

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ  
КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ им. И. РАЗЗАКОВА  
КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
СТРОИТЕЛЬСТВА, ТРАНСПОРТА И АРХИТЕКТУРЫ  
им. Н. ИСАНОВА**

На правах рукописи  
УДК 539.3

**Закирьянова Гульмира Кожаметовна**

**Фундаментальные и обобщенные решения  
краевых задач динамики сред с усложненными свойствами**

01.02.04– механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора физико–математических наук

Научный консультант  
доктор физико–математических  
наук, профессор Алексеева Л.А.

Бишкек, 2016

## О Г Л А В Л Е Н И Е

<b>В В Е Д Е Н И Е .....</b>	<b>5</b>
<b>ГЛАВА 1      ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ. СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ....</b>	<b>11</b>
1.1 Обзор литературы.....	11
1.2 Краткое содержание диссертации по главам .....	26
1.3 Краткие выводы .....	29
<b>ГЛАВА 2      ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ СРЕД ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ .....</b>	<b>31</b>
2.1 Предварительные сведения из теории обобщенных функций.....	31
2.2 Антиплоская деформация в анизотропных упругих средах. Уравнения движения .....	38
2.3 Ударные волны при антиплоской деформации как обобщенные решения уравнений движения .....	44
2.4 Постановка краевых задач для гиперболического уравнения 2-го порядка .....	47
2.5 Закон сохранения энергии. Единственность решений начально – краевых задач.....	48
2.6 Фундаментальные решения гиперболического уравнения второго порядка .....	52
2.7 Динамические аналоги формул Грина, Гаусса в пространстве обобщенных функций и их интегральные представления .....	57
2.7.1 Плоская задача .....	62
2.8 Краткие выводы .....	64
<b>ГЛАВА 3      ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ УПРУГИХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД.....</b>	<b>65</b>
3.1 Обобщенные решения .....	65
3.2 Фундаментальные решения уравнений динамики упругих анизотропных сред .....	70
3.2.1 Фундаментальные решения гиперболических систем уравнений в многомерном случае.....	70
3.2.2 Матрица Грина анизотропной среды при плоской деформации и ее свойства.....	78

3.2.3	Тензор Грина изотропной упругой среды.....	81
3.2.4	Тензор Грина упругой анизотропной полуплоскости.....	82
3.3	Тензор фундаментальных напряжений для анизотропной среды.....	91
3.4	Динамика анизотропной упругой среды при сейсмических воздействиях .....	98
3.4.1	Обобщенные решения уравнений движения при действии сейсмических источников .....	98
3.4.2	Обобщенные решения уравнений движения при действии сейсмических источников .....	101
3.5	Краткие выводы .....	114
<b>ГЛАВА 4 НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ</b>		
<b>ДИНАМИКИ УПРУГИХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД .....</b>		
<b>115</b>		
4.1	Постановка начально-краевых задач. Условия на фронтах ударных волн.....	115
4.2	Закон сохранения энергии и единственность решений .....	117
4.3	Динамический аналог формулы Сомильяны в пространстве обобщенных функций.....	121
4.4	Динамический аналог формулы Гаусса.....	124
4.5	Граничные интегральные уравнения нестационарных краевых задач	125
4.6	Краткие выводы .....	129
<b>ГЛАВА 5 ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ</b>		
<b>СТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ</b>		
<b>СРЕДЫ 130</b>		
5.1	Постановка задач стационарных колебаний. ....	130
5.2	Стационарные аналоги формул Сомильяны в пространстве обобщенных функций.....	132
5.3	Граничные интегральные уравнения стационарных краевых задач при плоской деформации .....	134
5.4	Стационарная дифракция волн сдвига в упругой анизотропной среде при антиплоской деформации.....	137
5.5	Краткие выводы .....	141
<b>ГЛАВА 6 ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ СВЯЗАННЫХ ЗАДАЧ</b>		
<b>ДИНАМИКИ ПЬЕЗОУПРУГИХ СРЕД.....</b>		
<b>142</b>		
6.1	Уравнения движения пьезоупругих сред. Частные случаи пьезоупругих сред.....	142
6.2	Обобщенные решения нестационарных краевых задач для пьезоупругих сред. Условия на волновых фронтах.....	146

6.3	Динамический аналог формулы Сомильяны. ....	151
6.4	Краткие выводы .....	155
<b>ГЛАВА 7      ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ СВЯЗАННЫХ ЗАДАЧ</b>		
<b>ДИНАМИКИ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЫ М.БИО ..... 156</b>		
7.1	Уравнения движения среды Био. Определяющие соотношения .....	156
7.2	Транспортные уравнения М. Био. Фундаментальные решения уравнений движения среды М. Био в классе бегущих решений. ....	159
7.2.1	Фундаментальные решения уравнений движения среды М. Био при транспортных нагрузках в случае дозвуковых скоростей.....	162
7.2.2	Фундаментальные решения уравнений движения среды М. Био при транспортных нагрузках в случае сверхзвуковых скоростей. ....	164
7.2.3	Фундаментальные решения уравнений движения среды М. Био при транспортных нагрузках в случае трансзвуковых скоростей. ....	166
7.3	Обобщенные решения краевых задач для среды М. Био. Условия на волновых фронтах .....	167
7.4	Волновая динамика двухкомпонентной среды Био при дозвуковых скоростях нагрузки .....	171
7.5	Волновая динамика двухкомпонентной среды Био при сверхзвуковых скоростях нагрузки .....	178
7.6	Краткие выводы .....	181
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</b>		<b>182</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....</b>		<b>184</b>

## В В Е Д Е Н И Е

**Актуальность работы.** Изучение динамических процессов в сплошных средах, связанных с возникновением, распространением и дифракцией волн, возникающих под действием стационарных и нестационарных воздействий, действия сосредоточенных источников возмущений естественного или искусственного происхождения, относится к числу сложных научно-технических проблем и тесно связано с решением разнообразных инженерно-технических задач, особенно актуальных для стран Средней Азии, которые относятся к числу государств, большая часть территории которых находится в зоне высокой сейсмической активности. В связи с высоким развитием в этом регионе горнодобывающей промышленности остро стоят проблемы обеспечения прочности, надежности и устойчивости разнообразных подземных сооружений (шахт, подземных хранилищ, тоннелей, метрополитенов и т.п.). Эти вопросы тесно связаны с особенностями и строением окружающего массива, характером контактного взаимодействия на границах раздела сред, глубиной заложения сооружений, типа и силы сейсмических воздействий, действующих транспортных и других нагрузок.

Разработка математических моделей волновых процессов в телах и средах с целью наиболее адекватного описания реальных физических процессов является актуальной фундаментальной научной проблемой и связана с построением решений краевых задач для гиперболических систем уравнений и уравнений смешанного типа. Математическая теория краевых задач для таких уравнений пока не имеет достаточного развития в виду сложности динамических процессов в средах. Для учета реальных свойств среды здесь разрабатываются математические модели динамики породного массива при распространении сейсмических волн с привлечением моделей механики деформируемого твердого тела: изотропных и анизотропных упругих, пьезоупругих и двухкомпонентных сред.

В настоящее время наиболее изученной является линейно упругая изотропная модель, но и для нее класс решенных дифракционных задач весьма узок, в основном для границ классических форм, для которых задача допускает разделение переменных. К реальным средам по своим характеристикам ближе анизотропная упругая среда, распространение волн в которой подчинено более сложным закономерностям: могут наблюдаться лакуны. Это явление связано с волноводными свойствами сильно анизотропной среды, резко выраженными в направлениях с преобладающей жесткостью.

Среди динамических задач теории упругости особое место занимают задачи установившихся колебаний, наличие дискретного спектра частот, при которых в телах возникают свободные колебания. При таких частотах наблюдаются резонансные явления: даже кратковременное действие возбуждающей силы той же частоты приводит к потере устойчивости и разрушению конструкции.

Важное место в исследованиях по теории упругости занимают связанные задачи, в которых учитывается связь поля механических напряжений и деформаций с физическими полями другой природы (тепловыми, электромагнитными и др). Здесь рассматриваются волновые процессы в пьезоупругих средах, где связаны между собой упругая деформация и электрические поля. Интерес к изучению пьезоэффекта объясняется широким спектром его приложения: в радиотехнических устройствах для стабилизации и контроля частот, в кварцевых часах, приборах для обнаружения подводных лодок и многих других.

Особый класс задач динамики сплошных сред составляют транспортные задачи, в которых действующие нагрузки движутся с определенными скоростями. При этом существенную роль играет соотношение между скоростями распространения сейсмических волн, которых может быть несколько, и скоростью транспортной нагрузки с учетом упругих свойств массива. Реальный породный массив представляет собой сложную многокомпонентную среду, состоящую из твердого пористого скелета, содержащего жидкие и газовые компоненты, которые оказывают существенное влияние на процессы распростра-

нения сейсмических волн. Этот класс задач является модельным при изучении воздействия на окружающую среду разнообразных транспортных средств либо транспортируемых объектов.

**Целью исследований** является разработка методов решения уравнений движения и краевых задач динамики деформируемого твердого тела и исследование на их основе процессов распространения волн в средах с усложненными свойствами.

**Задачи исследований:**

- на основе теории обобщенных функций разработать методы построения фундаментальных и обобщенных решений уравнений динамики упругих анизотропных сред; изучение волновых и асимптотических свойств решений, построение условий на фронтах ударных волн;
- исследование влияния степени анизотропии на волноводные свойства упругой среды, численные эксперименты;
- разработка метода обобщенных функций для решения краевых задач динамики анизотропных сред при нестационарных воздействиях и в случае стационарных колебаний, а также нестационарных краевых задач динамики пьезоупругих сред;
- построение фундаментальных и обобщенных решений уравнений движения двухкомпонентной среды Био при транспортных нагрузках, построение условий на волновых фронтах; исследование динамики среды при движущихся сосредоточенных нагрузках, численные эксперименты

**Объект исследований:** упругие анизотропные и пьезоупругие среды, а также двухкомпонентная среда М.Био.

**Предмет исследования:** волновая динамика деформируемых твердых сред при динамических воздействиях.

**Методы исследований:** аналитические и численные методы решения дифференциальных уравнений с использованием моделей механики сплошных сред: метод интегральных преобразований, метод граничных интегральных

уравнений, метод обобщенных функций и др. Программирование и реализация решений на языке Fortran, в системе MathCad.

#### **Научная новизна работы:**

- Разработан метод обобщенных функций для решения краевых задач динамики анизотропных упругих и пьезоупругих сред при нестационарных воздействиях, а также в случае стационарных колебаний анизотропных упругих тел. Построены обобщенные решения уравнений движения таких сред в пространстве обобщенных функций, аналоги формул Сомильяны, Гаусса в пространстве обобщенных функций. Построены сингулярные граничные интегральные уравнения для решения поставленных краевых задач динамики анизотропных сред.
- Использование аппарата теории обобщенных функций получены законы сохранения энергии, условия сохранения импульса на фронтах, которые связывают скачок скоростей на фронте волны со скачком напряжений.
- На основе преобразования Фурье и Лапласа обобщенных функций построены тензора Грина для уравнений движения анизотропных сред (при плоской и пространственной деформации), тензора фундаментальных напряжений, и их первообразные по времени, исследованы их асимптотические свойства.
- На основе численных экспериментов изучено влияние степени анизотропии породного массива на характер его напряженно-деформированного состояния при действии сосредоточенных импульсных источников.
- Разработана математическая модель динамики породного массива при действии источника возмущений вблизи его дневной поверхности с учетом его анизотропии в случае плоской деформации. Построены трансформанты тензора Грина первой и второй краевой задачи динамики для анизотропной полуплоскости.
- Построены фундаментальные и обобщенные решения уравнений движения двухкомпонентной среды Био, позволяющей учесть водонасыщенность грунтового массива при транспортных нагрузках во всем диапазоне скоро-



стей от дозвуковых до сверхзвуковых. Для сверхзвуковых нагрузок получены условия на фронтах волн.

**Основные положения диссертации, выносимые на защиту:**

- разработка метода обобщенных функций для решения краевых задач динамики анизотропных упругих и пьезоупругих сред при нестационарных воздействиях, а также в случае стационарных колебаний анизотропных упругих тел; построение условий на фронтах ударных волн;
- построение фундаментальных решений – тензоров Грина нестационарных уравнений движения анизотропной среды (при плоской и пространственной деформации);
- построение тензора Грина первой и второй нестационарных краевых задач динамики упругого полупространства при плоской деформации;
- построение фундаментальных и обобщенных решений уравнений движения двухкомпонентной среды Био при транспортных нагрузках во всем диапазоне скоростей от дозвуковых до сверхзвуковых;
- построение динамических аналогов формул Сомильяны, Гаусса в пространстве обобщенных функций и, на их основе, сингулярных граничных интегральных уравнений для решения поставленных краевых задач.

**Связь темы диссертации с крупными научными программами (проектами).** Диссертационная работа является частью научноисследовательских работ по темам: "Дифракция волн в упругих, термоупругих и многокомпонентных средах" (2012-2014), «Моделирование динамики массива при сейсмических воздействиях» (2013-2015), «Волновая динамика упругих, термоупругих и двухкомпонентных сред» (2015-2017).

**Апробации результатов исследования.** Основные результаты работы докладывались на многих международных конференциях, среди них: Всерос. съезды по теоретической и прикладной механике (VIII, 2001; IX, 2006), «Mathematical Theory of Hyperbolic Systems of Conservation Laws» (Newton Institute, Cambridge, UK, 2003), 5th European Solid Mechanics Conf. (Greece, 2003), X Int. Conf. on Hyperbolic Problems (Japan, 2004), «Дифференциальные уравне-

ния и смежные вопросы», совместном заседании Московского математического общества и семинара (Москва, 2007), 4th Congress of TWMS (Баку, 2011), "Современные проблемы механики сплошной среды" (Бишкек, 2012), 9 ISAAC Congress (Poland, 2013), «Рахматулинские-Ормонбековские чтения» (Бишкек, 2013), Int. Conf. on Generalized Functions GF2014 (Southampton, UK, 2014), EUROMECH Colloquium «Recent trends in modeling of moving loads on elastic structures» (Turkey, 2015), 10 ISAAC Congress (Macao, 2015), ICAAM 2016 (Almaty).

**Достоверность научных результатов** обоснована использованием фундаментальных законов МСС, корректной математической постановкой решаемых задач и применением строгих математических методов решения поставленных задач. Полученные решения в частных случаях совпадают с известными формулами и соотношениями механики деформируемого твердого тела.

**Теоретическая и практическая значимость полученных результатов.** Разработанный метод обобщенных функций позволяет исследовать физические процессы в деформируемых твердых средах с усложненными свойствами, сопровождающиеся ударными волнами; решать широкий класс задач динамики сплошных сред, описываемых уравнениями гиперболических, эллиптических и смешанных типов.

**Личный вклад соискателя.** Разработан метод обобщенных функций для решения нестационарных и стационарных задач динамики анизотропных упругих и пьезоупругих сред, а также изотропной двухкомпонентной среды М. Био при действии источников различного типа.

**Полнота отражения результатов диссертация в публикациях.** По результатам исследований опубликовано более 70 работ.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, 7 глав, заключения, списка использованных источников из 210 наименований. Объём диссертации содержит 230 страниц текста, включая 35 рисунков.

Автор выражает глубокую благодарность научному консультанту д. ф.-м.н. профессору Л.А. Алексеевой за привлечение интереса к данной проблеме, научные консультации и постоянное внимание к данной работе.

# ГЛАВА 1

## ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ. СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ

### 1.1 Обзор литературы.

Исследование процессов распространения волн, расчет ударных воздействий в сплошных средах связаны со многими актуальными научно – техническими проблемами. В частности, в связи с проблемами сейсмостойкого строительства приобрели важное значение исследования напряженно – деформированного состояния (НДС) в окрестности подземных сооружений при распространении в среде сейсмических волн. С математической точки зрения эти исследования приводят к задачам дифракции волн в средах, ослабленных полостями различной формы.

Использование методов математического моделирования для изучения динамики сооружений и конструкций связано с построением и исследованием решений краевых задач для математических моделей механики сплошных сред. Разработка различных математических моделей волновых процессов в телах и средах с целью наиболее адекватного описания реальных физических процессов является актуальной фундаментальной научной проблемой.

При этом для учета реальных свойств среды используются различные модели. В настоящее время наиболее развиты математические методы для решения краевых задач динамики изотропных упругих сред. Аналитические методы на основе методов полного и неполного разделения переменных и интегральных преобразований наиболее широко использовались для решения задач стационарной и нестационарной дифракции упругих волн на полостях и включениях в работах украинской школы механиков (Кубенко В.Д., Головчан В.Т., Черевко М.А., Подильчук Ю.Н. и др.), в том числе с приложением в динамике подземных сооружений в работах казахстанских (Ержанов Ж.С., Айтиалиев Ш.М., Алексеева Л.А., Украинец В.Н. и др.) и узбекских механиков (Рашидов Т.Р., Мардонов Б.М., Ишанходжаев А.А. и др.). Для упругих изотропных сред и тел со сложной геометрией границ ранее был разработан метод граничных

интегральных уравнений с использованием преобразования Лапласа по времени в работах грузинской школы механиков (Купрадзе В.Д., Гегелия Т.Г., Башелейшвили М.О., Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Жанбырбаев Н.Б. и др.), в исходном-пространстве времени в работах Хуторянского Н.М., Игумного Л.А., а также вышеупомянутых казахстанских механиков (Айталиев Ш.М., Дильдабаев Ш.А., Жанбырбаев А.Б., Уразова Г.)

Однако механика анизотропных упругих сред до сих пор мало изучена. Большой вклад в изучение статики анизотропных упругих сред с приложением в механике горных пород и подземных сооружений внесла казахстанская школа механиков под руководством Ержанова Ж.С. и Айталиева Ш.М. Основным инструментом исследования этой школы были метод комплексных потенциалов Мухелишвили и численный метод конечных элементов. Методы решения задач стационарных колебаний динамики анизотропных упругих сред и изучение на их основе колебательных процессов в окрестностях горных выработок и сооружений разработаны в трудах ученых этой же школы (Масанов Ж.К., Баймахан Р.Б., Махметова Н. и др.).

Среди динамических задач теории упругости особое место занимают задачи установившихся колебаний. При решении таких задач в зависимости от вида граничных условий и формы области может существовать дискретный спектр частот, при которых в телах сохраняются незатухающие колебания в отсутствие внешних сил (свободные колебания). При таких частотах даже при кратковременном действии возбуждающей силы той же частоты возникают большие деформации, что приводит к потере устойчивости и разрушению конструкции. Поэтому исследование таких задач имеет несомненный практический интерес.

Исследование стационарных задач для изотропных упругих сред с помощью метода потенциала и теории сингулярных интегральных уравнений изложено в работах В.Д. Купрадзе, Т.Г. Гегелия, М.О. Башелейшвили, Т.В. Бурчуладзе [104,105], В.З. Партона, П.И. Перлина [130]. Применению метода разделения переменных и интегральных преобразований к решению стационар-

ных задач посвящены исследования А.И. Гузя, В.Д. Кубенко, М.А. Черевко [49], Ж.С. Ержанова, Ш.М. Айталиева, Л.А.Алексеевой [56]. В анизотропных упругих средах наиболее исследованы процессы распространения стационарных волн в пространстве и полупространстве [137] и др.

Основным аналитическим методом при решении таких задач является метод разделения переменных. Для изотропных сред работы в этой области связаны с именами Р.В.Рао и С.С.Мов [192], А.Н.Гузя, В.Т.Головчана, В.Д.Кубенко [49], Л.А.Алексеевой [15,17].

Для анизотропных сред С.Ю.Хазановым [156], М.Козаровым, Ц.П. Ивановым [98] исследовано распространение гармонических волн в случае ортотропного цилиндра и получены решения для перемещений в виде рядов. Численные расчеты авторами не приводятся. Метод разделения переменных использовался также и в работах И.П.Цая при решении динамических задач для ортотропной среды в плоском и пространственном случаях и, в частности, для осесимметричных задач в полярных и цилиндрических координатах [157]. Х.М.Маликов [114] рассматривал задачи о гармонических колебаниях неограниченной трансверсально – изотропной среды при равномерно распределенном нормальном давлении, приложенном к сферической и цилиндрической полостям. Для этих задач им было приведено решение для радиальных смещений и получены их оценки для больших частот. Изучению установившихся гармонических колебаний ортотропной упругой среды, находящейся в условиях плоской деформации, посвящены работы Будаева В.С. Решение системы уравнений движения им ищется в виде суперпозиции плоских волн [35].

Установившиеся колебания и распространение гармонических волн в ограниченных и полуограниченных областях исследовались А.С. Космодамианским и В.И.Сторожевым [100]. Особое внимание при этом уделено процессам, обусловленным отражением упругих волн от граничных поверхностей пластин и цилиндрических тел, дифракции упругих волн на отверстиях и анизотропных включениях. Задачи решались численно – аналитическими методами рядов. Наряду с теоретическими решениями авторами приводятся числен-

ные результаты, относящиеся в основном к полостям и включениям канонической формы.

Систематическому изложению решения задач статической теории упругости анизотропной среды аналитическими методами посвящена монография С.Г.Лехницкого [113].

Стационарные задачи решаются в основном аналитическими методами, в том числе методом разделения переменных (И.П.Цай [157], С.Ю.Хазанов [156], Х.М.Маликов [114]), методом характеристик (R.Greif, S.Chou [179]), методом асимптотических разложений (P.F.Daley, F.Hron [177]), методом интегральных преобразований (В.С.Будаев [36,37]).

Ряд работ посвящен исследованию распространения волн Релея, Лява, Лэмба, Стоунли в анизотропных средах. К ним относятся публикации R.Burridge [174], И.О.Осипова [128,129] и др.

Аналитическим методам решения нестационарных задач посвящено большое число работ советских и зарубежных авторов. В частности, это нашло отражение в монографии В.Б.Поручикова [141], где наряду с классическими методами (методами Смирнова – Соболева, интегральных преобразований, ВинераХопфа) излагаются эффективные методы, появившиеся недавно (построение решений нестационарных задач с движущейся границей раздела краевых условий, решение задач для угловых областей со смешанными условиями).

Что касается решения нестационарных задач анизотропной теории упругости, то здесь необходимо отметить работы Г.И.Петрашени, Б.В.Будаева [33,38], Л.А.Молоткова [118], в которых рассматриваются явления отражения – преломления волн на границе раздела сред, изучаются волновые поля в рамках нулевого приближения лучевого метода. Л.А.Молотковым, У. Баймагамбетовым исследуются вопросы распространения волн в слоистых трансверсально изотропных средах [119]. Численная реализация этих задач, проведенная Б.М. Каштаном и А.А.Ковтуном, отражена в [137].

Метод характеристик и метод интегральных преобразований применяется в работе Y.Mendi, H.D.Mc. Niven [189] для изучения волновой картины в полубесконечном трансверсально – изотропном стержне кругового сечения при импульсном воздействии на его торце. Этот же метод использован R.Greif, S.C.Chou для изучения неустановившихся осесимметричных колебаний ортотропного тела с двумя концентрическими граничными поверхностями в условиях плоской деформации. Авторами выполнены численные расчеты для случая внезапного приложения постоянного давления к внутренней границе сферы и приведены результаты показывающие влияние анизотропии [176].

Распространение поверхностных волн в анизотропных средах изучено R.Burridge [174]. Им рассматривалось решение плоской задачи о действии точечного источника в анизотропном полупространстве при произвольном положении свободной границы относительно плоскостей симметрии среды и выделены объемные, релеевские и псевдоповерхностные волны, затухающие в направлении распространения. Исследованию распространения поверхностных волн вдоль плоскости симметрии анизотропных сред, являющейся или свободной поверхностью (волна Релея) или границей раздела (волна Стоунли) различных сред, посвящена работа W.Johnson William [183]. Решение ищется в виде плоской волны, распространяющейся вдоль плоскости симметрии и экспоненциально убывающей при удалении от нее. Найдены области, в которых возможно существование поверхностных волн для различных направлений распространения, приводятся графики зависимостей скорости волн от направления распространения.

