))]d\nu,\\ \vartheta_x(t,x)=\varphi_{0l}(x-t)-\int_0^t[f_l(\nu,x-(t-\nu))+\lambda(K\vartheta)_l(\nu,x-(t-\nu))]d\nu,\\ \vartheta_t(t,x)+\vartheta_x(t,x)=-(f(t,x)+\lambda K\vartheta),(\text{см.}(3)),\ \ (l_1=x-t;\ \ l=x-(t-\nu)).\end{cases}$$

Пусть относительно оператора $P$ допускаются условия Банаха [3]:

$$\begin{cases}d_P=\lambda C_0T\le\dfrac{1}{2},\\ P:S_r\to S_r,\ \ (S_r(\vartheta_0)=\{\vartheta:\left|\vartheta-\vartheta_0\right|\le r,\forall(t,x)\in D\}),\\ \left\|(P\vartheta_0)(t,x)\right\|_C\le(1-d_P)r,\end{cases} \tag{6}$$

тогда уравнение (5) имеет единственное решение в $C^{1,3}(D)$, причем решение находим методом Пикара

$$\begin{cases}\vartheta_{n+1}=P\vartheta_n,(n=0,1,...),\\ \left\|\vartheta_{n+1}-\vartheta\right\|_C\le d_P^{n+1}r\xrightarrow[n\to\infty]{d_P<1}0,\\ \left\|\vartheta\right\|_C\le(1-d_P)^{-1}TM_0,(M_0=\|\varphi_0\|_C+M_1T;\ \ M_1=\|f\|_C).\end{cases} \tag{7}$$

*Лемма 1.* В условиях (6), (7) задача (3), (4) разрешима в $C^{1,3}(D)$.

**П.2.** Чтобы найти решение задачи (1), (2) поступим следующим образом: решение (1) будем искать в виде

$$\begin{cases}u_\varepsilon(t,x)=\vartheta(t,x)+\varphi_\varepsilon(x-t)+\xi(t,x),\forall(t,x)\in D,\\ \xi(0,x)=0,\forall x\in R;\ \ \xi\in C^{1,3}(D).\end{cases} \tag{8}$$

Тогда подставляя (8) и

$$\begin{cases}u_{\varepsilon t}(t,x)=\vartheta_t(t,x)-\varphi_{\varepsilon l_1}(x-t)+\xi_t(t,x),\forall(t,x)\in D,\\ u_{\varepsilon x}(t,x)=\vartheta_x(t,x)+\varphi_{\varepsilon l_1}(x-t)+\xi_x(t,x),\\ u_{\varepsilon t}(t,x)+u_{\varepsilon x}(t,x)=\vartheta_t(t,x)+\vartheta_x(t,x)+\xi_t(t,x)+\xi_x(t,x),\\ u_{\varepsilon tx}(t,x)+u_{\varepsilon x^2}(t,x)=\vartheta_{tx}(t,x)+\vartheta_{x^2}(t,x)+\xi_{tx}(t,x)+\xi_{x^2}(t,x),\\ u_{\varepsilon tx^2}(t,x)+u_{\varepsilon x^3}(t,x)=\vartheta_{tx^2}(t,x)+\vartheta_{x^3}(t,x)+\xi_{tx^2}(t,x)+\xi_{x^3}(t,x),\end{cases} \tag{9}$$