Наличие неканонических границ в большинстве практических задач не всегда позволяет построить аналитическое решение дифференциальных уравнений, и численные методы нередко становятся единственно возможным средством получения достаточно точных результатов. Наиболее распространенными среди них являются методы конечных разностей (МКР), конечных элементов (МКЭ) и граничных интегральных уравнений (МГИУ).

МКР привлекательны тем, что их в принципе можно приложить к любой системе дифференциальных уравнений, но учет граничных условий задачи очень часто является громоздкой и трудно программируемой операцией. Точность полученного численного решения полностью зависит от степени измельчения сетки, определяющей узловые точки, и, следовательно в процессе решения задачи всегда приходится иметь дело с системой алгебраических уравнений очень высокого порядка. Этот метод нашел применение в работах Н.В.Степаненко, К.К.Курманалиева, С.А.Абдукадырова, Н.И.Пинчуковой [1,106,107], А.Н.Ковшова, И.И.Нещеретова [95,96].

МКЭ состоит в разбиении тела на элементы конечных размеров. Поведение каждого элемента приблизительно воспроизводит поведение малой области тела, которую он представляет, но условие полной непрерывности между элементами налагается только в общем смысле (обычно в узлах), а не на всем протяжении границ раздела. Диапазон применимости МКЭ, их эффективность и сравнительная легкость, с которой могут быть учтены реальные граничные условия привели к его широкому распространению. Применению МКЭ для решения задач динамики посвящены публикации Ш.М.Айтиалиева, Ж.К.Масанова, И.Б.Баймаханова, Махметовой Н.М.[116], А.И.Садырина [146], V.Avanessian [172].

Исследование динамики сплошных сред в областях со сложной геометрией при разном типе граничных условий и действующих в средах возмущений методами математического моделирования приводит, как правило, к решению краевых задач гиперболических систем. Эффективным методом решения таких задач является метод граничных интегральных уравнений (МГИУ), который позволяет исходную дифференциальную краевую задачу в области свести к решению системы ГИУ на ее границе. Это позволяет понизить размерность решаемых уравнений, повысить устойчивость численных процедур построения решения и т.д. В настоящее время этот метод применяется очень широко для решения широкого класса задач механики и математической физики.



В отличие от краевых задач для эллиптических и параболических уравнений и систем, для которых метод ГИУ хорошо развит и является основным при доказательстве их корректности, МГИУ для гиперболических систем пока не получил достаточного развития. Во многом это связано с особенностью решений волновых уравнений, для которых характерно наличие характеристических поверхностей – волновых фронтов, на которых решения и их производные могут терпеть скачки. Это приводит к существенной сингулярности фундаментальных решений на волновых фронтах и не дает возможности использовать стандартные методы построения ГИУ, характерные для эллиптических и параболических уравнений. Например, класс фундаментальных решений для волнового уравнения в пространствах нечетной размерности описывается сингулярными обобщенными функциями с поверхностным носителем [12,13]. Поэтому развитие МГИУ для систем гиперболических уравнений требует использования аппарата теории обобщенных функций.

Построение фундаментальных решений, ядер ГИУ, системы уравнений является центральным моментом МГИУ. Фундаментальные решения классических уравнений эллиптического и гиперболического типов довольно хорошо исследованы [7,8,137]. Фундаментальные решения системы уравнений в частных производных изучены мало. В основном эти исследования относятся к конкретным уравнениям механики сплошных сред [3,9, 49,104,130].

Создание и развитие теории многомерных интегральных уравнений принадлежит таким ученым как Н.И.Мусхелишвили [120], В.Д.Купрадзе [104], С.Г. Михлин [117], А.В.Векуа [41], Д.И.Шерман и др. Построению ГИУ статических и стационарных динамических задач теории упругости, а также разработке численной реализации их решения посвящены труды В.Д.Купрадзе, Т.Г.Гегелиа, М.О.Башелейшвили, Т.В.Бурчуладзе [29,106], А.Я.Александрова [7], Ю.В.Верюжского [42], В.З.Партона, П.И.Перлина [131–135], А.Г. Угодчикова, Н.М.Хуторянского [152], М.И. Лазарева [111], В.Д.Копейкина [99], J.C.Lachat, J.O.Watson [186] и др. (для изотропной среды) а также П.И.Перлина, А.Е.Соснина, В.А.Ткачева [134,149], А.Я.Александрова, Б.М.Зиновьева,

Т.Ф.Кармановой [9], В.К.Косенюка, Ш.М.Айтиалиева, М.А.Каюпова [6], К.Х.Кожаметова, О.Ф.Кравченко, Р.Д.Нурмамбетовой [97] и других авторов (для анизотропных сред).

В отличие от краевых задач для эллиптических и параболических уравнений и систем, для которых метод ГИУ хорошо развит и является основным при доказательстве их корректности, МГИУ для гиперболических систем пока не получил достаточно развития. Во многом это связано с особенностью решений волновых уравнений, для которых характерно наличие характеристических поверхностей – волновых фронтов, на которых решения и их производные могут терпеть скачки. Это приводит к существенной сингулярности фундаментальных решений на волновых фронтах и не дает возможности использовать стандартные методы построения ГИУ, характерные для эллиптических и параболических уравнений. Например, класс фундаментальных решений для волнового уравнения в пространствах нечетной размерности описывается сингулярными обобщенными функциями с поверхностным носителем [14]. Поэтому развитие МГИУ для систем гиперболических уравнений требует использования аппарата теории обобщенных функций.

При решении нестационарных задач теории упругости методом ГИУ, развитом в основном для случая изотропных сред, различают два подхода для учета временной переменной. Первый из них представляет собой сочетание МГИУ с преобразованием Лапласа (Фурье). К этому направлению относятся работы В.Д. Купрадзе и его учеников, а также исследования Т.А. Cruse, F.J.Rizzo [176], G.D. Manolis, D.E.Beskos [187], Y.Niwa, S.Kobayashi [190], Ш.М.Айтиалиева, Л.А. Алексеевой, Н.Б.Жанбырбаева, А.Н. Дадаевой [58,59], А.В.Галабурдина, И.З. Ройтфарба, Чу Вьет Кыонг [145] и других авторов.

Второй подход при решении нестационарных динамических задач методом ГИУ связан с применением запаздывающих потенциалов. Временная переменная в этом случае учитывается явно наряду с пространственными переменными. Такой подход использован в работах Н.М.Хуторянского,

В.В.Турилова [152], Ш.М.Айтиалиева, Ш.А. Дильдабаева, А.Б. Жанбырбаева, Г. Уразовой [4,51], D.M.Cole, D.D.Kosloff, J.V.Minster [175].

Использованию метода ГИУ для решения задач краевых задач посвящены исследования Agnantiaris J.P., Polyzos D., D.E.Beskos [173], Ahmad S., Banerjee P.K. [30,31], Chen J., Lin F.Z. и других зарубежных авторов.

В обзорной статье D.E.Beskos [173] дана подробная библиография исследований зарубежных авторов, посвященных использованию ГИУ.

При построении ГИУ центральное место занимают фундаментальные решения, соответствующие действию сосредоточенных сил. Плоская задача распространения волн от сосредоточенного источника в бесконечной анизотропной среде впервые рассматривалась В.А.Свекло [147]. Задача решалась методом функционально – инвариантных решений, разработанным В.И.Смирновым и С.Л.Соболевым и успешно применявшимся к решению ряда динамических задач изотропной теории упругости. В этой работе исследован случай, когда фронты волн являются гладкими функциями. Этот же метод применяется в работах И.О.Осипова. Им приведены соотношения для упругих констант, при выполнении которых имеет место наличие лакун – компонент дополнения к поверхности волнового фронта, в которых фундаментальные решения обращаются в нуль [126-129]. Изучению распространения волн в бесконечной анизотропной среде (плоская задача) при действии сосредоточенного источника методом интегральных преобразований посвящены работы И.Н.Успенского, К.И.Огурцова (трансверсально – изотропная среда) [125,153], R.G.Payton [193], В.С.Будаева [33–38] (ортотропная среда). Авторами приводятся картины волновых фронтов для некоторых конкретных сред.

Фундаментальные решения для пространственного случая получены Н.М.Хуторянским [152]. Тензор Грина, построенный методом плоских волн, представлен в виде контурного интеграла, вычисление которого для анизотропной среды вызывает определенные трудности.

Особое место занимают работы советских и зарубежных авторов (Хуторянский Н.М., Верюжский Ю.В., Перлин П.И., Cruse T.A., Rizzo F.J.) в которых

для решения динамических задач используется метод граничных интегральных уравнений (МГИУ). Метод позволяет решать задачи дифракции на полостях различной формы. Применение этого метода требует дискретизации лишь границы, а не всей области. Это приводит в конечном счете, к решению системы алгебраических уравнений более низкого порядка.

Приведенные работы касаются, как было отмечено выше, в основном однородных изотропных сред. Однако, исследования показывают, что учет анизотропии позволяет получить более полное представление о качественном характере НДС и более достоверные количественные оценки. Различают анизотропию (различие в упругих свойствах для разных направлений) как естественных (древесина, кристаллы, горные породы), так и искусственных (композиты) материалов.

Характерная особенность МГИУ – возможность решения задачи с использованием дискретизации лишь границы области ( в отличие от МКЭ и МКР, применение которых требует дискретизации всей области). Реализация такой возможности в МГИУ предусматривает предварительный переход от исходной краевой задачи для дифференциального уравнения, описывающих некоторый процесс, к соотношениям, связывающим неизвестные функции на границе области или ее части.

Особенность МГИУ состоит в том, что при их реализации дискретизации подлежит лишь границы изучаемых областей, что ведет к существенному уменьшению числа дискретных элементов по сравнению с методами, требующими внутренней дискретизации всего рассматриваемого тела. Следовательно для того, чтобы найти решение задачи этим методом, нужно решить систему алгебраических уравнений более низкого порядка, чем при использовании других численных методов.

МГИУ – прямой вариант МГЭ. В этом варианте неизвестные функции, входящие в интегральные уравнения, являются реальными, имеющими физический смысл переменными задачи. Такое решение интегральных уравнений сразу дает (в теории упругости) смещения и ее усилия на границе, а внутри они

должны быть получены из граничных значений численным интегрированием. Он может быть использован в сочетании с другими численными методами, с такими как МКЭ и МКР. Соответствующие комбинированные решения почти неограниченно расширяют область его применения.

Niva Y., Kobayashi S., Azuma N. рассмотрели задачи о стационарном и нестационарном распределении напряжений вокруг полостей произвольной формы, обусловленном прохождением продольной и поперечной волны ( волны произвольно зависят от времени при помощи суперпозиции соответствующих стационарных решений).

Интегральное соотношение теории потенциала вывел Г.Грин. Метод ГИУ был существенно развит И.Фредгольмом. Он так же использовал методы теории потенциала и теорию линейных интегральных уравнений для решения статической задачи теории упругости однородных тел, когда на границе тела заданы смещения.

Возможности метода Фредгольма расширил Купрадзе В.Д.. С помощью теории потенциала и сингулярных интегральных уравнений он доказал существование решения и предложил приближенный метод решения статических задач для однородных упругих тел и динамических задач для кусочно однородных тел.

В настоящее время численные методы являются основными, а иногда единственным аппаратом решения многих прикладных задач механики деформируемого твердого тела.

Трудами советских ученых Н.И. Мусхелишвили, С.Г. Михлина, В.Д. Купрадзе, Т.Г. Гегелиа, М.О. Башелейшвили, Т.В. Бурчуладзе, Д.И. Шермана, Н.П. Векуа, А.В. Бицадзе и др. была создана стройная теория сингулярных интегральных уравнений для решения краевых задач для эллиптических уравнений и систем, уравнений статических и стационарных задач теории упругости. В настоящее время МГИУ относится к числу интенсивно развиваемых в мире численно-аналитических методов для решения разнообразных

краевых задач математической физики, однако наибольшее развитие он получил при решении статических, квазистатических и стационарных задач.

Методы потенциала не только обеспечивают универсальность, но и при реализации на ЭВМ выгодно отличаются лаконичностью исходных данных и меньшим количеством неизвестных, определяемых в результате решения систем алгебраических уравнений. Однако высокая сложность математического аппарата методов потенциала долгое время являлась препятствием в их применении к решению задач прикладной механики.

Распространение волн в анизотропной среде подчинено более сложным закономерностям, чем в изотропной среде. В однородной изотропной среде могут распространяться два типа волн: продольные и поперечные. В случае продольной волны вектор перемещений совпадает с направлением распространения волны. Эта волна связана с изменением объема и сопровождается сжатием и расширением элементов среды. При этом форма не меняется. В случае поперечной волны вектор перемещений перпендикулярен направлению распространения волны, наблюдается изменение формы элементов среды.

В анизотропных средах распространяются оба типа волн, но в отличие от изотропной среды, векторы перемещений обоих типов волн обладают составляющими как параллельными, так и перпендикулярными к направлениям распространения. Поэтому эти волны называют квазипродольными квазипоперечными волнами. Лишь для определенных направлений волны первого типа переходят в чисто продольные, волны второго типа – в чисто поперечные волны.

Скорости этих волн различны и зависят от упругих констант, плотности среды и от направления движения.

Частным случаем распространения волн является распространение от сосредоточенного источника. Получаемые при этом фундаментальные решения имеют важное значение, так как с их помощью можно строить решения для других задач.

В [13] предложен Метод Обобщенных Функций (МОФ) решения нестационарных краевых задач для волнового уравнения Даламбера в многомерных

пространствах. На его основе был разработан МОФ для решения нестационарных краевых задач динамики анизотропных упругих сред [160,168] и др.

Важное место в исследованиях по теории упругости занимают связанные задачи, в которых учитывается связь поля механических напряжений и деформаций с физическими полями другой природы (тепловыми, электромагнитными и др.). Интерес к изучению пьезоэффекта, обнаруженного французскими исследователями Пьером и Жаком Кюри в 1880г., объясняется широким спектром его приложения: в радиотехнических устройствах для стабилизации и контролирования частот, в кварцевых часах, приборах для обнаружения подводных лодок и многих других. Об актуальности данной проблемы свидетельствует и большое количество публикаций в данной области. К первым исследователям пьезоэффекта относятся Кельвин (молекулярная теория и механическая модель для объяснения пьезоэффекта), Погкельс (определение пьезоэлектрических постоянных ряда материалов, развитие теории электрооптического эффекта в кристаллах), Дюгем (формулировки пьезоэлектрических явлений), Фойгт (систематизация исследований по пьезоэлектричеству до первой мировой войны), В. Коленко (установление зависимости пьезоэлектрического эффекта от симметрии кристаллов), Ю.В. Вульф (открытие существования двух типов пьезоэлектричества). В исследование этого явления весомый вклад внесли также Р.Е Гиббс, Борн, П. Ланжевэн, Никольсон, У. Кэди, У. Мэзон, Г.Липпман, А.Р. Хатсон, Дж. Мак-Фи, Д.Л. Уайт, Ф.Г. Басс, С.А.Гредескул, М.И. Каганов, Ю.В. Гуляев, В.И. Пустовойт, В. Новацкий, М.К. Балакирев, И.А. Гишинский и др.

Из приведенного выше обзора литературы следует, что решение нестационарных динамических задач для анизотропных сред, ослабленных одной или несколькими полостями произвольной формы, является актуальной темой и обладает научной новизной.

В работе рассматривается более сложная анизотропная модель среды, которая по своим характеристикам ближе к реальным средам, в частности, горным породам. Класс решенных дифракционных задач в таких средах очень

узок и ограничивается лишь дифракцией на прямолинейных трещинах в условиях антиплоской деформации.

К первым исследователям пьезоэффекта относятся Кельвин (молекулярная теория и механическая модель для объяснения пьезоэффекта), Поккельс (определение пьезоэлектрических постоянных ряда материалов, развитие теории электрооптического эффекта в кристаллах), Дюгем (формулировки пьезоэлектрических явлений), Фойгт (систематизация исследований по пьезоэлектричеству до первой мировой войны), В. Коленко (установление зависимости пьезоэлектрического эффекта от симметрии кристаллов), Ю.В. Вульф (открытие существования двух типов пьезоэлектричества). В исследование этого явления весомый вклад внесли также Р.Е Гиббс, Борн, П. Ланжевен, Никольсон, У. Кэди, У. Мэзон, Г.Липпман, А.Р. Хатсон, Дж. Мак-Фи, Д.Л. Уайт, Ф.Г. Басс, С.А.Гредескул, М.И. Каганов, Ю.В. Гуляев, В.И. Пустовойт, В. Новацкий, М.К. Балакирев, И.А. Гишинский и других.

Среди действующих источников генерации волн в сплошных средах особенно распространены *транспортные*, связанные с движущимися нагрузками, форма которых не меняется с течением времени. Этот класс задач в упругих средах наиболее исследован в работах Пожуева В.И., казахстанскими механиками в работах Ержанова Ж.С., Айтиалиева Ш.М., Алексеевой Л.А., Украинца В.Н. [15] и др.. При этом скорость движения транспортной нагрузки существенно влияет на тип дифференциальных уравнений, параметрически зависящих от отношения скорости движения к скоростям распространения возмущений в среде (*чисел Маха*, их может быть несколько, в зависимости от типа деформаций среды). При транс- и сверхзвуковых скоростях движения транспортной нагрузки в среде возникают ударные волны различного типа. Математическое моделирование таких процессов на основе построения транспортных решений соответствующих систем уравнений и краевых задач в деформируемых твердых средах, моделирующих динамику грунтов в окрестности транспортных сооружений различного назначения является актуальной научно-



технической проблемой. Этой проблеме посвящены два следующих раздела отчета.

Метод граничных интегральных уравнений, разработанный на основе МОФ для дозвуковых транспортных краевых задач Алексеевой Л.А. используется для решения модельной транспортной краевой задачи для упругого полупространства, по поверхности которого движется нагрузка с дозвуковой скоростью. Задача моделирует процессы, связанные с воздействием движущегося транспорта на подстилающую поверхность и позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние породного массива в зависимости от его физико-механических свойств, типа движущейся нагрузки и скорости ее движения, которая не превосходит скорости распространения упругих волн в среде. Последнее типично для даже самых современных наземных транспортных средств, скорость движения которых на порядок ниже вышеупомянутой.

Для учета реальных свойств грунтов, в частности их пористости и водонасыщенности, математическая модель упругой среды недостаточна. Необходимо привлечение других, более сложных моделей. Наиболее разработанной для решения краевых задач динамики грунтов в настоящее время является двухкомпонентная среда М.Био, содержащая две компоненты (упругую твердую и жидкую компоненты), которая позволяет моделировать динамику грунтов с учетом их пористости и водонасыщенности [115]. Волновые процессы в среде Био исследовались в работах Био М.А., Виллиса Д.С., Рахматуллина Х.А., Саатова Я.У., Филиппова И.Г., Артыкова Т.У. и др.

Математическое моделирование таких процессов на основе построения транспортных решений соответствующих систем уравнений и краевых задач в деформируемых твердых средах, более приближенных к моделированию динамики грунтов в окрестности транспортных подземных сооружений, является актуальной научно-технической проблемой. Наиболее разработанной для решения краевых задач динамики грунтов в настоящее время помимо анизотропной упругой среды, является двухкомпонентная среда М.Био, содержащая твердую упругую и жидкую компоненту, которая позволяет моделировать ди-

намику грунтов с учетом их пористости и водонасыщенности. Волновые процессы в среде Био исследовались в работах Рахматуллина Х.А., Саатова Я.У., Филиппова И.Г., Артыкова Т.У., Мардонова Б.М. [115,143] и др. Транспортные задачи для среды М.Био ранее не решались.

В диссертации рассмотрены задачи динамики сред с усложненными свойствами, для которых разработан метод обобщенных функций, позволяющий перейти от исходной краевой задачи к решению дифференциальных уравнений в пространстве обобщенных функций с определенной правой частью из класса сингулярных обобщенных функций типа простых и двойных слоев и использовать краевые условия и свойства фундаментальных решений.

На основе этого метода разработан метод граничных интегральных уравнений, который позволяет исходную дифференциальную начально-краевую задачу привести к решению системы сингулярных граничных интегральных уравнений для определения неизвестных граничных функций, что снижает размерность решаемых уравнений, требований на гладкость решений и повышает устойчивость численных процедур. Построены динамические аналоги формул Сомильяны и сингулярные граничные интегральные уравнения для решения ряда краевых задач. Возможности разработанного метода неограниченны, позволяют решать широкий класс задач механики и математической физики.

## **1.2 Краткое содержание диссертации по главам**

Во **введении** диссертации дается общая характеристика работы: актуальность темы диссертации, научная новизна работы, связь темы диссертации с крупными научными программами, цель и задачи исследования, практическая значимость полученных результатов, основные положения диссертации, выносимые на защиту, личный вклад соискателя, апробации результатов исследования, полнота отражения результатов диссертация в публикациях, структура и объем диссертации.

**В первом разделе** представлены некоторые сведения из теории обобщенных функций, необходимые для дальнейших исследований.

Рассматривается постановка нестационарных краевых задач для строго гиперболического уравнения 2-го порядка, описывающего движение анизотропной упругой среды, находящейся в условиях антиплоской деформации. Рассмотрены ударные волны как обобщенные решения уравнений движения рассматриваемых сред, даны условия на волновых фронтах. С использованием методов теории обобщенных функций получен закон сохранения энергии с учетом ударных волн, рассмотрена единственность решений. Для рассматриваемых уравнений построены их фундаментальные решения. Построены динамические аналоги формул Грина и Гаусса в пространстве обобщенных функций, получены их интегральные представления.

**Во втором разделе** на основе преобразования Фурье и Лапласа обобщенных функций разработан метод построения фундаментальных решений уравнений движения упругих анизотропных сред; построены тензора Грина для уравнений движения этих сред, тензора фундаментальных напряжений, и их первообразные, исследованы их асимптотические свойства.

Исследовано влияние степени анизотропии среды на характер напряженно-деформированного состояния породного массива в окрестности сосредоточенных импульсных источников. Представлены результаты численных расчетов тензора Грина и тензора фундаментальных напряжений в различных анизотропных (ортотропных) упругих средах при действии импульсных источников возмущений. Показано, что в случае сред со слабой анизотропией упругих свойств топологический тип волновых фронтов подобен расширяющимся сферам. В средах с сильной анизотропией появляются сложные волновые фронты и лакуны.

Разработана математическая модель динамики породного массива при действии источника возмущений вблизи его дневной поверхности с учетом его упругих свойств. Построены трансформанты тензора Грина первой и второй краевой задачи динамики для анизотропной полуплоскости.

**В третьем разделе** исследуются нестационарные краевые задачи в упругой анизотропной среде. Построены обобщенные решения нестационарных краевых задач для упругой анизотропной среды, получены условия на волновых фронтах. Дана постановка начально – краевых задач, доказана единственность решений краевых задач. Построены нестационарные аналоги формул Сомильяны, Гаусса в пространстве обобщенных функций и сингулярные граничные интегральные уравнения начально – краевых задач. Даны регулярные интегральные представления решений при плоской деформации.

**В четвертом разделе** диссертации рассматриваются стационарные краевые задачи для упругой анизотропной среды. Построены обобщенные решения стационарных краевых задач для упругой анизотропной среды и их интегральные представления. Дана постановка краевых задач, показана единственность решения. Представлены стационарные аналоги формул Сомильяны, Гаусса в пространстве обобщенных функций и граничные интегральные уравнения стационарных краевых задач при плоской деформации. Рассмотрена дифракция волн сдвига в упругой анизотропной среде при антиплоской деформации.

**В пятом разделе** диссертации разработан метод обобщенных функций для решения нестационарных краевых задач динамики пьезоупругих сред. Выписаны уравнения движения пьезоупругих сред, рассмотрены частные случаи пьезоупругих сред. Построены обобщенные решения нестационарных краевых задач для пьезоупругих сред, получены условия на волновых фронтах. Получены динамические аналоги формул Сомильяны, которые позволяют граничным значениям искомых решений (скоростям, напряжениям и др.) строить решение в среде.

Представлены уравнения движения среды Био и их фундаментальные решения. На основе обобщенного преобразования Фурье построены фундаментальные и обобщенные решения уравнений движения двухкомпонентной среды Био, содержащей твердую и жидкую компоненты, при транспортных нагрузках во всем диапазоне скоростей от дозвуковых (скорость движения транспортной нагрузки меньше скорости распространения волн в среде) до

сверхзвуковых (скорость выше звуковых) и изучены их свойства. Полученные решения описывают динамику среды Био при движущихся сосредоточенных на оси и рассредоточенных по пространству массовых силах. Для сверхзвуковых нагрузок получены условия на фронтах ударных волн

### 1.3 Краткие выводы

Диссертация связана с исследованием волновых процессов в деформируемых твердых средах, порождаемых внешними динамическими воздействиями различной природы. Это направление относится к актуальным проблемам механики и математической физики и тесно связано с построением решений краевых задач для гиперболических систем уравнений и уравнений смешанного типа. Математическая теория краевых задач для таких уравнений пока не имеет достаточного развития виду сложности динамических процессов в средах, сопровождающихся ударными волнами, что приводит к недифференцируемости решений на фронтах ударных волн и затрудняет использование классических математических методов для изучения таких явлений. Основное развитие в этом направлении связано с исследованием стационарных колебательных процессов, поскольку в этом случае для определения амплитуд колебаний получаются эллиптические краевые задачи.

В работе рассматривается более сложная анизотропная модель среды, которая по своим характеристикам ближе к реальным средам, в частности, горным породам. Класс решенных дифракционных задач в таких средах очень узок и ограничивается лишь дифракцией на прямолинейных трещинах в условиях антиплоской деформации. Здесь для таких пространств развиваются методы, ранее разработанные для решения нестационарных краевых задач динамики изотропных и анизотропных упругих сред.



## **ГЛАВА 2**

### **ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ СРЕД ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ**

Процессы распространения волн в сплошных средах описываются, как правило, гиперболическими уравнениями и системами. Для гиперболических уравнений характерным является наличие характеристических поверхностей, на которых сами решения, либо их производные разрывны. В физических процессах они описывают ударные волны, на фронтах которых исследуемые характеристики процесса (скорости, напряжения, давление, градиент температуры и др.) могут иметь скачки. Математическая теория краевых задач для таких уравнений требует привлечения аппарата теории обобщенных функций, поскольку решения таких уравнений, как правило, относятся к классу обобщенных функций. Поэтому в начале главы представлены некоторые сведения из теории обобщенных функций, необходимые для дальнейших исследований.

В данной главе рассматривается постановка нестационарных краевых задач для строго гиперболического уравнения 2-го порядка, описывающего движение анизотропной упругой среды, находящейся в условиях антиплоской деформации. Рассмотрены ударные волны как обобщенные решения уравнений движения рассматриваемых сред, даны условия на волновых фронтах. С использованием методов теории обобщенных функций получен закон сохранения энергии с учетом ударных волн, рассмотрена единственность решений. Для рассматриваемых уравнений построены их фундаментальные решения. Построены динамические аналоги формул Грина и Гаусса в пространстве обобщенных функций, получены их интегральные представления.

#### **2.1 Предварительные сведения из теории обобщенных функций**

Обобщенные функции были введены в связи с трудностями решения задач математической физики, механики сплошной среды (краевые задачи тео-

рии упругости), квантовой механики, электромагнетизма и других, где, помимо непрерывных функций, описывающих непрерывно распределенные величины (масса, источники тепла, механический импульс и др.), используются разрывные функции для представления сосредоточенных величин (точечная масса, плотность простого или двойного слоя, сосредоточенные нагрузки: интенсивность мгновенного точечного источника, точечные источники, диполи, моменты), электрические величины (напряженность, потенциал, сила тока, электрический заряд, отрицательные частоты) и другие. Из разрывных функций важную роль сыграла единичная функция, введенная в 1898 г. английским инженером Хевисайдом для решения операционными методами некоторых дифференциальных уравнений теории электрических цепей и названная его именем. В 1926 г. английский физик Дирак ввел в квантовой механике символ  $\delta$ , названный им дельта – функцией, которая явилась первой систематически применяемой обобщенной функцией и с физической точки зрения представляет собой плотность единичного заряда, помещенного в начале координат.

Основы математической теории обобщенных функций были заложены С.Л. Соболевым [148] (ввел понятие обобщенного решения дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа) и Л.Шварцем [158] (математически обосновал формализм применения обобщенных функций в различных областях механики, физики и техники). Большой вклад в развитие теории обобщенных функций внесли И.М. Гельфанд, Г.Е. Шиллов, I. Normander, В.С. Владимиров, А.Н. Zemanian, А. С. Розенберг, В.А. Лазарян и другие [43,44,209,111,144.

Заметим, что при решении конкретных задач механики, физики  $\delta$  – функция (и другие обобщенные функции) встречаются, как правило, только на промежуточных этапах; в окончательном виде они или отсутствуют, или фигурируют под знаком интеграла в произведении с какой – либо достаточно хорошей функцией. Это указывает на то, что в действительности каждая обобщенная функция связана с определенным функционалом и обобщенные функции с помощью линейных функционалов вводятся естественным путем, что оказыва-



ется эффективным и с точки зрения моделирования физических явлений, и с точки зрения вычислений.

Обобщенная функция является обобщением классического понятия функции и определяется посредством непрерывных функций как линейный непрерывный функционал на пространстве таких функций. Непрерывные функции являются основными (достаточно «хорошими») функциями.

**Регулярные и сингулярные обобщенные функции.** Рассмотрим множество  $x \in R^N$ . Пространство основных функций  $D = D(R^N)$  включает в себя все финитные бесконечно дифференцируемые в  $R^N$  функции. Носитель непрерывной функции  $\varphi(x)$  – замыкание множества точек, где  $\varphi(x) \neq 0$ , обозначим через  $\text{supp } \varphi$ . Если функция  $\varphi(x)$  финитна, то  $\text{supp } \varphi$  ограничен. Линейное пространство  $D$  с введенной в нем сходимостью называется пространством основных функций  $D$  [44,с.85].

*Обобщенной функцией* называется линейный непрерывный функционал  $(f, \varphi)$ , определенный на пространстве  $D$  финитных бесконечно дифференцируемых в  $R^N$  функций  $\varphi(x)$  [44,с.89]. Пространство обобщенных функций обозначим через  $D' = D'(R^N)$ .

Обобщенные функции  $f$  и  $g$  называются *равными*:  $f = g$ , если  $\forall \varphi \in D(R^N)$  имеет место равенство  $(f, \varphi) = (g, \varphi)$ .

*Регулярными обобщенными функциями* называются обобщенные функции, определяемые локально интегрируемыми в  $R^N$  функциями по формуле [Влад1981,с.95]

$$(f, \varphi) = \int_{R^N} f(x)\varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in D(R^N) \quad (2.1)$$

**Л е м м а** (дю Буа – Реймон) [44,с.96]. *Для того чтобы локально интегрируемая в области  $G$  функция  $f(x)$  обращалась в нуль в области  $G$  в смыс-*

ле обобщенных функций, необходимо и достаточно, чтобы  $f(x) = 0$  почти везде в  $G$ .

Согласно лемме дю Буа – Реймона всякая регулярная обобщенная функция в области  $G$  определяется единственной (с точностью до значений на множестве меры нуль) локально интегрируемой в области определения функцией. Следовательно, между локально интегрируемыми в  $G$  функциями и регулярными обобщенными функциями существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому можно отождествлять по мере локально интегрируемую в  $G$  функцию  $f(x)$  и порождаемую ею по формуле (2.1) обобщенную функцию – функционал  $(f, \varphi)$ . В этом смысле локально интегрируемые в  $R^N$  функции являются регулярными обобщенными функциями.

Обобщенные функции, не представимые в виде (2.1), называются *сингулярными обобщенными функциями*. Согласно определению сингулярную обобщенную функцию нельзя отождествить ни с какой локально интегрируемой функцией. Примеры сингулярных обобщенных функций:

1.  $\delta$  – функция Дирака [44,с.97]:

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0) \quad \varphi \in D(R^N) \quad (2.2)$$

2.  $\alpha(x)\delta_S(x)$  – *простой слой* на поверхности  $S$  с плотностью  $\alpha$ . Эта функция является обобщением  $\delta$  – функции и определяет линейный функционал в виде поверхностного интеграла [44,с.98]:

$$(\alpha\delta_S, \varphi) = \int_S \alpha(x)\varphi(x)dS(x) \quad \forall \varphi(x) \in D \quad (2.3)$$

$\alpha(x)$  – непрерывная на  $S$ ,  $dS(x)$  – дифференциал площади в точке  $x \in S$ .

3.  $-\frac{\partial}{\partial n}(\beta\delta_S(x))$  – *двойной слой* на поверхности  $S$  с плотностью  $\beta(x)$

[44,с.115]:

$$\left( -\frac{\partial}{\partial n}(\beta\delta_S), \varphi \right) = \int_S \beta(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n(x)} dS(x), \quad \forall \varphi \in D \quad (2.4)$$

где  $\frac{\partial}{\partial n} = \sum_i^N \partial_i n_i$ ,  $\partial_i = \partial / \partial x_i$ ,  $n_i$  – компоненты единичного вектора внешней нормали  $n$  к поверхности  $S$  в точке  $x \in S$ ,  $\beta(x)$  – непрерывная функция, заданная на  $S$ .

Эти обобщенные функции используются в дальнейшем при построении решений краевых задач.

**Производная обобщенной функции  $f \in D'$  (обобщенная производная)** определяется следующей формулой [44, с.104]

$$(D^m f, \varphi) = (-1)^{|m|} (f, D^m \varphi), \quad \varphi \in D \quad (2.5)$$

где  $m = (m_1, m_2, \dots, m_N)$  – мультииндекс,  $m_j$  – целые неотрицательные числа,  $D^m f$  – производная функции  $f(x)$  порядка  $|m| = m_1 + m_2 + \dots + m_N$ :

$$D^m f(x) = \frac{\partial^{|m|} f(x_1, \dots, x_N)}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_N^{m_N}},$$

Для функции  $f = \delta$  формула (2.5) принимает вид

$$(D^m \delta, \varphi) = (-1)^{|m|} D^m \varphi(0), \quad \varphi \in D \quad (2.6)$$

Обозначим через  $[f]_S$  – скачок функции  $f(x)$  при переходе извне через поверхность  $S$ :

$$[f(x)]_S = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (f(x + \varepsilon n) - f(x - \varepsilon n)), \quad x \in S \quad (2.7)$$

Если  $f(x)$  дифференцируема в пространстве  $R^N$  всюду за исключением поверхности  $S$ , на которой она терпит разрыв первого рода, то ее обобщенная производная вычисляется по формуле [44, с.116]

$$\partial_i f(x) = \{\partial_i f(x)\} + [f(x)]_S n_i(x) \delta_S(x) \quad (2.8)$$

В формуле (2.8) первое слагаемое справа – классическая производная.

**Свертка обобщенных функций.** *Сверткой*  $f * g$  локально интегрируемых в  $R^N$  функций  $f(x)$  и  $g(x)$  называется функция [44, с.132]

$$(f * g)(x) = \int_{R^N} f(y)g(x-y)dy = \int_{R^N} g(y)f(x-y)dy = (g * f)(x) \quad (2.9)$$

Для существования этой свертки функция  $h(x) = \int_{R^N} |g(y)f(x-y)|dy$  должна быть также локально интегрируемой в пространстве  $R^N$ . Если свертка  $f * g$  существует, то существует и свертка  $g * f$  и они равны:

$$f * g = g * f$$

а также существуют свертки  $D^\alpha f * g$ ,  $f * D^\alpha g$  и справедлива формула *дифференцирования свертки* [44, с.136]:

$$D^\alpha f * g = D^\alpha (f * g) = f * D^\alpha g \quad (2.10)$$

Свертка любой обобщенной функции с  $\delta$  – функцией существует и равна самой функции:

$$f * \delta = \delta * f = f$$

**Преобразование Фурье.** *Обобщенной функцией медленного роста* называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных

функций. Пусть  $f(x)$  – абсолютно интегрируемая функция на  $R^N$ . Преобразование Фурье регулярной обобщенной функции  $f$  есть

$$F[f](\xi) = \int_{R^N} f(x)e^{i(\xi,x)} dx, \quad |F[f](\xi)| \leq \int |f(x)| dx < \infty \quad (2.11)$$

– непрерывная, ограниченная в  $R^N$  функция, определяющая обобщенную функцию из  $\mathcal{S}'$  – пространства обобщенных функций медленного роста [44, с160]:

$$(F[f], \varphi) = \int_{R^N} F[f](\xi)\varphi(\xi)d\xi = \int_{R^N} f(x)F[\varphi](x)dx = (f, F[\varphi]) \quad (2.12)$$

Преобразование Фурье существует, если  $f$  - обобщенная функция медленного роста. Преобразование Фурье производной функции  $f$  определяется формулой [44,с162]:

$$F[D^\alpha f] = (-i\xi)^\alpha F[f] \quad (2.13)$$

Преобразование Фурье свертки обобщенной функции  $f \in \mathcal{S}'$  и финитной обобщенной функции  $g$  представляется в виде [44, с165]:

$$F[f * g] = F[g]F[f] = F[f]F[g] \quad (2.14)$$

**Фундаментальные решения дифференциальных уравнений.** Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$L(\partial_x)u(x) = f(x), \quad L(\partial_x) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha D^\alpha \quad (2.15)$$

Обобщенным решением уравнения (2.15) в области  $G$  называется всякая обобщенная функция  $u \in \mathcal{D}'$ , удовлетворяющая этому уравнению в обобщенном смысле [44,с.191]:

$$(L(\partial_x)u, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in D(G).$$

Очевидно, всякое классическое решение уравнения (2.15) является и его обобщенным решением. Но не наоборот.

Фундаментальным решением уравнения (2.15) называется обобщенная функция  $U(x) \in D'(G)$ , удовлетворяющая в области  $G$  этому уравнению при  $f = \delta(x)$ :

$$L(\partial_x)U(x) = \delta(x), \quad x \in G \quad (2.16)$$

Фундаментальное решение  $U(x)$  уравнения (2.15) не единственно, оно определяется с точностью до решения однородного уравнения. Используя фундаментальное решение  $U(x)$  уравнения (2.15) можно построить решение для него в случае произвольной правой части  $f(x)$ :

$$u(x) = U(x) * f(x) \quad (2.17)$$

Это решение единственно в классе тех обобщенных функций  $f$  пространства  $D'$ , для которых существует свертка с  $U(x)$ . Для регулярных функций  $f(x)$  свертка определяется формулой (2.9).

## 2.2 Антиплоская деформация в анизотропных упругих средах. Уравнения движения

Рассматривается упругая однородная анизотропная среда, характеризуемая тензором четвертого ранга упругих постоянных  $C_{ij}^{ml}$ , обладающего свойствами симметрии по отношению к перестановке индексов

$$C_{ij}^{ml} = C_{ij}^{lm} = C_{ji}^{ml} = C_{ji}^{lm}, \quad i, j, m, l = \overline{1,3} \quad (2.18)$$

Структура этого тензора определяет тип анизотропии рассматриваемой среды. В общем случае произвольной анизотропии тензор упругих констант определяется 81 компонентами, но в силу свойства симметрии (2.18) и произвольности

выбора направлений осей декартовой системы координат независимыми из них являются 21 величина [Петрашень, Федоров]. Наличие симметрии среды влечет возникновение дополнительной зависимости между компонентами тензора упругих постоянных, что приводит к уменьшению количества независимых констант. Соотношения симметрии (2.18) позволяют представить тензор  $C_{ij}^{ml}$  в виде квадратной матрицы  $C_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = \overline{1,6}$ ):

$$C_{\alpha\beta} \equiv \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{26} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{61} & C_{62} & \dots & C_{66} \end{pmatrix}, \quad C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha} \quad (2.19)$$

Соответствие между парами индексов  $(ij)$ ,  $(ml)$  и индексами  $\alpha$ ,  $\beta$  устанавливается по схеме  $(11) \leftrightarrow 1$ ,  $(22) \leftrightarrow 2$ ,  $(33) \leftrightarrow 3$ ,  $(23) = (32) \leftrightarrow 4$ ,  $(31) = (13) \leftrightarrow 5$ ,  $(12) = (21) \leftrightarrow 6$ .

В силу положительной определенности энергии упругой деформации элементы матрицы (2.19) удовлетворяют условиям:

$$C_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \quad |C_{\alpha\beta}| > 0 \quad (\alpha, \beta = \overline{1,6}) \quad (2.20)$$

Исследования показывают что существуют 32 группы или класса симметрии кристаллов, которые разделяются на 7 типов групп – так называемых кристаллических систем или сингоний [154]. Приведем тензоры упругих констант для некоторых сред.

В случае сред с одной плоскостью упругой симметрии (моноклинные кристаллы) число независимых упругих констант равно 13:

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Для сред с тремя взаимно ортогональными плоскостями упругой симметрии (ромбические кристаллы) упругие постоянные составляют матрицу, содержащую 9 независимых констант:

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Такие среды называют ортотропными (ортогонально анизотропными) [113 и др].

Среды с одной осью симметрии бесконечно высокого порядка (кристаллы гексагональной сингонии), при повороте вокруг которой на любой угол среда совмещается сама с собой, характеризуются 5 независимыми константами:

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

и называются трансверсально – изотропными (транстропными) средами.



Среда, в которой все направления упруго–эквивалентные, является изотропной средой:

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Для такой среды имеет место

$$C_{ij}^{ml} = \lambda \delta_{ij} \delta_{lm} + \mu (\delta_{im} \delta_{jl} + \delta_{jm} \delta_{il}), \quad (2.24)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $\lambda$ ,  $\mu$  – упругие константы Ламе:

$$\mu = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}), \quad \lambda = C_{12}$$

Для упругой анизотропной среды закон Гука, связывающий тензоры напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}$ , записывается в виде

$$\sigma_{im}(x,t) = \sum_{j,l=1}^3 C_{ij}^{ml} \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x_l}, \quad (2.25)$$

где  $u_j(x,t)$  – компоненты вектора перемещений в момент времени  $t$  в точке  $x = (x_1, \dots, x_N)$  в декартовой системе координат,  $N$  – размерность пространства (в физических задачах при плоской деформации  $N = 2$ ,  $N = 3$  соответствует пространственному случаю). Предполагая суммирование по повторяющимся индексам в произведении, далее знак суммы опускаем.

Введем следующие обозначения:  $u_{,i} = \partial u / \partial x_i$ ,  $u_{,ij} = \partial^2 u / \partial x_i \partial x_j$ ,

$$\dot{u} = u_{,t} = \partial u / \partial t, \quad \ddot{u} = u_{,tt} = \partial^2 u / \partial t^2.$$

Уравнения движения сплошной среды [123]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(x,t)}{\partial x_j} + G_i(x,t) = \rho \frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial t^2}$$

для анизотропной среды с учетом закона Гука (2.25) представляют собой систему гиперболических уравнений:

$$C_{ij}^{ml} \frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial x_m \partial x_l} - \rho \frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial t^2} + G_i(x,t) = 0, \quad i, j, m, l = \overline{1,3} \quad (2.26)$$

где  $\rho$  – плотность среды,  $G_i$  – компоненты массовой силы.

Здесь и ниже всюду по одноименным индексам в произведении проводится суммирование в указанных пределах их изменения (тензорная свертка).

В условиях антиплоской деформации характеристики напряженно – деформированного состояния зависят только от координат  $x_1, x_2$ , две компоненты вектора перемещения  $u(x,t)$  среды равны нулю, например,  $u_1 = u_2 = 0$ ,  $u_3 = 0$ . Тогда  $u = u_3(x_1, x_2, t)$ ,  $\sigma_{31} \neq 0$ ,  $\sigma_{32} \neq 0$ , остальные компоненты тензора напряжений равны нулю.

Система уравнений движения анизотропной среды (2.26) в случае антиплоской деформации сводится к одному гиперболическому уравнению, вид которого зависит от рассматриваемой среды.

Если рассматриваемая среда обладает плоскостью симметрии (моноклинная система, 13 независимых коэффициентов упругих констант), система уравнений (2.26) приводится к гиперболическому уравнению:

$$C_{33}^{11} u_{,11} + 2C_{33}^{12} u_{,12} + C_{33}^{22} u_{,22} + G = \rho u_{,tt} \quad (2.27)$$

Для ортотропных сред, обладающих тремя плоскостями упругой симметрии (ромбическая система, 9 независимых коэффициентов упругих констант) имеем

$$C_{33}^{11} u_{,11} + C_{33}^{22} u_{,22} + G = \rho u_{,tt} \quad (2.28)$$

Это гиперболическое уравнение не содержит смешанных производных. Соответствующая замена переменных приводит уравнение (2.28) к классическому волновому уравнению.

В случае трансверсально – изотропных сред (гексагональная система, 5 независимых коэффициентов упругих констант) имеет место следующее уравнение

$$C_{33}^{11}(u_{,11} + u_{,22}) + G = \rho u_{,tt} \quad (2.29)$$

Однако, для трансверсально – изотропной среды с наклоненной под углом  $\varphi$  к горизонту плоскостью изотропии относительно декартовой системы координат уравнения движения приводятся к гиперболическому уравнению вида (2.27).

Уравнение, подобное (2.29), но с другой константой, получаем для изотропной среды (гексагональная система относительно двух взаимно ортогональных осей, 2 независимых коэффициента упругих констант):

$$\mu(u_{,11} + u_{,22}) + G = \rho u_{,tt} \quad (2.30)$$

В общем случае уравнение движения анизотропной упругой среды, находящейся в условиях антиплоской деформации, описываются строго гиперболическим уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$L(\partial_x, \partial_t)u(x, t) = G(x, t), \quad (x, t) \in R^{N+1} \quad (2.31)$$

где  $L(\partial_x, \partial_t)$  – дифференциальный оператор вида

$$L(\partial_x, \partial_t) = \sum_{i,j}^N a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (2.32)$$

Коэффициенты  $a_{ij} = a_{ji} = const$ , соответствующие упругим константам рассматриваемой среды, удовлетворяют условию строгой гиперболичности:

$$a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \lambda \|\xi\|^2, \quad \lambda = const > 0 \quad (2.33)$$

$\rho = const$ ,  $G(x, t)$  – регулярная функция.

### 2.3 Ударные волны при антиплоской деформации как обобщенные решения уравнений движения

Рассмотрим уравнение (2.31). Пусть  $u(x, t)$  – решение уравнения (2.31) – дважды дифференцируемая функция почти всюду, за исключением, быть может, характеристической поверхности  $F$ , неподвижной в  $R^{N+1}$  и подвижной в  $R^N$  (волновой фронт  $F_t$ ), на которой производные могут иметь скачки. Уравнение такой поверхности  $F$  имеет вид

$$a_{ij}v_i v_j - \rho v_t^2 = 0 \quad (2.34)$$

$v(x, t) = (v_1, \dots, v_N, v_t)$  – нормаль к характеристической поверхности  $F$ , связанная со скоростью  $c$  поверхности  $F$  в пространстве  $R^N$  соотношением

$$c = -v_t / \|v\|_{R^N} \quad \|v\| = \sqrt{v_j v_j} \quad (2.35)$$

Для вывода условий на скачки удобно воспользоваться аппаратом теории обобщенных функций.