в (1), получим:

$$\begin{cases}\varepsilon^2(\xi_{tx^2}+\xi_{x^3})+\varepsilon\beta[(\vartheta+\varphi_\varepsilon+\xi)\xi_x+\xi(\vartheta_x+\varphi_{\varepsilon x})]-(\xi_x+\xi_t)=Y_\varepsilon(t,x)+\lambda\int_{-\infty}^{\infty}K(x,\tau)\xi(t,\tau)d\tau,\\ Y_\varepsilon(t,x)\equiv-\varepsilon^2\beta(\vartheta+\varphi_\varepsilon)(\vartheta_x+\varphi_{\varepsilon x})-\varepsilon[\vartheta_{tx^2}+\vartheta_{x^3}]+\lambda\int_{-\infty}^{\infty}K(x,\tau)\varphi_\varepsilon(\tau-t)d\tau,\\ |Y_\varepsilon(t,x)|\le\varepsilon^2\beta(r_0+\Delta_0(\varepsilon))(\tilde r_0+\Delta_0(\varepsilon))+2\varepsilon\tilde r_0+\lambda C_0\Delta_0(\varepsilon)=\Delta_1(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}0,\ \forall(t,x)\in D,\\ |\varphi_{\varepsilon x}^{(i)}(x)|\le\Delta_0(\varepsilon),(i=0,1),\ \forall(t,x)\in D;\ \ \|\vartheta\|_C\le r_0,\ (|\vartheta_x|,|\vartheta_{tx^2}|,|\vartheta_{tx^3}|\le\tilde r_0,\ \forall(t,x)\in D).\end{cases} \tag{10}$$

Поэтому решение уравнения (10) строим по правилу:

$$\xi(t,x)=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t\int_{-\infty}^{x-t+\nu}e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)}\int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\eta_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau ds d\nu,\ (\xi(0,x)=0,\ \forall(t,x)\in D). \qquad (11)$$

Далее, дифференцируя (11) по совокупности аргументов, имеем:

$$\begin{cases}\xi_t(t,x)=\dfrac{1}{\varepsilon^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-s)}\int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\eta_\varepsilon(t,\tau)d\tau ds-\dfrac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t\int_{x-t+\nu}^{\infty}e^{\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-\tau)}\eta_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau d\nu+\\ +\dfrac{1}{\varepsilon^3}\displaystyle\int_0^t\int_{-\infty}^{x-t+\nu}e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)}\int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\eta_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau ds d\nu,\\ \xi_x(t,x)=\dfrac{1}{\varepsilon^2}\displaystyle\int_0^t\int_{x-t+\nu}^{\infty}e^{\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-\tau)}\eta_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau d\nu-\dfrac{1}{\varepsilon^3}\int_0^t\int_{-\infty}^{x-t+\nu}e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)}\int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\eta_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau ds d\nu;\\ \xi_t(t,x)+\xi_x(t,x)=\dfrac{1}{\varepsilon^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-s)}\int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\eta_\varepsilon(t,\tau)d\tau ds,\\ \xi_{tx}(t,x)+\xi_{x^2}(t,x)=\dfrac{1}{\varepsilon^2}\displaystyle\int_x^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(x-\tau)}\eta_\varepsilon(t,\tau)d\tau-\dfrac{1}{\varepsilon^3}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-s)}\int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\eta_\varepsilon(t,\tau)d\tau ds,\\ \xi_{tx^2}(t,x)+\xi_{x^3}(t,x)=-\dfrac{1}{\varepsilon^2}\eta_\varepsilon(t,x)+\dfrac{1}{\varepsilon^3}\displaystyle\int_x^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(x-\tau)}\eta_\varepsilon(t,\tau)d\tau-\dfrac{1}{\varepsilon^3}\int_x^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(x-\tau)}\eta_\varepsilon(t,\tau)d\tau+\\ +\dfrac{1}{\varepsilon^4}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-s)}\int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\eta_\varepsilon(t,\tau)d\tau ds=-\dfrac{1}{\varepsilon^2}\eta_\varepsilon(t,x)+\dfrac{1}{\varepsilon^4}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-s)}\int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\eta_\varepsilon(t,\tau)d\tau ds.\end{cases} \qquad (12)$$