Решение  $u(x, t)$ , рассматриваемое как регулярная обобщенная функция, обозначим через  $\hat{u}(x, t) = u(x, t)$ . Аналогично  $\hat{G}(x, t) = G(x, t)$ .

Обозначим через  $[f]_{F_t}$  – скачок функции  $f$  на волновом фронте  $F_t$ :

$$[f(x, t)]_{F_t} = f^+(x, t) - f^-(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (f(x + \varepsilon m, t) - f(x - \varepsilon m, t)), \quad x \in F_t$$

здесь  $m(x, t) = (m_1, \dots, m_N)$  – единичный вектор нормали к поверхности  $F_t$ , направленный в сторону распространения фронта волны,  $f^+$  – значение функции со стороны нормали,  $f^-$  – с противоположной стороны:

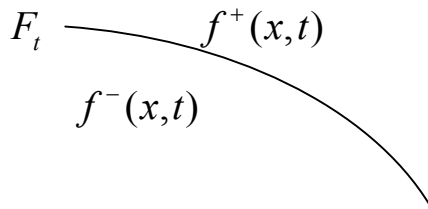


Рисунок 1

**Т е о р е м а 1.1.** Если  $u(x,t)$  удовлетворяет уравнению (2.31) почти всюду, за исключением волновых фронтов, удовлетворяющих условию (2.34), на которых выполняются условия на скачки:

$$[u(x,t)]_{F_t} = 0 \quad (2.36)$$

$$[a_{ij}u_{,i} m_j + \rho c u_{,t}]_{F_t} = 0 \quad (2.37)$$

то  $\hat{u}(x,t)$  является обобщенным решением (2.31).

*Доказательство.* С учетом правил дифференцирования обобщенных функций (2.8) имеем:

$$\hat{u}_{,i} = u_{,i} + [u]_F v_i \delta_F(x,t) \quad (2.38)$$

$$\hat{u}_{,ij} = u_{,ij} + ([u]_F v_i \delta_F(x,t))_{,j} + [u_{,i}]_F v_j \delta_F(x,t) \quad (2.39)$$

где первые слагаемые справа в (2.38) и (2.39) являются производными в классическом смысле,  $[u]_F \delta_F(x,t)$  – простой слой на характеристической поверхности  $F$ . С учетом выражений (2.38) и (2.39) уравнение (2.31) для функции  $\hat{u}(x,t)$  имеет вид:

$$\begin{aligned} L(\partial_x, \partial_t) \hat{u}(x,t) - \hat{G}(x,t) = & \quad (2.40) \\ = a_{ij} u_{,ij}(x,t) - \rho u_{,tt}(x,t) - G(x,t) + a_{ij} [u_{,i}(x,t)]_F v_j \delta_F + \\ + \{ a_{ij} [u(x,t)]_F v_i \delta_F \}_{,j} - \rho [u_{,t}(x,t)]_F v_t \delta_F - \rho \{ [u(x,t)]_F v_t \delta_F \}_{,t} \end{aligned}$$

Функция  $\hat{u}(\mathbf{x}, t)$  будет удовлетворять уравнению (2.31) в обобщенном смысле, если правая часть выражения (2.40) равна нулю, т.е. должны равняться нулю плотности слоев на характеристической поверхности  $F$  :

$$[u(x, t)]_F = 0 \quad \text{и} \quad [a_{ij}u_{,i}v_j - \rho u_{,t}v_t]_F = 0 \quad (2.41)$$

Запишем эти условия на соответствующем волновом фронте  $F_t$ . В силу непрерывности функции  $u(x, t)$  вне фронта волны имеем

$$[u]_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (u(x + \varepsilon m, t) - u(x - \varepsilon m, t)) = [u]_{F_t}$$

С учетом

$$m_i = v_i / \|v\|_N$$

условия (2.41) на подвижных волновых фронтах примут вид (2.36), (2.37), где  $c$  есть скорость движения волнового фронта, которая определяется решением характеристического уравнения (2.34) и равна

$$c = \sqrt{a_{ij}m_i m_j / \rho} \quad (2.42)$$

Поэтому все плотности простых и двойных слоев на поверхности  $F_t$  равны нулю. Следовательно, обобщенное решение также удовлетворяет (2.31). Теорема доказана.

Заметим, что в отличие от уравнения Даламбера

$$(\partial_t^2 - c^2 \Delta)u = f(x, t)$$

скорость  $c$  не является постоянной на фронте волны и зависит от направления нормали в каждой точке фронта волны. В силу (2.34)

$$c_{\min} \leq c < c_{\max},$$

где  $c_{\min} = \min \{a_{ij} m_i m_j / \rho\}$ ,  $c_{\max} = \max \{a_{ij} m_i m_j / \rho\}$

**С л е д с т в и е.** Из условия непрерывности решения на фронте волны следует условие непрерывности касательных производных функции  $u(x, t)$  на волновом фронте, которое имеет вид:

$$[cu_{,i} - u_{,t} m_t]_{F_t} = 0, \quad i = \overline{1, N} \quad (2.43)$$

## 2.4 Постановка краевых задач для гиперболического уравнения 2-го порядка

Пусть в области  $x \in S^- \subset R^N$ , ограниченной поверхностью Ляпунова  $S$ , требуется построить решение краевых задач для уравнения (2.31) при  $t \geq 0$ . Обозначим через  $D^- = S^- \times [0, \infty)$  – пространственно – временной цилиндр:  $(x, t) \in D^-$ ,  $D = S \times [0, \infty)$ ,  $n = (n_1, \dots, n_N)$  – единичный вектор внешней нормали к поверхности  $S$  ( $\|n\| = 1$ ):  $\|n(x_2) - n(x_1)\| = O(\|x_2 - x_1\|)$  для  $x_1, x_2 \in S$ . Предполагается, что  $G \in C(D^- \cup D)$ .

*Краевая задача I.* Найти решение уравнения (2.31), удовлетворяющее при  $t = 0$  начальным условиям:

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in (S^- \cup S), \quad u_{,t}(x, 0) = u^1(x), \quad x \in S^-, \quad (2.44)$$

условиям Дирихле

$$u(x, t) = u^S(x, t), \quad x \in S, \quad t \geq 0 \quad (2.45)$$

и условиям на волновых фронтах (2.36) - (2.37).

*Краевая задача II.* Найти решение уравнения (2.31), удовлетворяющее при  $t = 0$  начальным условиям (2.44), условиям типа условий Неймана

$$a_{ij} u_{,i} n_j = g_i(x, t), \quad x \in S, \quad t \geq 0 \quad (2.46)$$

и условиям на волновых фронтах (2.36) - (2.37).

Предполагается, что начальные условия заданы и известно одно из граничных условий соответственно рассматриваемой краевой задаче, причем  $u^S \in C(S \times t)$ ,  $g \in C'(S \times t)$ ,  $C'$  – кусочно–непрерывные на данном множестве функции.

**О п р е д е л е н и е.** Функция  $u(x,t) \in C^2(D^-) \cap C^1(D^- \cup D)$  называется *классическим* решением уравнения (2.31), если она удовлетворяет уравнению (2.31) в цилиндре  $D^-$ , начальным условиям (2.44) на нижнем основании, граничным условиям (2.45) либо (2.46) на  $D$  – боковой поверхности этого цилиндра и имеет ограниченное число волновых фронтов, на которых выполняются условия на скачки (2.36) - (2.37).

**З а м е ч а н и е.** Необходимыми условиями существования дифференцируемого решения начально–краевой задачи являются условия гладкости:  $G \in C(D^- \cup D)$ ,  $u^0(x) \in C^1(S^- \cup S)$ ,  $u^1(x) \in C(S^- \cup S)$  и условия согласования начальных и граничных данных. Если эти условия не выполняются, возникают волновые фронты, характерные для ударных волн. Здесь будем предполагать только регулярность этих функций и только одно из двух условий согласования:

$$u^S(x,0) = u^0(x)$$

## 2.5 Закон сохранения энергии. Единственность решений начально – краевых задач.

Введем следующие функции

$$W(u) = 0,5 a_{ij} u_{,i} u_{,j},$$

$$K(x,t) = 0,5 \rho u_{,t}^2,$$

$$E(x,t) = K(x,t) + W(x,t)$$



– плотности внутренней, кинетической и полной энергии, а также функцию Лагранжа:

$$L(x, t) = K(x, t) - W(x, t).$$

**Т е о р е м а 1.2.** Если  $u(x, t)$  – классическое решение краевой задачи, то

$$\begin{aligned} & \int_{S^-} (E(x, t) - E(x, 0)) dV(x) = \\ & = \int_0^t \int_S u_{,t}^s(x, t) g(x, t) dS(x) dt - \int_{D^-} G(x, t) u_{,t}(x, t) dV(x, t), \\ & dV(x, t) = dS(x) dt \end{aligned}$$

*Доказательство.* Умножая (2.31) на  $u_{,t}$  после некоторых преобразований получим:

$$(a_{ij} u_{,i}(x, t) u_{,t}(x, t))_{,j} - E_{,t}(x, t) = G(x, t) u_{,t}(x, t)$$

Проинтегрируем полученное соотношение по области  $D^-$  с учетом разбиения области интегрирования волновыми фронтами  $F_k$ , где функции дифференцируемы. Заметим, что первые два слагаемые можно рассматривать как дивергенцию соответствующего вектора в пространстве  $R^{N+1}$ , которая в областях между фронтами непрерывна. Поэтому, используя теорему Остроградского – Гаусса в  $R^{N+1}$ , получим

$$\begin{aligned} & \int_{D^-} (a_{ij} u_{,i} u_{,t})_{,j} dV(x, t) - \int_{D^-} E_{,t}(x, t) dV(x, t) - \int_{D^-} G u_{,t} dV(x, t) = \\ & = \int_D (a_{ij} u_{,i} u_{,t}) n_j dS(x, t) - \int_{S^-} (E(x, t) - E(x, 0)) dV(x) + \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$+ \sum_k \int_{F_k} [a_{ij} u_{,i} u_{,t} n_j - \mathbb{E}(x,t) n_t]_{F_k} dF_k(x,t) - \int_{D^-} G u_{,t} dV(x,t) = 0$$

Здесь и далее  $dV(x)$ ,  $dV(x,t) = dV(x)dt$ ;  $dS(x,t) = dS(x)dt$  – дифференциалы площади поверхностей  $S^-$ ,  $D^-$  и  $D$  соответственно.

Учитывая условия на скачки (2.36), (2.37), а также равенства

$$[ab] = a^+[b] + b^-[a], \quad [a^2] = (a^+ + a^-)[a]$$

рассмотрим выражение скачка в (2.47):

$$\begin{aligned} & [a_{ij} u_{,i} u_{,t} n_j - \mathbb{E} n_t] = [a_{ij} u_{,i} u_{,t} n_j] - \\ & - 0,5 [a_{ij} u_{,i} u_{,j} n_t - a_{ij} u_{,i} u_{,t} n_j] - 0,5 n_t [u_{,t} u_{,t}] - 0,5 [a_{ij} u_{,i} u_{,t} n_j] = \\ & = 0,5 \left\{ (u_{,t})^+ [a_{ij} u_{,i} n_j - u_{,t} n_t] + [u_{,t}] (a_{ij} u_{,i} n_j - u_{,t} n_t)^- \right\} - 0,5 [a_{ij} u_{,i} u_{,t} n_j] = \\ & = 0,5 \left\{ (u_{,t})^+ [a_{ij} u_{,i} n_j - u_{,t} n_t] + [u_{,t}] (a_{ij} u_{,i} n_j - u_{,t} n_t)^- \right\} - \\ & - 0,5 \left\{ (a_{ij} u_{,i})^+ [u_{,j} n_t - u_{,t} n_j] + [a_{ij} u_{,i}] (u_{,j} n_t - u_{,t} n_j)^- \right\} = \\ & = 0,5 [u_{,t}] (a_{ij} u_{,i} n_j - u_{,t} n_t)^- - 0,5 [a_{ij} u_{,i}] (u_{,j} n_t - u_{,t} n_j)^- = \\ & = 0,5 [u_{,t} n_j] (a_{ij} u_{,i})^- - 0,5 [u_{,i} n_t] (a_{ij} u_{,j})^- = 0,5 a_{ij} u_{,i} [u_{,t} n_j - u_{,j} n_t] = 0 \end{aligned}$$

Таким образом, выражение (2.47) примет вид

$$\int_{S^-} (\mathbb{E}(x,t) - \mathbb{E}(x,0)) dV(x) = \int_0^t \int_S a_{ij} u_{,i} n_j u_{,t} dS(x) dt - \int_{D^-} G u_{,t} dV(x,t)$$

С учетом обозначений для граничных функций, отсюда получаем формулу теоремы.

**С л е д с т в и е 1.** Если  $u$  – классическое решение (2.31), то на фронтах

$$[\mathbf{E}(x, t)]_{F_i} = c^{-1} [a_{ij} u_{,i}(x, t) u_{,t}(x, t)]_{F_i} n_j(x)$$

**С л е д с т в и е 2.** Если внешние воздействия на систему отсутствуют, т.е.  $G(x, t) = 0$ ,  $g(x, t) = 0$ , то полная энергия  $\mathbf{E}(x, t)$  системы не меняется со временем:

$$\int_{S^-} \mathbf{E}(x, t) dV(x) = \int_{S^-} \mathbf{E}(x, 0) dV(x)$$

**Т е о р е м а 1.3.** Если  $\mathbf{u}(x, t)$  – классическое решение краевой задачи, то

$$\begin{aligned} \int_{D^-} \mathbf{L}(x, t) dV(x, t) &= \int_{D^-} G(x, t) u(x, t) dV(x, t) - \int_0^t \int_S g(x, t) u^S(x, t) dS(x) dt - \\ &- \rho c \int_{S^-} (u(x, t) u_{,t}(x, t) - u^0(x) u^1(x)) dV(x) \end{aligned}$$

*Доказательство.* Умножая (2.31) на  $u$ , после некоторых преобразований получим:

$$\mathbf{L}(x, t) + (a_{ij} u_{,i} u)_{,j} - (\rho u_{,t} u)_{,t} = Gu$$

Проинтегрируем последнее выражение по области  $D^-$  с учетом разбиения ее волновыми фронтами  $F_k$ . Аналогично, как в теореме 1.2, используя теорему Остроградского – Гаусса, имеем

$$\begin{aligned} \int_{D^-} \mathbf{L}(x, t) dV(x, t) &= \int_{D^-} \{ (\rho u_{,t} u)_{,t} - (a_{ij} u_{,i} u)_{,j} \} dV(x, t) + \int_{D^-} Gu dV(x, t) = \\ &= \int_{S^-} \rho (u_{,t} u - u^0(x) u^1(x)) n_i dV(x) - \int_D a_{ij} u_{,i} u n_j dS(x, t) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_k \int_{F_k} [\rho u_{,t} u n_t - a_{ij} u_{,i} u n_j] dF_k(x,t) + \int_{D^-} G u dV(x,t) = \\
& = -\rho c \int_{F_k} (u u_{,t} - u^0(x) u^1(x)) dV(x) - \int_D g(x,t) u^S(x,t) dS(x,t) + \int_{D^-} G u dV(x,t)
\end{aligned}$$

Таким образом, учитывая условия (2.43), граничные условия (2.45), (2.46), получим формулу теоремы.

**Т е о р е м а 1.4.** Если классическое решение краевой задачи существует, то оно единственно.

*Доказательство.* В силу линейности задачи достаточно доказать единственность решения однородной краевой задачи. Если существуют два решения  $u_1, u_2$ , то разность этих решений  $u = u_2 - u_1$  удовлетворяет уравнению с однородной правой частью, т.е.  $G = 0$ , нулевым начальным условиям  $u^m(x) = 0$  ( $m = 0, 1$ ) и однородным соответствующим граничным условиям  $u(x,t) = 0$  либо  $g(x,t) = 0$  для  $x \in S$ . Из теоремы 1.2 нетрудно получить:

$$\int_{S^-} E(x,t) dV(x) = 0$$

В силу положительности подынтегрального выражения следует, что  $u \equiv 0$ . Теорема доказана.

## 2.6 Фундаментальные решения гиперболического уравнения второго порядка

Фундаментальные решения уравнения (2.31) – решения, когда правая часть  $G(x,t)$  уравнения задается сингулярными обобщенными функциями. Физически они описывают движение среды при действии сосредоточенных источников различного вида. Среди фундаментальных решений особое место за-

нимает функция Грина, которая определяется  $\delta$  – функцией Дирака, т.е. решение уравнения (2.31) при  $G(x,t)=\delta(x,t)=\delta(x)\delta(t)$ :

$$a_{ij}u_{,ij}(x,t) - \rho u_{,tt}(x,t) = \delta(x)\delta(t), \quad (x,t) \in R^{N+1} \quad (2.48)$$

удовлетворяющее условиям излучения

$$U(x,t) = 0 \text{ при } t < 0 \text{ и } \|x\| > ct, \quad c = \max_{\theta} c(\theta)$$

Матрица коэффициентов  $A = \{a_{ij}\}_{N \times N}$  – симметрическая, квадратичная форма которой положительно определена, т.е.

$$A(x,x) = x^T A x = a_{ij}x_i x_j > 0 \text{ для } \forall \|x\| \neq 0 \quad (2.49)$$

(значок “ $T$ ” означает транспонирование). Определяя собственные значения матрицы  $A$  и собственные вектора, приведем матрицу к диагональному виду при помощи линейного преобразования

$$x' = \alpha x, \quad \det \alpha \neq 0$$

т.е.

$$x'_j = x_k (e_k, \tilde{e}_j) = \alpha_{jk} x_k,$$

где  $\alpha$  – матрица преобразования,  $\{\tilde{e}_j\}$  – новый базис, ортогональный к первоначальному базису  $\{e_k\}$ . Соответственно можно выразить первоначальные переменные  $x$  через введенные  $x'$ :

$$x_k = \beta_{kj} x'_j, \quad \alpha_{jk} \beta_{ki} = \delta_{ji},$$

$$\beta = \alpha^T, \quad \det \beta = \det \alpha = 1$$

Подставляя выражение для  $x$  через новые переменные  $x'$  в (2.48), получим выражение матрицы  $B$  преобразованной формы через матрицу  $A$  первоначальной формы и матрицу преобразования  $\beta$ :

$$B = \beta^T A \beta$$

поскольку  $A(x, x) = x' \beta^T A \beta x' = B(x', x') = \sum b_k^2 x_k'^2$ . Выразив производные по переменным  $x$  через производные по новым переменным  $x'$ :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \alpha_{kj} \frac{\partial}{\partial x_k'}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \alpha_{kj} \alpha_{mi} \frac{\partial^2}{\partial x_k' \partial x_m'}$$

получим

$$a_{ij} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} = a_{ij} \alpha_{kj} \alpha_{mi} \frac{\partial^2 u(x', t)}{\partial x_k' \partial x_m'}$$

Матрица коэффициентов  $A$  вещественно – симметрическая, поэтому она ортогонально – подобна некоторой вещественной диагональной матрице, т.е. новые коэффициенты выражаются через старые следующим образом:  $b_{km} = a_{ij} \alpha_{kj} \alpha_{mi}$ , причем  $b_{km}$  – компоненты диагональной матрицы  $B$ :

$$B = \begin{pmatrix} b_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2^2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & b_N^2 \end{pmatrix}, \quad B = \alpha A^T \alpha^T$$

где  $b_1^2, b_2^2, \dots, b_N^2$  – характеристические числа квадратичной формы  $A$ . В новой системе координат  $x'$  рассматриваемое уравнение (2.48) переписется в виде

$$\sum_{i=1}^N b_i^2 \frac{\partial^2 U(x', t)}{\partial x_i'^2} - \rho \frac{\partial^2 U(x', t)}{\partial t^2} = \frac{\delta(t)}{\det \beta} \delta(x') = \delta(t) \delta(x')$$

Введение следующей замены переменных  $x'' = \frac{x'}{|b_i|}$  приводит последнее уравнение к виду:

ние к виду:

$$\Delta_N U(x'', t) - \rho \frac{\partial^2 U(x'', t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\prod_{i=1}^N |b_i|} \delta(x'') \delta(t) \quad (2.50)$$

$\Delta$ – оператор Лапласа. Решение волнового уравнения (2.50) есть

$$U(x'', t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^N |b_i|} E(x'', t)$$

где  $E(x'', t)$  – фундаментальное решение классического волнового уравнения:

$$\square_c E(x'', t) = \delta(x'', t) \quad (2.51)$$

$\square_c = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta$  – волновой оператор, т.е., фундаментальное решение уравнения

(2.48) есть

$$U(x'', t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^N |b_i|} E(B^{-1} Ax, t) \quad (2.52)$$

здесь переменные  $x''$  есть

$$x'' = B^{-1} x' = B^{-1} Ax \quad (2.53)$$

Таким образом, фундаментальное решение волнового уравнения (2.50) позволяет при соответствующей замене переменных (2.53) найти фундаментальное решение гиперболического уравнения (2.48). Для многомерного волнового уравнения (2.51) фундаментальные решения имеют вид [43]:

$$E(x, t) = \frac{H(t)}{2\pi c} \left( \frac{d}{\pi c^2 dt^2} \right)^{\frac{N-3}{2}} \delta(c^2 t^2 - \|x\|^2), \quad N \geq 3 - \text{нечетное}$$

$$E(x,t) = \frac{1}{2\pi c} \left( \frac{1}{\pi c^2} \frac{d}{dt^2} \right)^{\frac{N-2}{2}} \frac{H(ct - \|x\|)}{\sqrt{c^2 t^2 - \|x\|^2}}, \quad N \geq 2 - \text{четное}$$

здесь  $\|x\| = \sqrt{x_i x_i}$  ( $i = \overline{1, N}$ ),  $H(\cdot)$  – функция Хевисайда:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x > 0, \\ 0 & \text{для } x \leq 0 \end{cases}$$

В одномерном случае ( $N = 1$ ) гиперболическое уравнение (2.48) - уравнение Даламбера:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) U(x,t) = G(x,t), \quad c = \sqrt{\frac{a_{11}}{\rho}}$$

Его фундаментальное решение которого имеет вид [44]

$$U(x,t) = \frac{1}{2c} H(ct - |x|)$$

Фронт точки:  $x^* = ct$ ,  $x^* = -ct$ , которые движутся.

В двумерном случае ( $N = 2$ ) имеем следующее уравнение

$$\left( \partial_i^2 - c^2 \Delta_2 \right) U(x'',t) = \frac{1}{b_1 b_2} \delta(x'') \delta(t)$$

его фундаментальное решение определяется по формуле

$$U(x'',t) = \frac{1}{b_1 b_2} \frac{H(ct - r)}{2\pi \sqrt{c^2 t^2 - r^2}} \quad (2.54)$$

где  $r = \sqrt{(x_1'')^2 + (x_2'')^2}$ . Отсюда следует, что возмущение от точечного источника будет сосредоточено на замкнутом круге радиуса  $ct$  с центром в точке  $x'' = 0$ . Фундаментальное решение уравнения (2.48) удовлетворяет условиям

$$U(x,0) = 0, \quad U_{,i}(x,0) = 0, \quad x \neq 0$$



Решение уравнения (2.48) с произвольной правой частью находится путем выполнения свертки фундаментальных решений с соответствующей функцией  $G(x, t)$ :

$$u(x, t) = U(x, t) * G(x, t) \quad (2.55)$$

Используя эту формулу, можно построить обобщенное решение начально-краевой задачи.

## 2.7 Динамические аналоги формул Грина, Гаусса в пространстве обобщенных функций и их интегральные представления

Введем определенную на всем пространстве  $R^{N+1}$  регулярную обобщенную функцию

$$\hat{u}(x, t) = u(x, t)H_D^-(x, t) \quad (2.56)$$

аналогично  $\hat{G}(x, t) = G(x)H_D^-(x, t)$ . В выражении (2.56)  $u(x, t)$  – классическое решение краевой задачи,  $H_D^-(x, t) = H_S^-(x)H(t)$  – характеристическая функция пространственно – временного цилиндра  $D^-(x, t)$ ,  $H_S^-(x)$  – характеристическая функция области  $S^-$  [84]:

$$H_S^-(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu(S^- \cap O_\varepsilon(x))}{\mu(O_\varepsilon(x))} \quad (2.57)$$

где  $\mu(\cdot)$  – мера (площадь, объем) соответствующего множества,  $O_\varepsilon(x)$  –  $\varepsilon$  – окрестность точки  $x$ :  $O_\varepsilon(x) = \{y : \|y - x\| < \varepsilon\}$ . Если граница области  $S$  – гладкая с непрерывной нормалью, то для  $x \in S$

$$H_S^-(x) = 1/2.$$

$H(t)$  – функция Хевисайда, доопределим ее в нуле:  $H(0) = 1/2$ .

Введем первообразную функции Грина  $U(x, t)$  по времени:

$$V(x, t) = U(x, t) * \delta(x) H(t) = U(x, t) *_{t} H(t), \quad (2.58)$$

$$\partial_t V(x, t) = U(x, t)$$

Здесь символ " $*_{t}$ " означает неполную свертку функций по  $t$ , которая для регулярной функции имеет вид

$$f(x, t) *_{t} g(x, t) = H(t) \int_0^t f(x, t - \tau) g(x, \tau) d\tau$$

Первообразная функции Грина  $V(x, t)$  является решением уравнения (2.31) при  $G(x, t) = \delta(x) H(t)$ .

**Т е о р е м а 1.5.** Если  $u(x, t)$  – классическое решение краевой задачи существует и единственно, то обобщенное решение  $\hat{u}(x, t)$  представимо в виде свертки:

$$\hat{u}(x, t) = U * G + U *_{x} u^1(x) H_S^-(x) + \left( U *_{x} u^0(x) H_S^-(x) \right)_{,t} - \quad (2.59)$$

$$- U * g(x, t) \delta_S(x) H(t) - a_{ij} V_{,j} *_{x} u_{,t} n_i \delta_S(x) H(t) - a_{ij} V_{,j} *_{x} u^0(x) n_i \delta_S(x)$$

здесь  $\delta_S(x)$  – сингулярная обобщенная функция – простой слой на поверхности  $S$ , соответственно  $g(x, t) \delta_S(x) H(t)$  – простой слой на боковой поверхности цилиндра  $D = S \times [0, \infty)$ .

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Действуя оператором  $L$  на  $\hat{u}(x, t)$  и используя правила дифференцирования обобщенных функций (2.8):

$$\partial_j H_D^-(x, t) = -n_j(x) \delta_S(x) H(t), \quad (2.60)$$

$$\partial_t H_D^-(x, t) = \delta(t) H_S^-(x)$$

получим

$$L(\partial_x, \partial_t)\hat{u}(x, t) = a_{ij}\hat{u}_{,ij} - \rho\hat{u}_{,tt} = a_{ij}u_{,ij} H_S^-(x)H(t) - a_{ij}u_{,i} n_j(x)\delta_S(x)H(t) - \\ - (a_{ij}un_i\delta_S(x))_{,j} H(t) - \rho u_{,tt} H_S^-(x)H(t) + \rho\{u\delta(t)_{,t} + u(x)\delta(t)\}H_S^-(x)$$

Используем условия на фронтах (2.36) – (2.37):

$$L(\partial_x, \partial_t)\hat{u}(x, t) = \hat{G}(x, t) + \rho u(x, t)H_S^-\dot{\delta}(t) + \rho u(x, t)H_S^-\delta(t) - \\ - g(x, t)\delta_S(x)H(t) - (a_{ij}un_i\delta_S(x))_{,j} H(t) \quad (2.61)$$

Свойство фундаментального решения  $U(x, t)$  [44, с.194] позволяет построить обобщенное решение (2.31) в виде свертки:

$$\hat{w}(x, t) = U * G + U * \rho u^1(x)H_S^-(x) + \rho \left( U * u^0(x)H_S^-(x) \right)_{,t} - \\ - U(x, t) * g(x, t)\delta_S(x)H(t) - U(x, t) * (a_{ij}un_i\delta_S(x))_{,j} H(t) \quad (2.62)$$

где "\*" обозначает полную свертку по  $(x, t)$ :

$$f(x, t) * g(x, t) = H(t) \int_0^t d\tau \int_{R^N} f(x - y, \tau) g(y, t - \tau) dV(y)$$

переменная  $x$  под звездочкой соответствует свертке только по  $x$ . Последнюю свертку в (2.62) можно преобразовать, пользуясь обозначением (2.58) и правилами дифференцирования сверток и обобщенных функций

$$U(x, t) * (a_{ij}un_i\delta_S(x)H(t))_{,j} = \partial_t V(x, t) * (a_{ij}un_i\delta_S(x)H(t))_{,j} = \\ = \partial_j V(x, t) * (a_{ij}un_i\delta_S(x)H(t))_{,t} = \\ = a_{ij}\partial_j V(x, t) * (u_{,t} n_i\delta_S(x)H(t) + un_i\delta_S(x)\delta(t)) =$$

$$= a_{ij} \partial_j V(x, t) * u_{,t} n_i \delta_S(x) H(t) + a_{ij} \partial_j V(x, t) * u^0(x) n_i \delta_S(x)$$

В результате получаем формулу теоремы. Поскольку для  $\forall \varphi \in D(R^{N+1})$

$$(\hat{\omega}, \varphi) = (U * \hat{G}, \varphi) = (U * L\hat{u}, \varphi) = (LU * \hat{u}, \varphi) = (\delta(x, t) * \hat{u}, \varphi) = (\hat{u}, \varphi)$$

отсюда следует, что  $\hat{\omega} = \hat{u}$  и утверждение теоремы.

В силу леммы дю Буа – Реймона  $\hat{u}(x, t)$  является и классическим решением (2.31) в области определения.

В (2.59) плотности простых и двойных слоев определяются заданными начальными условиями (2.44) и граничными условиями (2.45), (2.46), часть из которых, в зависимости от решаемой краевой задачи, известна. Таким образом, полученная формула по известным начальным и граничным значениям восстанавливает решение в области, поэтому ее можно назвать *аналогом формулы Грина* для решений уравнений (2.31). Она является обобщенным решением поставленных задач и может использоваться при  $\forall \hat{G}$  в том числе и сингулярных, что характерно для физических задач.

**С л е д с т в и е** (динамический аналог формулы Грина). При однородных начальных условиях ( $u^m(x) = 0, m = 0, 1$ ) решение определяется граничными значениями скорости  $u_{,t}$  и нормальных производных  $\partial u / \partial n$ :

$$\hat{u}(x, t) = U * G - U * g(x, t) \delta_S(x) H(t) - a_{ij} V_{,j} * u_{,t} n_i \delta_S(x) H(t) \quad (2.63)$$

Введем функцию напряжений  $T$ , аналог тензора напряжений и ее первообразную по времени  $W$ :

$$T(x, t, n) = a_{ij} U_{,i} n_j(x) \quad (2.64)$$

$$W(x, n, t) = T(x, n, t) * H(t) = a_{ij} \frac{\partial V(x, t)}{\partial x_i} n_j \quad (2.65)$$

удовлетворяющих в силу свойств симметрии оператора (2.32) и  $\delta$  – функции следующим соотношениям симметрии:

$$T(x - y, n, t) = -T(y - x, n, t) = -T(x - y, -n, t)$$

$$W(x - y, n, t) = -W(y - x, n, t) = -W(x - y, -n, t)$$

**Т е о р е м а 1.6.** При фиксированном  $n$  функция  $T(x, n, t)$  является фундаментальным решением уравнения (2.31), соответствующим сосредоточенной силе мультипольного типа

$$G(x, t) = a_{ij} n_j \delta_{,i}(x) \delta(t).$$

*Доказательство.* Применим дифференциальный оператор  $L$  к функции  $T(x, n, t)$ , используя приведенные выше ее свойства:

$$\begin{aligned} L(\partial_x, \partial_t)T(x, n, t) &= n_j(x) L(\partial_x, \partial_t) a_{ij} U_{,i}(x, t) = \\ &= n_j(x) a_{ij} L(\partial_x, \partial_t) U_{,i}(x, t) = n_j(x) a_{ij} \delta_{,i}(x) \delta(t) \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Л е м м а 1** (динамический аналог формулы Гаусса). В  $D'(R^{N+1})$ :

$$-a_{ij} V_{,i} n_j * \delta_S(x) - \rho U_{,t} * H_S^-(x) = H_D^-(x, t) \quad (2.66)$$

*Доказательство.* Свернем обе части уравнения (2.31) для  $U(x, t)$  с характеристической функцией  $H_S^-(x)H(t)$ , используя свойства дифференцирования свертки и соотношения (2.58), (2.60):

$$\begin{aligned} (a_{ij} U_{,ij} - \rho U_{,tt}) * H_S^-(x)H(t) &= a_{ij} U_{,i} * (H_S^-(x)H(t))_{,j} - \rho U * (H_S^-(x)H(t))_{,tt} = \\ &= a_{ij} V_{,it} * (H_S^-(x)H(t))_{,j} - (\rho U * H_S^-(x) \delta(t))_{,tt} = a_{ij} V_{,i} * (-n_j \delta_S(x)) \delta(t) - \end{aligned}$$

$$-\rho U_{,t} * H_S^-(x) \delta(t) = -a_{ij} V_{,i} n_j * \delta_S(x) - \rho U_{,t} * H_S^-(x) = H_D^-(x, t)$$

Формула леммы получена для  $x \notin S$ .

Выражение (2.66) является динамическим аналогом известной формулы Гаусса для потенциала двойного слоя уравнения Лапласа [44, с.398]. С использованием фундаментальных решений формула (2.66) дает интегральное представление характеристической функции. Формулу Гаусса можно использовать для построения ГИУ краевых задач для рассматриваемого уравнения (2.31).

Полученные динамические аналоги формулы Грина и Гаусса используем для построения граничных интегральных уравнений при решении краевых задач.

При однородных начальных условиях формулу (2.59) формально можно записать в следующем интегральном виде (для  $N = 2$ )

$$\begin{aligned} \hat{u}(x, t) = & \int_{D^-} U(x - y, t) \hat{G}(y, t) dV(y, t) - \\ & - \int_0^t d\tau \int_S U(y - x, \tau) g(y, \tau) dS(y, \tau) - \int_0^t d\tau \int_S T(y - x, n(y), t - \tau) u(y, \tau) dS(y) + \\ & + \int_{S^-} (U_{,t}(x - y, t) u^0(y) + U(x - y, t) u^1(y)) dV(y) \end{aligned} \quad (2.67)$$

Особенности фундаментальных решений не позволяют использовать последнюю формулу для построения решений краевых задач, в силу сингулярности  $U$  и  $T$  на волновых фронтах интегралы справа не существуют. Однако введенные выше первообразные матрицы позволяют строить интегральные представления формулы (2.59), вид которых зависит от размерности задачи.

### 2.7.1 Плоская задача

Так, в случае  $N=2$  имеем плоскую задачу. Обозначим  $dS(y)$  – дифференциал длины дуги кривой  $S$  в точке  $y$ ,  $S_t^+(x) = \{y \in S, r < ct\}$ ,  $S_t^-(x) = \{y \in S^-, r < ct\}$ ,  $r = \|y - x\|$ ,  $dV(y) = dy_1 dy_2$ .

**Т е о р е м а 1.7.** При  $N=2$  функция  $\hat{u}(x, t)$ , удовлетворяющая однородным начальным условиям ( $u^m = 0$ ,  $m = 0, 1$ ), имеет следующее интегральное представление:

$$\begin{aligned}
 2\pi\hat{u}(x, t) = & \frac{c}{b_1 b_2} \int_0^t d\tau \int_{S_t^-(x)} \frac{G(y, t - \tau)}{\sqrt{c^2 \tau^2 - r^2}} dV(y) - \\
 & - \frac{1}{b_1 b_2} \int_{S_t^+(x)} dS(y) \int_{r/c}^t \frac{u(y, t - \tau),_j n_j(y)}{\sqrt{c^2 \tau^2 - r^2}} d\tau - \\
 & - \frac{a_{ij}}{b_1 b_2} \int_{S_t^+(x)} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n(y)} dS(y) \int_{r/c}^t \frac{\tau u(y, t - \tau),_{,i}}{\sqrt{c^2 \tau^2 - r^2}} d\tau
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

Для  $x \in S$  второй интеграл справа сингулярный, берется в смысле главного значения.

*Доказательство.* Первообразные функции Грина (2.54) и функции напряжения определим по формулам (2.58) и (2.64):

$$\begin{aligned}
 V(x'', t) = & -\frac{1}{2\pi b_1 b_2} H(ct - r) \ln \left( \frac{ct - \sqrt{c^2 t^2 - r^2}}{r} \right), \\
 W(x'', n, t) = & -\frac{1}{2\pi b_1 b_2} \frac{t H(ct - r)}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} \frac{x_k'' n_k}{r^2}
 \end{aligned}$$

Подставим в выражение (2.58) представления для функций  $V, W$ . Если записать свертки в интегральном виде с учетом этих представлений, то получим соотношения теоремы. Для  $x \notin S$  интегралы справа являются регулярными.

Справедливость формулы (2.68) и для граничных точек  $x \in S$  доказывается аналогично доказательству для волнового уравнения [16].

**Т е о р е м а 1.8.** Решение краевой задачи при неоднородных начальных условиях представимо в следующем интегральном виде:

$$\begin{aligned}
 2\pi\hat{u}(x,t) = & \frac{1}{b_1b_2} \left( \int_0^t d\tau \int_{S_t^-(x)} \frac{G(y,t-\tau)}{\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}} dV(y) + \int_{S_t^-} \frac{u^1(y)}{\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}} dV(y) \right) + \\
 & + \frac{1}{b_1b_2} \left( \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_t^-} \frac{u^0(y)}{\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}} dV(y) - \int_{S_t(x)} dS(y) \int_{r\sqrt{\rho}}^t \frac{u(y,t-\tau)_{,j} n_j(y)}{\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}} d\tau \right) - \\
 & - \frac{a_{ij}}{b_1b_2} \int_{S_t(x)} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n(y)} dS(y) \int_{r\sqrt{\rho}}^t \frac{\tau u(y,t-\tau)_{,t}}{\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}} d\tau \quad (2.69)
 \end{aligned}$$

*Доказательство.* Если записать свертки в (2.59) с начальными данными  $u^0(x), u^1(x)$  в интегральном виде и воспользоваться теоремой 1.6, получим соотношения (2.68).

## 2.8 Краткие выводы

Глава посвящена построению обобщенных решений нестационарных краевых задач динамики анизотропных упругих сред при антиплоской деформации, уравнение движения которых описываются строго гиперболическим уравнением 2-го порядка. С использованием методов теории обобщенных функций даны условия на волновых фронтах, получен закон сохранения энергии с учетом ударных волн, доказана единственность решений. Для рассматриваемых уравнений построены их фундаментальные решения. Построены динамические аналоги формул Грина и Гаусса в пространстве обобщенных функций, получены их интегральные представления.



### ГЛАВА 3

## ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ УПРУГИХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

В данной главе на основе обобщенного преобразования Фурье разработан метод построения фундаментальных решений уравнений динамики анизотропных сред, описывающие их динамику при действии импульсных сосредоточенных источников. Построены тензора Грина для уравнений движения анизотропных сред (при плоской и пространственной деформации), тензора фундаментальных напряжений, и их первообразные по времени, исследованы их асимптотические свойства. Построены трансформанты тензора Грина первой и второй краевой задачи динамики для анизотропной полуплоскости.

На основе численных экспериментов изучено влияние степени анизотропии породного массива на характер его напряженно-деформированного состояния при действии сосредоточенных импульсных источников.

### 3.1 Обобщенные решения

Уравнения движения анизотропной упругой среды с учетом закона Гука (2.28) описываются системой гиперболических уравнений вида:

$$L_{ij}(\partial_x, \partial_t)u_j(x, t) + G_i(x, t) = 0, \quad (x, t) \in R^{N+1} \quad (3.1)$$

$$L_{ij}(\partial_x, \partial_t) = C_{ij}^{ml} \partial_m \partial_l - \rho \delta_{ij} \partial_t^2, \quad i, j, m, l = \overline{1, N}, \quad N > 1 \quad (3.2)$$

где  $\delta_{ij} = \delta_i^j$  – символ Кронекера,  $\partial_x = (\partial_1, \dots, \partial_N)$ ,  $\partial_t = \partial / \partial t$ , массовая сила  $G$  – локально-интегрируемая вектор – функция,  $C_{ij}^{ml}$  – упругие константы среды, обладающие указанными выше свойствами симметрии по отношению к перестановке индексов (2.20) и отвечающие следующему условию строгой гиперболичности:

$$W(n, v) = C_{ij}^{ml} n_m n_l v^i v^j > 0 \quad \forall n \neq 0, \quad v \neq 0 \quad (3.3)$$

здесь  $n = (n_1, \dots, n_N)$ ,  $v = (v_1, \dots, v_N)$ . В силу положительной определенности  $W$  характеристическое уравнение системы (2.1)

$$\det\{C_{ij}^{ml} n_m n_l - \rho c^2 \delta_{ij}\} = 0, \quad (3.4)$$

имеет  $2N$  (с учетом кратности) действительных корней:

$$c = \pm c_k(n), \quad 0 < c_k \leq c_{k+1}, \quad k = \overline{1, N-1}$$

Они имеют смысл фазовых скоростей при гармоническом анализе системы (2.1) и в общем случае зависят от направления распространения волны.

Пусть перемещения  $u(x, t)$  – решение системы уравнений (2.1) в пространстве  $R^{N+1}(x, t)$ , непрерывные, дважды дифференцируемые функции почти всюду, за исключением характеристической поверхности  $F$  в  $R^{N+1}$ , которым соответствуют подвижные волновые фронты  $F_t$  в  $R^N$ , на которых производные могут иметь скачки. Уравнение для такой поверхности  $F$  имеет вид:

$$\det\{C_{ij}^{ml} v_m v_l - \rho v_t^2 \delta_{ij}\} = 0$$

где  $(v, v_t) = (v_1, \dots, v_N, v_t)$  – единичный вектор нормали к характеристической поверхности  $F$  в пространстве  $R^{N+1}(x, t)$ . Предполагается, что поверхность  $F$  кусочно–гладкая с непрерывной нормалью на ее гладкой части.

В силу сплошности рассматриваемых сред, на поверхностях  $F_t$  выполняются условия непрерывности перемещений при переходе через волновой фронт:

$$[u_i(x, t)]_{F_t} = 0, \quad i = \overline{1, N} \quad (3.5)$$

Следствием (3.5) являются условия непрерывности касательных производных перемещений на фронте волны:

$$[u_{i,t} n_l + cu_{i,l}]_{F_t} = 0, \quad i, l = \overline{1, N} \quad (3.6)$$

где  $c$  – скорость движения волнового фронта,  $n(x, t) = (n_1, \dots, n_N)$  – единичный вектор нормали к поверхности  $F_t$ , направленного в сторону распространения волнового фронта.

Применение закона импульса сил и изменения количества движения приводит к выполнению динамических условий совместности для поля перемещений на волновых фронтах [136]:

$$[\sigma_i^l n_l + \rho cu_{i,t}]_{F_t} = 0, \quad i, l = \overline{1, N} \quad (3.7)$$

Условие (3.7) связывает скачок скоростей на фронте волны со скачком напряжений. Поэтому такую поверхность называют фронтом ударной волны. Предполагается, что число волновых фронтов конечно, и каждый фронт почти всюду является поверхностью Ляпунова размерности  $N - 1$ .

Обозначим через  $D'(R^{N+1})$  пространство обобщенных вектор – функций  $\hat{f}(x, t) = (\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_N)$ , определенных на пространстве  $D(R^{N+1})$  финитных бесконечно дифференцируемых вектор – функций  $\varphi(x, t) = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ .

**О п р е д е л е н и е.** Функция  $\hat{u}(x, t) \in D'(R^{N+1})$  называется *обобщенным решением* системы уравнений (2.1), если справедливо равенство

$$(L\hat{u}, \varphi) \equiv (\hat{u}, L\varphi) = (G, \varphi) \quad \forall \varphi \in D(R^{N+1})$$

Решение  $u(x, t)$ , рассматриваемое как регулярная обобщенная функция, обозначим через  $\hat{u}(x, t) = u(x, t)$ . Аналогично  $\hat{G}(x, t) = G(x, t)$ .

**Т е о р е м а 2.1** Если функция  $u(x, t)$  – классическое решение уравнений (2.1), то  $\hat{u}(x, t)$  – обобщенное решение системы (2.1).

*Доказательство.* Подействуем дифференциальным оператором  $L_{ij}$  на функцию  $\hat{u}_j(x, t)$ . С учетом формул дифференцирования обобщенных функций (2.16) – (2.17), а также закона Гука (2.28), получим

$$\begin{aligned}
 L_{ij}(\partial_x, \partial_t)\hat{u}_j(x, t) &= C_{ij}^{ml} u_{j, ml} - \rho u_{i, tt} + C_{ij}^{ml} \left( [u_j]_F v_l \delta_F(x, t) \right)_{,m} - \\
 &- \rho [u_{i, t}]_F v_t \delta_F(x, t) + C_{ij}^{ml} [u_{j, l}]_F v_m \delta_F(x, t) - \rho (v_t [u_i]_F \delta_F(x, t))_{,t} = \\
 &= L_{ij} u_j + \left[ \sigma_i^m v_m - \rho v_t u_{i, t} \right]_F \delta_F(x, t) + \\
 &+ C_{ij}^{ml} \left( [u_j]_F v_l \delta_F(x, t) \right)_{,m} - \rho ([u_i]_F v_t \delta_F(x, t))_{,t}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

В силу непрерывности перемещений  $u(x, t)$  вне фронта волны имеем

$$\begin{aligned}
 [u(x, t)]_F &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (u(x + \varepsilon v, t + \varepsilon v_t) - u(x - \varepsilon v, t - \varepsilon v_t)) = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (u(x + \varepsilon n, t) - u(x - \varepsilon n, t)) = [u(x, t)]_{F_t}
 \end{aligned}$$

Тогда естественное требование непрерывности решений при переходе через волновой фронт  $F_t$  (3.5) приводит к условию

$$[u_i(x, t)]_F = 0 \tag{3.14}$$

Если  $F_t(x, t) = 0$  – уравнение волнового фронта, тогда

$$n_j = \frac{v_j}{\|v\|} = \frac{\text{grad } F_t}{\|\text{grad } F_t\|}, \quad \|v\| = \sqrt{v_j v_j}, \quad j = \overline{1, N} \tag{3.15}$$

при условии, что  $\text{grad } F_t$  существует. Если  $(x, t) \in F_t$ , то  $(x + cn\Delta t, t + \Delta t) \in F_{t+\Delta t}$ . Следовательно,

$$F(x + cn\Delta t, t + \Delta t) - F(x, t) = (c(F_{,j} n_j) + F_{,t}) \Delta t = 0$$

откуда

$$c = - \frac{F_{,t}}{(F_{,j}, n_j)} = - \frac{v_t}{\|v\|} \quad (3.16)$$

В силу соотношений (3.15), (3.16) выражение (3.13) на фронте волне переписывается в виде

$$\begin{aligned} L_{ij}(\partial_x, \partial_t) \hat{u}_j(x, t) &= L_{ij} u_j + \left[ \sigma_i^m n_m - \rho c u_{i,t} \right]_{F_t} \|v\| \delta_F(x, t) + \\ &+ C_{ij}^{ml} \left( [u_j]_{F_t} n_l \|v\| \delta_F(x, t) \right)_{,m} - \rho c \left( [u_i]_{F_t} \|v\| \delta_F(x, t) \right)_{,t} \end{aligned} \quad (3.17)$$

скорость  $c$  для каждого фронта совпадает с одной из скоростей распространения волны  $c_k$ . Ввиду условий (3.7) второе слагаемое в правой части (3.17) равно нулю. Действие двух последних слагаемых на пространстве  $D(R^{N+1})$  определяется следующим функционалом

$$\begin{aligned} &\left( \left( C_{ij}^{ml} [u_j]_{F_t} n_l \|v\| \delta_F(x, t) \right)_{,m} - \rho c \delta_{ij} \left( [u_j]_{F_t} \|v\| \delta_F(x, t) \right)_{,t} \right) \varphi_j(x, t) = \\ &= - \int_F \|v\| [u_j]_{F_t} \left( C_{ij}^{ml} \varphi_{j,m}(x, t) n_l + \rho c \varphi_{i,t}(x, t) \right) dF(x, \tau) = 0 \end{aligned}$$

Последнее равно нулю в силу условий (3.5). Таким образом,

$$L_{ij}(\partial_x, \partial_t) \hat{u}_j(x, t) = G(x, t)$$

т.е функция  $\hat{u}(x, t)$  удовлетворяет уравнениям (2.1) в обобщенном смысле.