Следовательно, с учетом (11) и (12) уравнение (10) эквивалентно преобразуется к интегральному уравнению второго рода:

$$\begin{cases}\eta_\varepsilon(t,x)=\varepsilon\beta[(\vartheta+\varphi_\varepsilon+\dfrac{1}{\varepsilon^2}\displaystyle\int_0^t\int_{-\infty}^{x-t+\nu}e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)}\int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\eta_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau ds d\nu)\times\\ \times(\dfrac{1}{\varepsilon^2}\displaystyle\int_0^t\int_{x-t+\nu}^{\infty}e^{\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-\tau)}\eta_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau d\nu-\dfrac{1}{\varepsilon^3}\int_0^t\int_{-\infty}^{x-t+\nu}e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)}\int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\eta_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau ds d\nu)+\\ +(\vartheta_x+\varphi_{\varepsilon x})\dfrac{1}{\varepsilon^2}\displaystyle\int_0^t\int_{-\infty}^{x-t+\nu}e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)}\int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\eta_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau ds d\nu]-Y_\varepsilon(t,x)-\lambda\int_{-\infty}^{\infty}K(x,\tau)\times\\ \times\dfrac{1}{\varepsilon^2}\displaystyle\int_0^t\int_{-\infty}^{\tau-t+\nu}e^{-\frac{1}{\varepsilon}(\tau-t+\nu-s)}\int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau')}\eta_\varepsilon(\nu,\tau')d\tau' ds d\nu d\tau\equiv(H\eta_\varepsilon)(t,x).\end{cases} \qquad (13)$$

Если относительно оператора $H$ выполняются условия Банаха

$$\begin{cases}d_H<1,\\ H:S_{r_1}\to S_{r_1},\quad (S_{r_1}(0)=\{\eta:|\eta(t,x)|\le r_1,\forall(t,x)\in D\}),\quad \|(H0)(t,x)\|_C\le(1-d_H)r_1:\\ \|(H\eta)(t,x)\|_C\le\|(H\eta)(t,x)-(H0)(t,x)\|_C+\|(H0)(t,x)\|_C\le d_H r_1+(1-d_H)r_1=r_1,\end{cases} \qquad (14)$$

то уравнение (13) разрешимо в $C(D)$, причем

$$\|\eta\|_C\le(1-d_H)^{-1}\|Y_\varepsilon(t,x)\|_C\le(1-d_H)^{-1}\Delta_1(\varepsilon)=\Delta_2(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}0, \qquad (15)$$

где

$$\begin{cases} \left|\eta_2(t,x)-\eta_1(t,x)\right| = \Big| \ \varepsilon\beta[(\vartheta+\varphi_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t \int_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)} \int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)} \eta_2(\nu,\tau)d\tau ds d\nu)\times(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t \int_{x-t+\nu}^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-\tau)}\eta_2(\nu,\tau)d\tau d\nu - \\ -\frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^t \int_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)} \int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)} \eta_2(\nu,\tau)d\tau ds d\nu) + (\vartheta_x+\varphi_{\varepsilon x})\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t \int_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)} \int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)} \eta_2(\nu,\tau)d\tau ds d\nu] - \\ -Y_\varepsilon(t,x) - \lambda\int_{-\infty}^\infty K(x,\tau)\times\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t \int_{-\infty}^{\tau-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(\tau-t+\nu-s)} \int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau')}\eta_2(\nu,\tau')d\tau' ds d\nu d\tau - \{\varepsilon\beta[(\vartheta+\varphi_\varepsilon + \\ +\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t \int_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)} \int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)} \eta_1(\nu,\tau)d\tau ds d\nu)(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t \int_{x-t+\nu}^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-\tau)}\eta_1(\nu,\tau)d\tau d\nu - \\ -\frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^t \int_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)} \int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)} \eta_1(\nu,\tau)d\tau ds d\nu) + (\vartheta_x+\varphi_{\varepsilon x})\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t \int_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)} \times\int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)} \eta_1(\nu,\tau)d\tau ds d\nu] - Y_\varepsilon(t,x) - \\ -\lambda\int_{-\infty}^\infty K(x,\tau)\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t \int_{-\infty}^{\tau-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(\tau-t+\nu-s)} \times\int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau')}\eta_1(\nu,\tau')d\tau' ds d\nu d\tau\} \ \Big| \le \{\beta[2T(r_0+\Delta_0(\varepsilon))+4Tr_1+\varepsilon(\tilde{r}_0+\Delta_0(\varepsilon))T] + \\ +\lambda C_0 T\}\times\left\|\eta_2(t,x)-\eta_1(t,x)\right\| \le d\left\|\eta_2(t,x)-\eta_1(t,x)\right\| = \left\|\eta_2(t,x)-\eta_1(t,x)\right\|, \\ d_H = \beta[2T(r_0+1)+4Tr_1+(\tilde{r}_0+1)T]+\lambda C_0 T, \ (d_P = \lambda C_0 T \le \frac{1}{2}; \ 0<\beta,\lambda<1; \ \Delta_0(\varepsilon),\varepsilon\in(0,1)). \end{cases}$$