## 3.2 Фундаментальные решения уравнений динамики упругих анизотропных сред

### 3.2.1 Фундаментальные решения гиперболических систем уравнений в многомерном случае

При построении функции Грина обычно используется аппарат интегральных преобразований (Фурье – Лапласа), позволяющий перейти от дифференциальных уравнений к линейным алгебраическим уравнениям для ее изображения. Разрешая последние, определяют трансформанту искомой функции в виде дробно – рациональной функции от переменных интегральных преобразований, затем восстанавливают оригинал. Использовать обратное интегральное преобразование Фурье часто бывает невозможно. Это приводит к привлечению аппарата обобщенного интегрального преобразования Фурье.

Фундаментальное решение дифференциальных уравнений определяется с точностью до решения однородного уравнения. Поэтому полученная трансформанта Фурье определяет целый класс фундаментальных решений. Математически это проявляется в наличии неинтегрируемых особенностей при действительных значениях переменных Фурье. Поэтому следует строить определенные регуляризации трансформант с учетом условий излучения.

Рассмотрим систему уравнений (2.1) в пространстве обобщенных функций  $D'(R^{N+1})$ .

*Определение.* Назовем матрицей Грина  $U_{jk}(x, t)$  системы (2.1) ее решение из  $D'(R^{N+1})$  при  $\hat{G}(x, t) = \delta_{ik} \delta(x, t)$ :

$$C_{ij}^{ml} U_{j, ml}^k(x, t) + \delta_{ik} \delta(x, t) = 0, \quad i, j, k = \overline{1, N} \quad (3.18)$$

удовлетворяющее условиям

$$U_{jk}(x, t) = 0 \quad \text{при } t < 0 \quad (3.19)$$

$$U_{jk}(x, 0) = 0 \quad \text{при } x \neq 0 \quad (3.20)$$

$$U_{jk}(x,t) = 0 \quad \text{при } |x| > c_{\max} t$$

**Т е о р е м а 2.2** Если  $c_q$  ( $q = \overline{1, N}$ ) – простые корни уравнения (3.4), то

$$U_{jk}(x,t) = \frac{(N-2)!}{(2\pi i)^N} H(t) \sum_{q=1}^M \int_{\|e\|=1} A_{jk}(e, c_q) \times \\ \times \left\{ \frac{1}{((e, x) + c_q(e)t - i0)^{N-1}} - \frac{1}{((e, x) - c_q(e)t - i0)^{N-1}} \right\} dS(e)$$

где  $A_{jk}(e, c_q) = \frac{Q_{jk}(e, c_q)}{2c_q Q_{mm}(e, c_q)}$ ,  $H(t)$  – функция Хевисайда.

*Доказательство.* Преобразование Фурье приводит систему (3.18) к системе линейных алгебраических уравнений вида

$$L_{jk}(i\xi, i\omega) \bar{U}_{kl}(\xi, \omega) + \delta_{jl} = 0, \quad j, k, l = \overline{1, N}$$

здесь  $(\xi, \omega) = (\xi_1, \dots, \xi_N, \omega)$  – переменные Фурье, соответствующие  $(x, t)$ . Разрешая полученную систему, получим трансформанту матрицы Грина, которая, в силу однородности дифференциальных полиномов, имеет вид

$$\bar{U}_{jk}(i\xi, i\omega) = - \frac{Q_{jk}(i\xi, i\omega)}{Q(i\xi, i\omega)} = \frac{Q_{jk}(\xi, \omega)}{Q(\xi, \omega)} \quad (3.21)$$

где  $Q_{jk}$  – алгебраические дополнения элемента с индексом  $(k, j)$  матрицы  $\{L(i\xi, i\omega)\}$ ,  $Q$  – символ оператора  $L$ :

$$Q(i\xi, i\omega) = \det \{L_{kj}((i\xi, i\omega))\} = (-1)^N \det \{L_{kj}(\xi, \omega)\}$$

Справедливы следующие соотношения симметрии и однородности:

$$Q_{jk}(\xi, \omega) = Q_{jk}(-\xi, \omega) = Q_{jk}(\xi, -\omega), \quad Q(\xi, \omega) = Q(-\xi, \omega) = Q(\xi, -\omega)$$

$$Q_{jk}(\kappa\xi, \kappa\omega) = \kappa^{2N-2} Q_{jk}(\xi, \omega), \quad Q(\kappa\xi, \kappa\omega) = \kappa^{2N} Q(\xi, \omega) \quad (3.22)$$

В силу строгой гиперболичности (3.3) характеристическое уравнение

$$Q(\xi, \omega) = 0$$

имеет  $2N$  корней, которые можно представить в виде

$$\omega_q = \|\xi\| c_q(e), \quad \omega_{2q} = -\omega_q, \quad q = 1, \dots, N, \quad e = \xi / \|\xi\|$$

Используя лемму Жордана о вычетах [110], определим обратное преобразование Фурье по времени  $\bar{U}_{jk}$ . В силу (3.16) и (3.4)

$$\begin{aligned} F_\omega^{-1}[\bar{U}_{jk}(\xi, \omega)] &= -\frac{1}{2\pi} \int_{i\varepsilon-\infty}^{i\varepsilon+\infty} \frac{Q_{jk}(\xi, \omega)}{Q(\xi, \omega)} \exp(-i\omega t) d\omega = \\ &= -iH(t) \sum_{q=1}^{2N} \frac{Q_{jk}(\xi, \|\xi\| c_q)}{Q_{,\omega}(\xi, \|\xi\| c_q)} \exp(-i\|\xi\| c_q t) \quad \forall \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

Обозначим  $Q_{mm} = Q_{mj} \delta_{jm}$ . Поскольку  $Q_{,\omega}(\xi, \omega) = 2\omega Q_{mm}(\xi, \omega)$ , используя свойства (3.22), получим

$$\begin{aligned} U_{jk}(x, t) &= -\frac{i}{(2\pi)^N} H(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{q=1}^{2N} \int_{R^N} \frac{A_{jk}(e, c_q)}{\|\xi\|} \times \\ &\quad \times \exp(-i\|\xi\| c_q t - i(\xi, x) - \varepsilon\|\xi\|) d\xi_1 \dots d\xi_N = \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^N} H(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{q=1}^{2N} \int_{\|e\|=1} A_{jk}(e, c_q) dS(e) \times \\ &\quad \times \int_0^\infty \|\xi\|^{N-2} \exp(-\|\xi\| i((e, x) + c_q(e)t - i\varepsilon)) d\|\xi\| = \end{aligned}$$



$$= \frac{(N-2)!}{(2\pi i)^N} H(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{q=1}^{2N} \int_{\|e\|=1} A_{jk}(e, c_q) \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{((e, x) + c_q(e)t - i\varepsilon)^{N-1}} - \frac{1}{((e, x) - c_q(e)t - i\varepsilon)^{N-1}} \right\} dS(e)$$

Обозначим подынтегральную функцию через  $\Sigma_q(e, x, t, \varepsilon)$  и

$$\Sigma(e, x, t, \varepsilon) = \Sigma_1(e, x, t, \varepsilon) + \dots + \Sigma_N(e, x, t, \varepsilon)$$

Легко видеть, что  $\Sigma(e, x, t, \varepsilon) = 0$  для  $t = 0$ ,  $x \neq 0$ . Следовательно, выполняется условие (3.20). Теорема доказана.

Если на единичной сфере

$$(e, x) \pm c_q(e)t \neq 0 \tag{3.23}$$

то  $\Sigma_q(e, x, t, 0) \neq \infty$ . Ясно, что это выполняется при  $t > 0$ ,

$$\|x\|/t < \min_e c_q(e)$$

В этом случае соответствующие интегралы собственные. Функция  $\Sigma_q(e, x, t, 0)$  имеет особенность, если

$$\|x\| \geq c_q(e)t \tag{3.24}$$

Поскольку размерность сферы  $(N-1)$  совпадает с порядком особенности для таких  $x$  и  $t$ , соответствующий интеграл бесконечен. Эти точки определяют фронты волн, которые определяются параметрическим соотношением

$$\det \left\{ C_{ij}^{ml} e_m e_l - (\|x\|/t)^2 \delta_{ij} \right\} = 0$$

которое следует из (3.4) с учетом (3.24).

Интеграл по сфере, в силу свойств подынтегральных функций (3.22), можно свести к интегралу по полусфере. Тогда подынтегральное выражение при условии (3.23) будет иметь вид

$$\Sigma'_q = \Sigma_q(e, x, t, 0) + \Sigma_q(-e, x, t, 0) = (1 - (-1)^{N-1}) \Sigma_q(e, x, t, 0)$$

Следовательно,  $\Sigma'_q = 0$  для нечетных  $N$  всюду вне особенностей подынтегрального выражения, т.е. в этом случае функция Грина – сингулярная обобщенная функция с носителем нулевой меры.

Аналогично теореме 2.2 доказывается

**Т е о р е м а 2.3** Если  $c_q (q = \overline{1, N})$  – корни уравнения (3.4) кратности  $m_q$ ,

то

$$U_{jk} = \frac{(N-2)!}{(2\pi i)^N} H(t) \sum_q m_q \int_{R^N} \frac{Q_{jk, \omega}^{(m_q-1)}(e, c_q)}{(Q_{, \omega}^{(m_q)}(e, c_q))} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{((e, x) + c_q(e)t - i0)^{N-1}} - \frac{1}{((e, x) - c_q(e)t - i0)^{N-1}} \right\} dS(e)$$

здесь верхний индекс в скобках означает порядок производной по  $\omega$ .

*Доказательство* следует из представления

$$F_{\omega}^{-1}[\overline{U}_{jk}] = \\ = -i H(t) \left( \sum_q \frac{m_q!}{(m_q - 1)!} \frac{Q_{jk, \omega}^{(m_q-1)}(\xi, \|\xi\| c_q)}{(Q_{, \omega}^{(m_q)}(\xi, \|\xi\| c_q))} \exp(-i \|\xi\| c_q t) \right)$$

где использована формула для вычета в случае кратных корней. Суммирование проводится по всем  $c_q$ . Далее обращение по  $\xi$  проводится как в предыдущей теореме.

Таким образом, построение матрицы Грина сводится к вычислению интегралов по единичной сфере. Для нечетных  $N$  эти теоремы позволяют строить только  $\varepsilon$  – приближение матрицы Грина. Для четных  $N$  для определения  $\varepsilon$  – приближения необходимо интегрирование многомерного поверхностного интеграла по единичной сфере. Однако в ряде случаев эта процедура может быть упрощена. Например, при построении тензора Грина для изотропной среды.

Заметим, что если известен оригинал  $Q^{-1}$

$$J(x,t) = F^{-1} \left[ \frac{1}{Q(i\xi, i\omega)} \right]$$

который строится с учетом условий (3.19), то легко восстанавливается матрица Грина –

$$U_{jk}(x,t) = -Q_{jk}(\partial_x, \partial_t) J(x,t) \quad (3.25)$$

В случае инвариантности уравнений (3.1) относительно группы ортогональных преобразований символ оператора  $L_{ij}$  является функцией только двух переменных  $\|\xi\|$ ,  $\omega$  и может быть представлен в виде

$$Q(i\xi, i\omega) = (i\omega)^{2N} Q(\|\xi\| \omega^{-1}) \quad (3.26)$$

Это значительно упрощает построение оригинала, позволяя использовать функции Грина классического волнового уравнения. Для этого следует разложить  $Q^{-1}(i\xi, i\omega)$  на простые дроби. В случае простых корней будем иметь

$$Q(i\xi, i\omega) = \prod_{k=1}^N (\|\xi\|^2 - \omega^2 / c_k^2)$$

$$\frac{1}{Q(i\xi, i\omega)} = \frac{1}{(i\omega)^{2N-2}} \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{(\|\xi\|^2 - \omega^2 / c_k^2)} \quad (3.27)$$

где  $A_k$  – постоянные разложения. Легко видеть, что слагаемое в скобках под знаком суммы – символ классического волнового оператора  $D_k = c_k^{-2} \partial_t^2 - \Delta_N$  ( $\Delta_N$  – оператор Лапласа), функция Грина которого  $U_N(x, t)$  хорошо изучена [182]. В частности, для  $N = 1, 2, 3$  (случаи, характерные для физических задач) она имеет следующий вид [44]

$$\begin{aligned}
 U_1(x, t, c) &= \frac{1}{2c} H(ct - r), \quad r = \|x\|, \\
 U_2(x, t, c) &= \frac{1}{2\pi c \sqrt{ct - r}} H(ct - r), \\
 U_3(x, t, c) &= \frac{1}{4\pi r} \delta(ct - r)
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Здесь  $\delta(ct - r)$  – простой слой на конусе  $K_c = \{(x, t) : \|x\| = ct\}$ :

$$(\delta(ct - r), \varphi(x, t)) = \int_0^\infty dt \int_{r=ct} \varphi(x, t) dS(x) = c^{-1} \int_{R^N} \varphi(x, \|x\|/c) dx, \quad \forall \varphi \in \mathbf{D}(R^{N+1})$$

Волновым фронтом функции Грина является расширяющаяся со скоростью  $c$  сфера в  $R^N$ , на которой она имеет особенности. Как следует из теоремы 2.2 носителем  $U_N(x, t, c)$  является внутренность конуса  $K_c^+ = \{(x, t) : \|x\| \leq ct, t > 0\}$  в  $R^{N+1}$ , если  $N$  четное, и его поверхность  $K_c$ , если  $N$  нечетное. Например,  $U_3$  в (3.28) – простой слой на конусе – сингулярная обобщенная функция. Это свойство  $U_N$  было ранее доказано в [45]. Из уравнения (3.27) следует, что в этом случае  $J(x, t)$  является сверткой по  $t$  функции Грина с  $H(t)$ :

$$J(x, t) = \sum_{k=1}^N A_k (H(t) * \dots * (H(t) * U_N(x, t, c_k))) \tag{3.29}$$

Здесь свертка по  $t$  берется  $2N - 2$  раза и существует в силу полуограниченности слева носителей входящих в нее функций [46]. Легко проверить, что условия (3.19) – (3.20) выполняются, так как им удовлетворяют  $U_N(x, t, c)$ . Сформулируем этот результат в виде теоремы.

**Т е о р е м а 2.4.** Если символ оператора  $L$  представим в виде (3.26) и  $c_k$  – простые корни уравнения (3.4), то  $U_{jk}(x, t)$  определяются формулой (3.25), где  $J(x, t)$  имеет вид (3.29).

Если  $c_k$  имеют кратность  $m_k$  в разложении (3.27) могут появиться степени  $\left(\|\xi\|^2 - \omega^2 / c_k^2\right)^{-m}$  ( $m = 1, \dots, m_k$ ). Пользуясь свойством преобразования свертки, получим оригинал в виде полной свертки по  $(x, t)$ :

$$F^{-1}\left[\left(\|\xi\|^2 - \omega^2 / c_k^2\right)^{-m}\right] = \left(U_N(x, t, c) * \dots * U_N(x, t, c)\right)_m$$

Далее процедура построения матрицы Грина аналогична описанной.

Заметим, что, как следует из (3.29), в случае  $N = 1, 2$  операция взятия свертки сводится к взятию регулярных интегралов простого вида:

$$U_N(x, t) * H(t) = \int_0^t U_N(x, t - \tau) d\tau$$

$$U_N(x, t) * U_N(x, t) = \int_{R^N} dV(y) \int_0^t U_N(x - y, t - \tau) U_N(y, \tau) d\tau$$

Но уже для  $N = 3$  и выше построение сверток нетривиально и для вычисления следует использовать их определение в классе обобщенных функций [182].

Для произвольной регулярной функции  $\hat{G} \in D'(R^{N+1})$ :  $supp \hat{G} \in (0, \infty)$  соответствующее решение уравнений (2.1), удовлетворяющее условиям типа (3.19), имеет вид свертки

$$\hat{u}_i = U_i^k * \hat{G}_k \quad (3.30)$$

Для регулярных функций она имеет интегральное представление

$$\hat{u}_i(x, t) = \int_0^\infty d\tau \int_{R^N} U_{ik}(x - y, t - \tau) G_k(y, \tau) dV(y) \quad (3.31)$$

Если уравнения (2.1) инвариантны относительно группы ортогональных преобразований, то  $c_k$  не зависят от  $n$ . В физических задачах изотропия среды приводит к указанному свойству.

### 3.2.2 Матрица Грина анизотропной среды при плоской деформации и ее свойства

Рассмотрим анизотропную (ортотропную) среду, находящуюся в условиях плоской деформации, т.е. действующие силы и перемещения не зависят от координаты  $x_3$  и  $u_1 = u_1(x_1, x_2)$ ,  $u_2 = u_2(x_1, x_2)$ ,  $u_3 = 0$ . Уравнения движения в этом случае при действии сосредоточенной силы, направленной по оси  $x_k$  ( $k = 1, 2$ ), имеют вид

$$\begin{aligned} C_{11}u_{1,11} + (C_{12} + C_{66})u_{1,12} + C_{66}u_{1,22} + \delta_1^k \delta(x, t) &= \rho u_{1,tt}(x, t) \\ C_{66}u_{2,11} + (c_{12} + c_{66})u_{2,21} + C_{22}u_{2,22} + \delta_2^k \delta(x, t) &= \rho u_{2,tt}(x, t) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Для такой среды тензор Грина в пространстве трансформант Фурье – Лапласа есть

$$\bar{U}_{jk}(\xi, p) = \frac{Q_{jk}(-i\xi_1, -i\xi_2, p)}{Q(-i\xi_1, -i\xi_2, p)} = \frac{Q_{jk}(i\xi_1, i\xi_2, p)}{Q(i\xi_1, i\xi_2, p)} \quad (3.33)$$

( $p$  – параметр преобразования Лапласа) в силу однородности полиномов  $Q_{jk}$ , где

$$Q_{11}(\xi_1, \xi_2, p) = C_{66}\xi_1^2 + C_{22}\xi_2^2 + \rho p^2,$$

$$Q_{12}(\xi_1, \xi_2, p) = -(C_{12} + C_{66})\xi_1\xi_2, \quad (3.34)$$

$$Q_{22}(\xi_1, \xi_2, p) = C_{11}\xi_1^2 + C_{66}\xi_2^2 + \rho p^2,$$

$$Q(\xi_1, \xi_2, p) = Q_{11}(\xi_1, \xi_2, p)Q_{22}(\xi_1, \xi_2, p) - Q_{12}^2(\xi_1, \xi_2, p).$$

Для определения обратного преобразования (3.33):

$$U_{jk}(x, t) = \frac{1}{8\pi^3 i} \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_{jk}(i\xi_1, i\xi_2, p)}{Q(i\xi_1, i\xi_2, p)} e^{ix_1\xi_1 + ix_2\xi_2 + pt} d\xi_1 d\xi_2 dp$$

удобно перейти к полярной системе координат  $\mathbf{x} = (r, \varphi)$ , тогда  $\xi = (\xi, \theta)$ .

Полагая  $p = \xi s$ , получим:

$$U_{jk}(x, t) = \frac{1}{8\pi^3 i} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{i\xi r \cos \theta} d\xi \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} \frac{Q_{jk}(i \cos \theta, i \sin \theta, s)}{Q(i \cos \theta, i \sin \theta, s)} e^{\xi s t} ds \quad (3.35)$$

В (3.35) удобно сначала выполнить обратное преобразование Лапласа, используя свойство однородности полиномов. В силу строгой гиперболичности полином  $Q(i \cos \theta, i \sin \theta, s)$  имеет четыре различных мнимых корня

$s_m = i c_m$  ( $m = \overline{1, 4}$ ), тогда внутренний интеграл равен сумме вычетов:

$$U_{jk}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^4 \frac{Q_{jk}(i \cos \theta, i \sin \theta, i \sigma_n(\theta))}{Q_{,s}(i \cos \theta, i \sin \theta, i \sigma_n(\theta))} d\theta \int_0^{\infty} e^{i\xi(r \cos \theta + \sigma_n(\theta)t)} d\xi$$

Учитывая, что

$$\int_0^{\infty} e^{i\xi\alpha} d\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon - i\alpha} = \frac{i}{\alpha} + \pi\delta(\alpha)$$

получим

$$U_{jk}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^4 \frac{Q_{jk}(i \cos \theta, i \sin \theta, i \sigma_n(\theta))}{Q_{,s}(i \cos \theta, i \sin \theta, i \sigma_n(\theta))} \times \frac{i}{x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta + \sigma_n(\theta)t} d\theta =$$

Используя лемму Жордана о вычетах, выполнив предельный переход при интегрировании по  $\theta$ , а также беря предел в формуле обратного преобразования Фурье в смысле сходимости обобщенных функций, получим тензор Грина, представляющий собой сумму вычетов дробно-рациональных функций [85,193]:

$$U_j^k(x, t) = \frac{1}{\pi t} \operatorname{Im} \sum_{\substack{q=1 \\ \operatorname{Im} \zeta_q > 0}}^2 \frac{Q_{jk}(\zeta_q, 1, (x_1 \zeta_q + x_2)/t)}{Q_{,\zeta}(\zeta_q, 1, (x_1 \zeta_q + x_2)/t)} \quad (3.36)$$

где  $Q_{jj}(\cdot) = -L_{kk}(\cdot)$ ,  $Q_{jk}(\cdot) = L_{jk}(\cdot)$  для  $j \neq k$  или

$$Q_{11}(\xi_1, \xi_2, \omega) = C_{66}\xi_1^2 + C_{22}\xi_2^2 + \rho\omega^2, \quad Q_{12}(\xi_1, \xi_2, \omega) = -(C_{12} + C_{66})\xi_1\xi_2,$$

$$Q_{22}(\xi_1, \xi_2, \omega) = C_{11}\xi_1^2 + C_{66}\xi_2^2 + \rho\omega^2, \quad \zeta_q - \text{корни уравнения}$$

$$Q(\zeta, 1, x_1\zeta + x_2) = 0, \quad Q = Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2 \quad (3.37)$$

Для ортотропной среды скорость распространения волны зависит от направления распространения волны, а форма волновых фронтов существенно зависит от коэффициентов уравнения (3.1). Так, скорости распространения квазипродольной и квазипоперечной волн  $c_m = c_m(\theta)$  в такой среде выражаются следующим образом:

$$c_m(\theta) = \pm \left\{ \left[ (C_{11} + C_{66})\cos^2(\theta) - (C_{22} + C_{66})\sin^2(\theta) \pm \sqrt{\left[ (C_{11} - C_{66})\cos^2(\theta) - (C_{22} - C_{66})\sin^2(\theta) \right]^2 + 4(C_{12} + C_{66})^2 \sin^2(\theta)} \right] / 2\rho \right\}^{1/2} \quad (3.38)$$

Для изотропной среды (3.38) переходят в известные выражения для скоростей распространения объемных и сдвиговых волн:

$$c_{1,2} = \pm \sqrt{C_{11}/\rho} = \pm \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \quad c_{3,4} = \pm \sqrt{C_{66}/\rho} = \pm \sqrt{\mu/\rho}$$



В выражении для тензора Грина (3.36) суммируются вычеты дробно-рациональных функций в верхней полуплоскости, что требует знания значений корней  $\zeta_q$  полинома  $Q$  (3.37). Корни этого уравнения четвертой степени являются комплексно сопряженными, поэтому мы всегда имеем два корня, удовлетворяющих условию  $Im \zeta \geq 0$ .

### 3.2.3 Тензор Грина изотропной упругой среды

В случае однородной изотропной линейно-упругой среды связь между напряжениями и смещениями имеет вид

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{ml} \varepsilon_{jl} = \mu \varepsilon_{jl} + \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk}$$

и уравнения движения (3.7) переписутся следующим образом:

$$\mu u_{i,jj}(x,t) + (\lambda + \mu) u_{j,ij}(x,t) + \delta_{i\beta} \delta(x-y,t) = \rho u_{i,tt}(x,t)$$

В изотропной среде существуют две скорости

$$c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}, \quad c_2 = \sqrt{\mu / \rho}$$

распространения объемных и сдвиговых волн. Фронты волн, описываемые тензором Грина, – две концентрические сферы, расширяющиеся с этими скоростями. В такой среде  $C_{ij}^{ml} = \lambda \delta_{ij} \delta_{lm} + \mu (\delta_{im} \delta_{jl} + \delta_{jm} \delta_{il})$  ( $\lambda, \mu$  – упругие константы Ламе) и корни полинома (3.32) имеют вид:

$$\zeta_1 = - \left( x_1 x_2 + c_1 t \sqrt{r - c_1^2 t^2} \right) / \left( x_1^2 - c_1^2 t^2 \right),$$

$$\zeta_2 = - \left( x_1 x_2 + c_2 t \sqrt{r - c_2^2 t^2} \right) / \left( x_2^2 - c_2^2 t^2 \right).$$

Тензор Грина (3.31) для изотропной упругой среды можно записать в явном виде:

$$U_j^k(x, t) = \frac{1}{2\pi\rho} \left\{ \frac{\delta_j^k}{c_2^2 B_2} H(t - r/c_2) + \frac{r_{,j} r_{,k} t^2}{r^2} \sum_{p=1}^2 (-1)^{p-1} \frac{H(t - r/c_p)}{B_p} - \right. \\ \left. - \frac{\delta_j^k - r_{,j} r_{,k}}{r^2} \sum_{p=1}^2 (-1)^{p-1} B_p H(t - r/c_p) \right\} \quad (3.39)$$

где  $r_{,i} = x_i/r$ ,  $r = \sqrt{x_k x_k}$ ,  $B_p = \sqrt{t^2 - r^2/c_p^2}$ ,  $H(t - r/c_p)$  – функция Хевисайда,  $i, j, k, p = 1, 2$ . Тензоры Грина для изотропной среды, находящейся в условиях плоской и пространственной деформаций, построены также в [94].

### 3.2.4 Тензор Грина упругой анизотропной полуплоскости

Рассмотрим анизотропную упругую среду, находящуюся в условиях плоской деформации, занимающую область  $S^- = \{x : x_2 \leq h, h > 0\} \subset R^2$  с плоской границей  $\Gamma = \{x : x_2 = h\}$ , на которой выполняется одно из следующих условий:

$$u_i(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma \quad (\text{жесткая граница}) \quad (3.40)$$

$$\sigma_i^l(x, t) n_l(x) = g_i(x, t), \quad x \in \Gamma \quad (\text{свободная граница}) \quad (3.41)$$

Предполагается, что компоненты вектора перемещений удовлетворяют следующим начальным условиям:

$$\frac{\partial^m u_i(x, t)}{\partial t^m} = 0, \quad x \in \begin{cases} S^- \cup \Gamma, & t \leq 0 \quad (m=0) \\ S^-, & t < 0 \quad (m=1) \end{cases} \quad (3.42)$$

а для массовой силы  $G(x, t)$  существует преобразование Лапласа:

$$\bar{G}(x, p) = \int_0^{\infty} G(x, t) e^{-pt} dt, \quad \operatorname{Re} p > 0$$

Требуется найти решение следующих краевых задач:

*Краевая задача I.* Найти решение системы уравнений движений (3.18), при заданных начальных условиях (3.42) и граничных условиях (3.40).

*Краевая задача II.* Найти решение системы уравнений движений (3.18), при заданных начальных условиях (3.42) и граничных условиях (3.41).

Обозначим через  $W_j^{k(r)}(x, t)$  – компоненты тензора Грина первой ( $r=1$ ) и второй ( $r=2$ ) краевых задач для полуплоскости. Решение рассматриваемых задач имеет вид свертки  $W_j^{k(r)}(x, t)$  с соответствующей массовой силой  $G_k(x, t)$ :

$$u_j(x, t) = W_j^{k(r)}(x, t) * G_k(x, t) \quad (3.43)$$

Тензор Грина  $W_j^{k(r)}(x, t)$  должен удовлетворять условиям излучения на бесконечности.

В пространстве преобразований Лапласа по времени  $t$  выражение (3.43) имеет вид

$$\bar{u}_j(x, p) = \bar{W}_j^{k(r)}(x, p) *_{x} \bar{G}_k(x, p)$$

а граничные (3.40), (3.41) и начальные (3.42) условия соответственно:

$$\bar{u}_i(x, p) = 0, \quad x \in \Gamma \quad (3.40)^*$$

$$\bar{\sigma}_{ij}(x, p) n_j(x) = 0, \quad x \in \Gamma \quad (3.41)^*$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p^m \bar{u}_i(x, p) = 0, \quad x \in \begin{cases} S^- \cup \Gamma & (m=1) \\ S^- & (m=2) \end{cases} \quad (3.42)^*$$

**Общее решение.** Решение первой и второй краевых задач представим в следующем виде

$$\bar{W}_j^{k(r)}(x, p) = \bar{U}_j^{k(r)}(x, p) + \bar{V}_j^{k(r)}(x, p), \quad r = 1, 2 \quad (3.44)$$

Здесь  $\bar{U}_j^k(x, p)$  – трансформанта тензора Грина для анизотропной плоскости (3.17);  $\bar{V}_j^{k(r)}(x, p)$  – тензор описывает волны, отраженные границей  $\Gamma$ ; индекс  $r$  принимает значение 1 при решении первой, 2 – при решении второй краевых задач. Компоненты  $\bar{V}_j^{k(r)}(x, p)$  подлежат определению. В силу линейности уравнений (3.18 и представления (3.44) функции  $\bar{V}_j^{k(r)}(x, p)$  удовлетворяют следующей системе:

$$L_{ij} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, p \right) \bar{V}_j^{k(r)}(x, p) = 0, \quad i, j, k, r = 1, 2 \quad (3.45)$$

Представляя  $\bar{V}_{jk}^r(x, p)$  в виде

$$\bar{V}_{jk}^r(x, p) = \text{grad } \varphi_k^r + \text{rot } \psi_k^r e_3 \quad (3.46)$$

( $e_3$  - орт оси  $x_3$ ), введем матрицу потенциалов Ламе, столбцы которой  $\{\varphi_k^r, \psi_k^r\}$  есть выражения

$$\varphi_k^r = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Phi}_k^r(\xi, p) \exp(ix_1 \xi + x_2 \nu_1) d\xi$$

$$\psi_k^r = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Psi}_k^r(\xi, p) \exp(ix_1\xi + x_2\nu_2) d\xi \quad \operatorname{Re} \nu_s \geq 0 \quad (s=1,2) \quad (3.47)$$

Смысл и вид выражений  $\nu_1$  и  $\nu_2$  будет пояснен ниже. Тогда для компонент искомого тензора получим следующие выражения:

$$\bar{V}_1^{k(r)}(x, p) = \int_{-\infty}^{\infty} [i\xi \bar{\Phi}_k^r(\xi, p) e^{x_2\nu_1} + \nu_2 \bar{\Psi}_k^r(\xi, p) e^{x_2\nu_2}] e^{ix_1\xi} d\xi \quad (3.48)$$

$$\bar{V}_2^{k(r)}(x, p) = \int_{-\infty}^{\infty} [\nu_1 \bar{\Phi}_k^r(\xi, p) e^{x_2\nu_1} - i\xi \bar{\Psi}_k^r(\xi, p) e^{x_2\nu_2}] e^{ix_1\xi} d\xi$$

Рассмотрим тензор Грина (3.36) для бесконечной анизотропной плоскости. В пространстве преобразования Лапласа он имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{U}_{jk}(x, p) = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\delta_j^k Q_{mm}(i\xi_1, i\xi_2, p) + \delta_m^k Q_{jm}(i\xi_1, i\xi_2, p)}{Q(i\xi_1, i\xi_2, p)} \times \\ & \times \exp(i(x, \xi)) d\xi_1 d\xi_2, \quad m, j, k = 1, 2, \quad m \neq j \end{aligned} \quad (3.49)$$

здесь  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  – параметры преобразования Фурье;  $Q_{jm}$  – однородные полиномы второго порядка, соответствующие дифференциальным операторам (2.2); знаменатель представляет собой полином четвертого порядка:

$$Q(\cdot) = Q_{11}(\cdot)Q_{22}(\cdot) - Q_{12}^2(\cdot)$$

Здесь и ниже точки в скобках соответствуют тем же параметрам, что и в соотношениях (3.29). Обозначив через  $\nu_1^2$  и  $\nu_2^2$  корни многочлена  $Q$ , взятые с противоположным знаком, например, для ортотропной среды получим

$$v_1^2 = \frac{d_1 + d_2 - d_3 + \beta(\xi, p)}{2C_{11}C_{66}} \quad (3.50)$$

$$v_2^2 = \frac{d_1 + d_2 - d_3 + \beta(\xi, p)}{2C_{22}C_{66}}$$

где

$$d_1 = C_{22}(C_{11}\xi_1^2 + \rho p^2), \quad d_2 = C_{66}(C_{66}\xi_1^2 + \rho p^2), \quad d_3 = (C_{12} + C_{66})^2 \xi_1^2,$$

$$\beta^2(\xi, p) = (d_1 + d_2 - d_3)^2 - 4d_1d_2$$

В случае изотропной среды имеем  $\beta(\xi, p) = (\lambda + \mu)\rho p^2$ , а корни (3.50) есть выражения

$$v_j^2 = \xi_1^2 + \frac{p^2}{c_j^2} \quad (j=1,2)$$

где  $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$ ,  $c_2^2 = \mu/\rho$ . Учитывая, что

$$\frac{1}{Q(\cdot)} = \frac{1}{\beta(\xi_1, p)} \left( \frac{1}{\xi_2^2 + v_1^2} - \frac{1}{\xi_2^2 + v_2^2} \right)$$

выражение (3.49) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \bar{U}_{jk}(x, p) = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^2 (-1)^s \frac{-\delta_j^k Q_{mm}(i\xi, v_s, p) + \delta_m^k Q_{jm}(i\xi_1, i\xi_2, p)}{\beta(\xi_1, p)} \times \\ & \times \left( \frac{1}{\xi_2^2 + v_1^2} - \frac{1}{\xi_2^2 + v_2^2} \right) \exp(i(x, \xi)) d\xi_1 d\xi_2, \quad m, j, k = 1, 2, \quad m \neq j \end{aligned} \quad (3.51)$$

Возьмем интеграл по переменной  $\xi_2$ , используя лемму Жордана и теорему о вычетах. Поскольку  $x_2 > 0$ , то при  $\text{Re} \nu_s \geq 0$ , выберем вычеты в полюсах  $\xi_2 = i\nu_s$ ,  $s = 1, 2$ . Тогда

$$\begin{aligned} \bar{U}_j^k(x, p) = & \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^2 (-1)^s \frac{-\delta_j^k Q_{mm}(i\xi, \nu_s, p) + \delta_m^k Q_{jm}(i\xi, \nu_s, p)}{\beta(\xi, p)\nu_s} \times \\ & \times \exp(ix_1\xi - x_2\nu_s) d\xi, \quad m, j, k = 1, 2, \quad m \neq j, \quad \text{Re} \nu_s \geq 0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

(здесь и ниже индекс 1 у параметра  $\xi$  опустим).

Для определения компонент соответствующего тензора фундаментальных напряжений воспользуемся законом Гука

$$\bar{S}_{ik}^m(x, p) = C_{ij}^{ml} \bar{U}_{j,l}^k(x, p) \quad (3.53)$$

**Трансформанта динамического тензора Грина первой краевой задачи для анизотропной полуплоскости.** Соотношения (3.48) и (3.42) позволяют найти трансформанту тензора для первой краевой задачи для анизотропной полуплоскости. В этом случае  $\bar{V}_{jk}^1(x, p)$  удовлетворяют системе уравнений (3.45) и граничным условиям

$$\bar{V}_j^{k(1)}(x, p) = -\bar{U}_j^k(x, p), \quad x \in \Gamma \quad (3.54)$$

Приравняв в силу произвольности  $x_1$  подынтегральные выражения левой и правой частей в соотношениях (3.34), получим систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов  $\bar{\Phi}_k^1(\xi, p)$ ,  $\bar{\Psi}_k^1(\xi, p)$ . Разрешив последнюю, найдем

$$\bar{\Phi}_k^1(\xi, p) = \frac{i}{4\pi\beta(\xi, p)B_1} \sum_{s=1}^2 (-1)^{s-1} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( P_{1k}(\xi, \nu_s, p) \frac{\xi}{\nu_s} + iP_{2k}(\xi, \nu_s, p) \frac{\nu_2}{\nu_s} \right) \exp(-h(\nu_1 + \nu_s)), \\
\bar{\Psi}_k^1(\xi, p) &= \frac{i}{4\pi\beta(\xi, p)B_1} \sum_{s=1}^2 (-1)^{s-1} \times \\
& \times \left( iP_{1k}(\xi, \nu_s, p) \frac{\nu_1}{\nu_s} - P_{2k}(\xi, \nu_s, p) \frac{\xi}{\nu_s} \right) \exp(-h(\nu_2 + \nu_s))
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$B_1 = \nu_1 \nu_2 - \xi^2,$$

$$P_{1k}(\xi, \nu_s, p) = \delta_1^k Q_{22}(\xi, \nu_s, p) - \delta_2^k Q_{12}(\xi, \nu_s, p)$$

$$P_{2k}(\xi, \nu_s, p) = \delta_1^k Q_{12}(\xi, \nu_s, p) - \delta_2^k Q_{11}(\xi, \nu_s, p)$$

Поскольку  $\operatorname{Re} p > 0$ , в соотношениях (3.55)  $B_1 \neq 0$  для  $\forall \xi \in (-\infty, \infty)$ . Подынтегральные функции в (3.48) экспоненциально затухают быстрее, чем  $\exp(-h\xi)$ , и бесконечно дифференцируемы по  $x_1, x_2$ . Следовательно, интегралы в (3.48) с учетом выражений (3.55) являются сходящимися и допускают дифференцирование по  $x_1, x_2$  под знаком интеграла. При больших значениях  $p$  для функций  $\bar{V}_j^{k(1)}(x, p)$  справедлива следующая асимптотическая оценка:

$$|\bar{V}_{jk}^1(x, p)| < \frac{\text{const}}{|\operatorname{Re} p|^3} \exp\left(-\frac{hp}{c}\right), \quad c = \max\left(\sqrt{C_{66}/\rho}, \sqrt{C_{22}/\rho}\right) \tag{3.56}$$

Для изотропной полуплоскости выражения (3.55) получены ранее [17] и в оценке (3.56) следует положить  $c = c_1$ .



Таким образом, найдена трансформанта  $\bar{V}_j^{k(1)}(x, p)$ , а значит, и определен первый динамический тензор Грина  $\bar{W}_j^{k(1)}(x, p)$  для анизотропной полуплоскости.

**Трансформанта динамического тензора Грина второй краевой задачи для анизотропной полуплоскости.** Граничное условие (3.41)\* с учетом (3.44) и (3.43) для второй краевой, задачи в случае ортотропной среды записывается в виде

$$C_{12} \bar{V}_1^{k(2)}{}_{,1}(x, p) + C_{22} \bar{V}_2^{k(2)}{}_{,2}(x, p) = -C_{12} \bar{U}_1^k{}_{,1}(x, p) - C_{22} \bar{U}_2^k{}_{,2}(x, p) \quad (3.57)$$

$$\bar{V}_1^{k(2)}{}_{,2}(x, p) + \bar{V}_2^{k(2)}{}_{,1}(x, p) = -\bar{U}_1^k{}_{,2}(x, p) - \bar{U}_2^k{}_{,1}(x, p)$$

Подставим соответствующие производные выражений (3.48) при  $r = 2$  и (3.47) в соотношения (3.57). Как и в случае первой краевой задачи, получим систему уравнений для определения коэффициентов  $\bar{\Phi}_2^k(\xi, p)$ ,  $\bar{\Psi}_2^k(\xi, p)$ , разрешая которую, найдем

$$\bar{\Phi}_k^2(\xi, p) = \frac{1}{4\pi \beta(\xi, p) B_2} \sum_{s=1}^2 (-1)^{s-1} \left\{ i \xi P_{1k}(\xi, \nu_s, p) \left[ C_{12} \left( \nu_2 + \frac{\xi^2 + \nu_2^2}{\nu_s} \right) - \right. \right. \quad (3.58)$$

$$\left. - C_{22} \nu_2 \right] - P_{2k}(\xi, \nu_s, p) \left[ C_{12} \xi^2 \frac{\nu_2}{\nu_s} - C_{22} \left( \xi^2 + \nu_2^2 + \xi^2 \frac{\nu_2}{\nu_s} \right) \right] \right\} e^{-h(\nu_1 + \nu_s)}$$

$$\bar{\Psi}_k^2(\xi, p) = \frac{1}{4\pi \beta(\xi, p) B_2} \sum_{s=1}^2 (-1)^{s-1} \left\{ P_{1k}(\xi, \nu_s, p) \left[ C_{12} \xi^2 \left( 1 + 2 \frac{\nu_1}{\nu_s} \right) - \right. \right.$$

$$\left. - C_{22} \nu_1^2 \right] + i \xi P_{2k}(\xi, \nu_s, p) \left[ C_{22} \nu_1 \left( 2 + \frac{\nu_1}{\nu_s} \right) - C_{12} \left( \frac{\xi^2}{\nu_s} \right) \right] \right\} e^{-h(\nu_2 + \nu_s)}$$

где

$$B_2 = 2(C_{22} - C_{12})\xi^2 v_1 v_2 - (C_{22} v_1^2 - C_{12} \xi^2)(\xi^2 + v_2^2) \quad (3.59)$$

В случае изотропной среды

$$B_2 = \mu \left[ 4\xi^2 v_1 v_2 - (\xi^2 + v_2^2)^2 \right]$$

Выражение в скобках представляет собой известную функцию Релея, которая обращается в нуль при значениях  $p = \pm i\xi C_R$ , где  $C_R$  – скорость волны Релея.

Поскольку  $\operatorname{Re} p > 0$   $B_2 \neq 0$  для  $\forall \xi \in (-\infty, \infty)$  и для  $\bar{V}_j^{k(2)}(x, p)$  справедливы те же результаты, что и для  $\bar{V}_j^{k(1)}(x, p)$ . Итак, определен и тензор  $\bar{W}_j^{k(2)}(x, p)$ , а следовательно, доказана следующая

*Л е м м а.* Трансформанты тензора Грина первой и второй краевых задач динамики для анизотропной полуплоскости представимы в виде

$$\bar{W}_j^{k(r)}(x, p) = \bar{U}_j^k(x, p) + \bar{V}_j^{k(r)}(x, p), \quad r = 1, 2 \quad (3.60)$$

где  $\bar{U}_j^k(x, p)$  – тензор Грина для бесконечной анизотропной плоскости;  $\bar{V}_j^{k(r)}(x, p)$  – тензор, компоненты которого бесконечно дифференцируемые в области  $S^- = \{x : x_2 \geq h, h > 0\}$  функции, аналитические по  $p$  при  $\operatorname{Re} p > 0$ , удовлетворяющие условиям  $\lim_{p \rightarrow \infty} p^m \bar{V}_{jk}^r(x, p) = 0$  для  $\forall m$ .

Трансформанты динамического тензора Грина второй краевой задачи в случае изотропной полуплоскости получены ранее [17].

### 3.3 Тензор фундаментальных напряжений для анизотропной среды

Тензор Грина  $U_i^j(x, t)$  порождает тензор фундаментальных напряжений, компоненты которого определяются по закону Гука

$$S_{ik}^m(x, t) = C_{ij}^{ml} U_{j,l}^k(x, t), \quad (3.61)$$

Для ортотропной среды он будет иметь вид

$$S_{ij}^k(x, t) = \frac{H(t)}{\pi t} C_{ij}^{ml} \operatorname{Im} \sum_{\substack{q=1 \\ \operatorname{Im} \zeta_q > 0}}^2 \frac{Q_{mk, x_l} Q_{, \zeta} - Q_{mk} (Q_{, \zeta})_{, x_l}}{(Q_{, \zeta})^2}$$

Введем тензор  $T$ :

$$T_k^i(x, t, n) = -\Gamma_i^k(x, t, n) = -C_{ij}^{ml} n_m(x) U_{j,l}^k(x, t), \quad (3.62)$$

$$\Gamma_i^k(x, t, n) = S_{ik}^m(x, t) n_m(x), \quad i, j, k, m, l = \overline{1, N}$$

Тогда систему уравнений для  $U_j^k(x, t)$  (3.18) можно записать в виде:

$$S_{ik, ,l}^m(x, t) - \rho U_{i, ,tt}^k(x, t) + \delta_i^k \delta(x) \delta(t) = 0 \quad (3.63)$$

Отметим *свойства* тензоров фундаментальных решений

$$U_i^k(x, t) = U_i^k(-x, t), \quad U_i^k(x, t) = U_k^i(x, t)$$

$$S_{ik}^m(x, t) = -S_{ik}^m(-x, t), \quad (3.64)$$

$$T_i^k(x, t, n) = -T_i^k(-x, t, n) = -T_i^k(x, t, -n)$$

Легко видеть, что они являются следствием инвариантности уравнений (3.18) для  $U_j^k(x, t)$  относительно преобразований симметрии  $y = -x$ .