Поэтому решение (13) находим методом Пикара:

$$\begin{cases} \eta_{n+1} = H\eta_n, (n=0,1,...), \\ \left\|\eta_{n+1}-\eta\right\|_C \le d_H^{n+1} r_1 \xrightarrow[n\to\infty]{d_H<1} 0. \end{cases} \tag{16}$$

Учитывая результаты леммы 1 и (15), на основе (11) получим:

$$\left|\xi(t,x)\right| \le T\left\|\eta_\varepsilon(t,x)\right\|_C \le T\Delta_2(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \ \forall(t,x)\in D. \tag{17}$$

*Лемма 2.* При выполнении условий (14), (16) уравнение (13) разрешимо

*C(D.* Следовательно, функция ξ единственным образом определяется по правилу (11) в $C^{1,3}$*(D)*.

Поэтому имеет место

*Теорема 1.* В условиях лемм 1, 2 близость решения задач (1), (2) и (3), (4) оценима в смысле *C(D)*, когда ε→0.

*Доказательство.* В самом деле, в условиях лемм 1, 2 вырожденная задача (3), (4) и задача (10) разрешимы в $C^{1,3}$*(D).* Тогда на основе результатов лемм 1,2, с учетом (8) получим:

$$\left\|u_\varepsilon(t,x)-\vartheta(t,x)\right\|_C \le \left\|\varphi_\varepsilon(x)\right\|_C + \left\|\xi(t,x)\right\|_C \le \Delta_0(\varepsilon)+T\Delta_2(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \tag{18}$$

Таким образом, мы показали, что решение сингулярно-возмущенного интегро-дифференциального уравнения (1) с начальным условием (2) строится по правилу (8), причем имеет оценка вида (18). Что и требовалось доказать.

***Литература***


1. *Бободжанов А.А.* Сингулярно-возмущенные нелинейные интегро-дифференциальные системы с быстро изменяющимися ядрами / А.А. Бободжанов, В.Ф. Сафронов // Математические заметки. 2002. Т. 72. Вып. 5. С. 654–664.
2. *Винокуров В.П.* Асимптотическое поведение решений одного класса интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра / В.П. Винокуров // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3. № 10. С. 1732–1744.
3. *Иманалиев М.И.* Методы решения нелинейных обратных задач и их приложение / М.И. Иманалиев. Фрунзе: Илим, 1977. 348 с.
4. *Наумкин П.И.* Обобщенные решения для уравнения Уизема / П.И. Наумкин, И.А. Шишмарев // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. Вып. 1. С. 121–126.
5. *Омуров Т.Д.* Прямые и обратные задачи односкоростной теории переноса / Т.Д. Омуров, М.М. Туганбаев // ИТ и ПМ НАН КР. Бишкек: Илим, 2010. 116 с.
6. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. М.: Мир, 1977. 622 с.