**Т е о р е м а 1.5.** При фиксированном  $k$  матрица  $T_i^k(x, t, n)$  является фундаментальным решением системы уравнений (3.18), соответствующим

$$G_i(x, t) = C_{ik}^{ml} n_m(x) \delta_{,l}(x) \delta(t)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Применим дифференциальный оператор (3.2) к  $T_j^k(x, t, n)$ , используя (3.61) – (3.62)

$$\begin{aligned} L_{ij}(\partial_x, \partial_t) T_j^k(x, t, n) &= -L_{ij}(\partial_x, \partial_t) \Gamma_k^j(x, t, n) = -L_{ij}(\partial_x, \partial_t) S_{kj}^m(x, t) n_m(x) = \\ &= -n_m(x) L_{ij} C_{ks}^{ml} U_{s,l}^j = n_m(x) C_{ks}^{ml} \delta_i^s \delta_{,l}(x) \delta(t) = n_m(x) C_{ik}^{ml} \delta_{,l}(x) \delta(t) \end{aligned}$$

Таким образом,  $T_i^k(x, t, n)$  является решением системы уравнений (3.18) с указанной сингулярной неоднородностью в начале координат, что и требовалось доказать.

Назовем  $T_i^k(x, t, n)$  *мультипольной матрицей*, поскольку она описывает фундаментальные решения системы (3.18), порождаемые сосредоточенными источниками мультипольного типа [40].

Введем первообразные тензоров фундаментальных решений по времени:

$$V_j^k(x, t) = U_j^k(x, t) *_t H(t) \Rightarrow \partial_t V_j^k(x, t) = U_j^k(x, t) \quad (3.65)$$

$$W_j^k(x, t, n) = T_j^m(x, t, n) * \delta_{mk} \delta(x) H(t) = T_j^k(x, t, n) *_t H(t)$$

$$\Rightarrow \partial_t W_j^k(x, t) = T_j^k(x, t) \quad (3.66)$$

здесь символ  $*_{,t}$  означает неполную свертку функции по  $t$ , которая для регулярной функции имеет вид

$$f(x, t) *_t g(x, t) = H(t) \int_0^t f(x, t - \tau) g(x, \tau) d\tau$$

Ясно, что  $V_i^k$  и  $W_i^k$  являются фундаментальными решениями систем уравнений:

$$L_{ij}(\partial_x, \partial_t) V_j^k(x, t) + \delta_i^k \delta(x) H(t) = 0$$

$$L_{ij}(\partial_x, \partial_t) W_j^k(x, t) + C_{ki}^{ml} n_m(x) \delta_{,l}(x) H(t) = 0$$

Из (3.37) следуют свойства симметрии введенных тензоров:

$$V_i^k(x, t) = V_i^k(-x, t), \quad V_i^k(x, t) = V_k^i(x, t) \quad (3.67)$$

$$W_i^k(x, t, n) = -W_i^k(-x, t, n) = -W_i^k(x, t, -n) \quad (3.68)$$

Введем  $U_i^{k(s)}(x)$  – тензор Грина статических уравнений:

$$L_{ij}(\partial_x, 0) U_j^{k(s)}(x) + \delta_{ik} \delta(x) = 0 \quad (3.69)$$

$$U_j^{k(s)}(x) \rightarrow 0 \quad \|x\| \rightarrow \infty$$

а также тензор, аналогично (3.35):

$$T_i^{k(s)}(x, n) = -C_{kj}^{ml} n_m(x) \partial_l U_j^{i(s)} \quad (3.70)$$

Очевидно, что справедливы следующие соотношения симметрии

$$T_i^{k(s)}(x, n) = -T_i^{k(s)}(-x, n) = -T_i^{k(s)}(x, -n) \quad (3.71)$$

Из теоремы 1.5 получим

**С л е д с т в и е.**  $T_i^{k(s)}$  является фундаментальным решением уравнений статики:

$$L_{ij}(\partial_x, 0) T_j^{k(s)}(x, n) - n_m(x) C_{ik}^{ml} \delta_{,l}(x) = 0$$

Легко видеть, что эта система уравнений эллиптического типа.

**Т е о р е м а 1.6.** *Имеют место следующие представления:*

$$V_i^k(x, t) = U_i^{k(s)}(x)H(t) + V_i^{k(d)}(x, t) \quad (3.72)$$

$$W_i^k(x, t) = T_i^{k(s)}(x)H(t) + W_i^{k(d)}(x, t), \quad (3.73)$$

где  $U_i^{k(s)}(x)H(t)$ ,  $T_i^{k(s)}H(t)$  – регулярные функции при  $x \neq 0$ . При  $\|x\| \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} U_i^{k(s)}(x) &\approx \ln \|x\| A_{ik}^N(e_x), & T_i^{k(s)} &\approx \|x\|^{-1} B_{ik}^N(e_x), & N = 2 \\ U_i^{k(s)}(x) &\approx \|x\|^{-N+2} A_{ik}^N(e_x), & T_i^{k(s)} &\approx \|x\|^{-N+1} B_{ik}^N(e_x), & N > 2 \end{aligned} \quad (3.74)$$

здесь  $e_x = x/\|x\|$ ,  $A_{ik}^N(e_x)$ ,  $B_{ik}^N(e_x)$  – непрерывные и ограниченные на сфере  $\|e\|=1$  функции;  $V_i^{k(d)}$ ,  $W_i^{k(d)}$  – регулярные функции, непрерывные при  $x=0$ ,  $t > 0$ . При любом  $N$ :

$$V_i^{k(d)}(x, t) = 0 \quad \text{и} \quad W_i^{k(d)}(x, t) = 0 \quad \text{при} \quad \|x\| > \max_{\|e\|=1} c_k(e)t, \quad \text{а при нечетных } N$$

эти равенства справедливы и при  $\|x\| < \min_{\|e\|=1} c_k(e)t$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В пространстве преобразований Фурье, в силу однородности дифференциальных полиномов  $L_{ij}$  имеем

$$\bar{V}_j^k(i\xi, i\omega) = (i\omega)^{-1} \frac{Q_{jk}(i\xi, i\omega)}{Q(i\xi, i\omega)} = - (i\omega)^{-1} \frac{Q_{jk}(\xi, \omega)}{Q(\xi, \omega)}$$

где  $Q_{ij}$  – алгебраическое дополнение элемента  $L_{ij}$ , а  $Q$  – определитель матрицы  $L$ . В силу строгой гиперболичности системы (3.1) характеристическое уравнение (3.4) имеет, с учетом кратности,  $2N$  корней, которые можно представить в виде:

$$\omega_q = \|\xi\| c_q(e), \quad \omega_{2q} = -\omega_q, \quad q = 1, \overline{N}, \quad e = \xi / \|\xi\|$$

Предположим, что все корни  $c_q$  кратности 1. Используя лемму Жордана о вычетах, определим обратное преобразование Фурье по времени для  $\bar{V}_j^k$

$$F_\omega^{-1} \left[ \bar{V}_j^k \right] = - \frac{1}{2\pi i} \int_{i\varepsilon-\infty}^{i\varepsilon+\infty} (i\omega)^{-1} \frac{Q_{jk}(\xi, \omega)}{Q(\xi, \omega)} \exp(-i\omega t) d\omega = \quad (3.75)$$

$$= H(t) \left( \frac{Q_{jk}(\xi, 0)}{Q(\xi, 0)} + \sum_{q=1}^{2N} (c_q(e) \|\xi\|)^{-1} \frac{Q_{jk}(\xi, \|\xi\| c_q(e))}{Q(\xi, \|\xi\| c_q(e))} \exp(-i \|\xi\| c_q(e) t) \right), \quad \varepsilon > 0$$

Легко видеть, что первое слагаемое в последнем выражении является преобразованием Фурье статической матрицы Грина  $U_i^{k(s)}(x)$ . Оригинал второго слагаемого (3.75) обозначим через  $V_j^{k(d)}$ . Поскольку Фурье-изображение  $\bar{U}_i^{k(s)}$  имеет вид

$$\bar{U}_j^{k(s)}(\xi) = - \frac{Q_{jk}(i\xi, 0)}{Q(i\xi, 0)} = \|\xi\|^{-2} \frac{Q_{jk}(e, 0)}{Q(e, 0)} \quad (3.76)$$

и  $Q(e, 0) \neq 0$  в силу (3.2), следовательно, дробь справа ограничена на единичной сфере. Используя связь между асимптотикой трансформанты Фурье на бесконечности с асимптотикой оригинала в нуле [36], получим (3.74) для  $U_i^{k(s)}(x)$ .

Для матрицы  $W_j^k$  в пространстве преобразований Фурье на основании формул (3.15) и (3.17) можем записать:

$$\bar{W}_j^k = -i C_{js}^{ml} \xi_l n_s \left( \frac{Q_{mk}(\xi, 0)}{Q(\xi, 0)} + \sum_{q=1}^N \frac{Q_{mk}(\xi, \|\xi\| c_q(e))}{\|\xi\| c_q(e) Q_\omega(\xi, \|\xi\| c_q(e))} \exp(-i \|\xi\| c_q(e) t) \right) \quad (3.77)$$

Первое слагаемое в этом выражении является преобразованием Фурье статической матрицы фундаментальных решений  $T_j^{k(s)}$ :

$$T_j^{k(s)}(\xi, t, n) = i C_{js}^{ml} \xi_l n_s \frac{Q_{mk}(i\xi, 0)}{Q(i\xi, 0)} = (i\|\xi\|)^{-1} e_l n_s C_{js}^{ml} \frac{Q_{mk}(e, 0)}{Q(e, 0)},$$

которое имеет сильную особенность при  $x = 0$  вида (3.74) в силу асимптотики при  $\|\xi\| \rightarrow 0$ . Оригинал второго слагаемого в (3.74) обозначим через  $W_j^{k(d)}$ .

Рассмотрим  $V_j^{k(d)}$ :

$$\bar{V}_j^{k(d)}(\xi, t) = H(t) \sum_{q=1}^{2N} \frac{Q_{jk}(e, c_q(e))}{\|\xi\|^2 c_q(e) Q_{,\omega}(e, c_q(e))} \exp(-i\|\xi\| c_q(e) t) \quad (3.78)$$

Найдем оригинал этой функции, используя свойства преобразования Фурье сходящейся последовательности обобщенных функций [33]. Для  $N > 2$

$$\begin{aligned} V_j^{k(d)}(\xi, t) &= \frac{1}{(2\pi)^N} H(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sum_{q=1}^{2N} \int_{R^N} \frac{Q_{jk}(e, c_q(e))}{\|\xi\|^2 c_q(e) Q_{,\omega}(e, c_q(e))} \times \\ &\quad \times \exp(-i\|\xi\| c_q(e) t - i(\xi, x) - \varepsilon\|\xi\|) d\xi \\ &= - \left(\frac{i}{2\pi}\right)^N (N-3)! H(t) \sum_{q=1}^{2N} \int_{\|e\|=1} \frac{Q_{jk}(e, c_q)}{c_q Q_{,\omega}(e, c_q)} \times \frac{1}{((e, x) + c_q(e)t - i0)^{N-2}} dS(e) = \\ &= - \frac{(N-3)!}{t^{N-2}} H(t) \left(\frac{i}{2\pi}\right)^N \sum_{q=1}^{2N} \int_{\|e\|=1} \frac{Q_{jk}(e, c_q(e))}{c_q Q_{,\omega}(e, c_q(e))} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{((e, x/t) + c_q(e) - i0)^{N-2}} + \frac{1}{((e, x/t) - c_q(e) - i0)^{N-2}} \right\} dS(e) \end{aligned}$$

Легко видеть, что при  $t > 0$ , если  $\|(e, x)\| \neq \|(c_q(e)t)\|$ , то подынтегральные функции не имеют особенностей, так как  $c_q \neq 0$  и для однократных корней

$$Q_{,\omega}(e, c_q(e)) \neq 0 \quad (3.78)$$



При  $\|(e, x)\| = \|(c_q(e)t)\|$  подынтегральные функции имеют интегрируемую особенность на сфере, так как размерность сферы  $(N - 1)$  и порядок особенности  $(N - 2)$ . Т.е.  $V_j^{k(d)}(x, t)$  не имеет особенности на фронтах и является регулярной функцией.

На основании формулы (3.77) можем записать:

$$\overline{W}_j^k = -i C_{js}^{ml} \xi_l n_s \sum_{q=1}^N \frac{Q_{mk}(\xi, \|\xi\|c_q)}{\|\xi\|c_q Q_{,\omega}(\xi, \|\xi\|c_q)} \exp(-i\|\xi\|c_q t)$$

Далее аналогично определяем оригинал

$$\begin{aligned} W_j^{k(d)} &= -\frac{i}{(2\pi)^N} H(t) C_{js}^{ml} \xi_l n_s \times \\ &\times \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sum_{q=1}^{2N} \int_{R^N} \frac{Q_{mk}(\xi, \|\xi\|c_q)}{\|\xi\|c_q Q_{,\omega}(\xi, \|\xi\|c_q)} \exp(-i\|\xi\|c_q t - i(\xi, x) - \varepsilon\|\xi\|) d\xi = \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^N} H(t) C_{js}^{ml} \xi_l n_s \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sum_{q=1}^{2N} \int_{\|e\|=1} \frac{Q_{mk}(e, c_q) e_l}{c_q Q_{,\omega}(e, c_q)} dS(e) \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{\exp(-\|\xi\|(i((\xi, x) + c_q t) + \varepsilon))}{(\|\xi\|)^{2-N}} d\xi = \\ &= -\frac{i^N}{(2\pi)^N} (N-2)! H(t) C_{js}^{ml} \xi_l n_s \sum_{q=1}^{2N} \int_{\|e\|=1} \frac{Q_{mk}(e, c_q) e_l}{c_q Q_{,\omega}(e, c_q)} \times \\ &\times \left( \frac{1}{((e, x) + c_q(e)t - i0)^{N-1}} - \frac{1}{((e, x) - c_q(e)t - i0)^{N-1}} \right) dS(e) \end{aligned}$$

Здесь также при  $t > 0$ ,  $\|(e, x)\| \neq \|c_q(e)t\|$  подынтегральные функции не имеют особенностей в силу (3.78).

При  $\|(e, x)\| = \|c_q(e)t\|$  подынтегральные функции имеют неинтегрируемую особенность на сфере, так как размерность сферы  $(N - 1)$  и порядок особенности  $(N - 1)$ . Таким образом,  $W_j^{k(d)}(x, t, n)$  имеет особенности на фронтах и регулярна при  $x = 0$  для любого  $t > 0$ .

### 3.4 Динамика анизотропной упругой среды при сейсмических воздействиях

#### 3.4.1 Обобщенные решения уравнений движения при действии сейсмических источников

Исследование процессов распространения волн от очагов землетрясений связано с изучением напряженно-деформированного состояния среды при действии распределенных массовых сил  $G_k(x, t)$ . Для регулярных массовых сил  $G_k(x, t)$  компоненты поля перемещений есть следующие интегральные представления:

$$u_i(x, t) = \int_0^{\infty} d\tau \int_{R^3} U_{ik}(x - y, t - \tau) G_k(y, \tau) dV(y)$$

Для удаленного очага землетрясения, расстояние до которого существенно превышает его размеры, используются модели сосредоточенных источников в виде сингулярных обобщенных функций с точечным носителем (поль, диполь, мультиполь и др.) [40]. Поле перемещений при этом имеет вид свертки  $U_{jk}(x, t)$  с соответствующей  $G_k(x, t)$ :

$$u_j(x, t) = U_j^k(x, t) * G_k(x, t), \quad j, k = \overline{1, 3}, \quad (3.79)$$

которую следует брать по правилам определения свертки в теории обобщенных функций. Сосредоточенные импульсные источники вводятся через массо-

вые силы в виде следующих сингулярных обобщенных функций с точечным носителем.

*Сосредоточенная сила* описывается  $\delta$  – функцией Дирака (индекс  $k$  указывает направление действия силы)

$$G_i(x, y, t) = \delta_{ik} \delta(x - y, t - t_0)$$

Физически она описывает движение среды при действии сосредоточенных источников в точке  $y$  в момент времени  $t_0$ . Перемещениям, возникающим при этом в среде, соответствует тензор Грина, полученный в разделе 1.

*Диполь* – предел пары сосредоточенных сил при стремлении расстояния между приложения этих сил (имеющих общую линию действия) к нулю. В этом случае компоненты массовой силы есть

$$G_i(x, y, t) = -D e_k \frac{\partial \delta(x - y, t)}{\partial x_k} e_i, \quad (\text{суммирование по } k)$$

$e$  – орт оси диполя,  $D$  – величина момента диполя.

*Сосредоточенный момент* (двойная сила с моментом) – предел пары сосредоточенных сил при стремлении плеча пары к нулю:

$$G_i(x, y, t) = -\frac{M G_i^0}{|e \times G^0|} e_k \frac{\partial \delta(x - y, t)}{\partial x_k}$$

$e, G^0$  – орты сил, определяющих момент  $M$ .

Поле перемещений в окрестности очага землетрясения хорошо описывается сосредоточенной нагрузкой с осевой симметрией, представляющей собой *плоский центр расширения* (если образован положительными диполями) – сжатия (если образован отрицательными диполями):

$$G_i(x, y, t) = -\frac{D}{2} \frac{\partial \delta(x - y, t)}{\partial x_i}$$

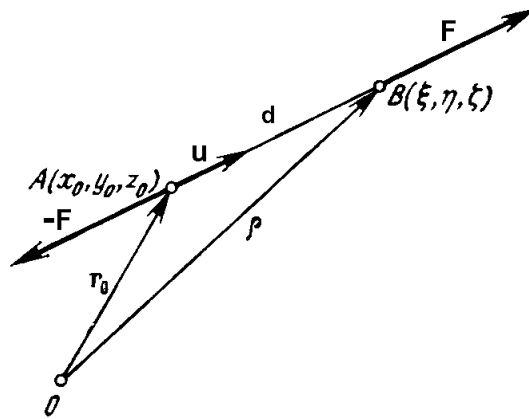
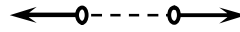


Рисунок 3.1

Для случая, когда диполь действует вдоль оси  $Ox$  ( $Ox_1$ )



Поле перемещений запишется в виде

$$u_{\beta} = U_{i\beta} * G_i = U_{1\beta} * G_1 + U_{2\beta} * G_2 = \frac{\partial U_{1\beta}}{\partial x_1}; \quad u = \left( \frac{\partial U_{11}}{\partial x_1}, \frac{\partial U_{12}}{\partial x_1} \right)$$

Для случая, когда диполь действует вдоль оси  $Oy$  ( $Ox_2$ )



имеем

$$u_{\beta} = U_{i\beta} * G_i = U_{1\beta} * G_1 + U_{2\beta} * G_2 = \frac{\partial U_{2\beta}}{\partial x_2}; \quad u = \left( \frac{\partial U_{21}}{\partial x_2}, \frac{\partial U_{22}}{\partial x_2} \right)$$

Эта модель очага генерирует сферически – симметричную продольную волну.

*Центр вращения* – также сосредоточенная нагрузка с осевой симметрией:

$$G_i(x, y, t) = (-1)^j \frac{M}{2} \frac{\partial \delta(x - y, t)}{\partial x_j}, \quad j = \begin{cases} 1, & i = 2, \\ 2, & i = 1 \end{cases}$$

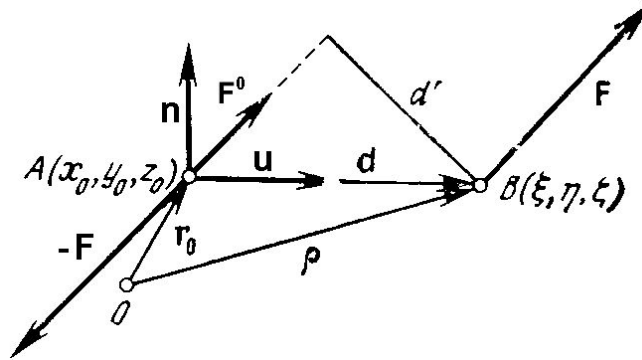


Рисунок 3.2

Для случая, когда пара сил параллельна оси  $Oy$  ( $Ox_2$ ) имеем

$$u_\beta = U_{i\beta} * G_i = U_{1\beta} * G_1 + U_{2\beta} * G_2 = \frac{\partial U_{2\beta}}{\partial x_1}; \quad u = \left( \frac{\partial U_{21}}{\partial x_1}, \frac{\partial U_{22}}{\partial x_1} \right)$$

В случае, когда пара сил параллельна оси  $Ox$  ( $Ox_1$ ) имеем

$$u_\beta = U_{i\beta} * G_i = U_{1\beta} * G_1 + U_{2\beta} * G_2 = \frac{\partial U_{1\beta}}{\partial x_2}; \quad u = \left( \frac{\partial U_{11}}{\partial x_2}, \frac{\partial U_{12}}{\partial x_2} \right)$$

Решения записаны с использованием свертки тензора Грина с соответствующей рассматриваемому источнику массовой силой (3.79).

### 3.4.2 Обобщенные решения уравнений движения при действии сейсмических источников

Рассматриваемая анизотропная модель среды по своим характеристикам наиболее близка к реальным средам, в частности, горным породам. Распространение волн в таких средах подчинено более сложным закономерностям,

чем в изотропной среде, а напряженно–деформированное состояние среды существенно зависит от степени ее анизотропии. Так, в средах с сильной анизотропией упругих свойств имеет место наличие лакун – подвижных невозмущенных областей, ограниченных волновыми фронтами и расширяющихся с течением времени, и фронт волны резко отличается от классического, имеет сложную негладкую форму. Факт существования лакун для гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами, к которым относятся уравнения движения анизотропной упругой среды, был обнаружен еще И.Г. Петровским [17]. Им даны необходимые и достаточные условия существования лакун–компонент дополнения к поверхности волнового фронта, в которых фундаментальные решения обращаются в нуль (сильные лакуны).

Исследования показывают, что степень анизотропии определяется (в плоском случае) значением величин

$$A_1 = (C_{11} - C_{66})(C_{22} - C_{66}) - (C_{12} + C_{66})^2,$$

$$A_2 = (C_{11} - C_{66})C_{22} - (C_{12} + C_{66})^2,$$

$$A_3 = (C_{22} - C_{66})C_{11} - (C_{12} + C_{66})^2$$

следующим образом:

если  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = A_3 > 0$  – изотропная среда, фронт волны от импульсного источника представляет собой концентрические окружности;

если  $A_1 < 0$ ,  $A_2, A_3 > 0$  – случай слабой анизотропии, фронты квапродольной и квазипоперечной волн имеют вид выпуклых замкнутых кривых, отличных от окружностей с центром в источнике.

При сильной анизотропии в среде возникают лакуны и фронт волны резко отличается от классического, имеет сложную негладкую форму, причем

если  $A_1 < 0$ ,  $A_2 < 0$ ,  $A_3 > 0$  – лакуны образуются на оси  $x_1$ ,

если  $A_1 < 0$ ,  $A_2 > 0$ ,  $A_3 < 0$  – лакуны образуются на оси  $x_2$ .

В этих случаях поле квазипродольной волны представляет собой трехсвязную область. Кроме того, лакуны могут располагаться при

$A_i < 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – на обеих осях одновременно,

$A_i > 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – между осями.

Это случаи пятисвязной области поля квазипродольных возмущений. Здесь представлены графики расчетов фундаментальных решений, соответствующих действию сосредоточенных сил, а также картины волновых фронтов для различных сред. Расчеты проведены для кристаллов алевролита ( $C_{11} = 6,75$ ,  $C_{12} = 1,6875$ ,  $C_{22} = 6,75$ ,  $C_{66} = 2,5312$ ), арагонита ( $C_{11} = 16$ ,  $C_{12} = 3,73$ ,  $C_{22} = 8,67$ ,  $C_{66} = 4,27$ ), цинка (Zn) ( $C_{11} = 4,219$ ,  $C_{12} = 0,59$ ,  $C_{22} = 1,645$ ,  $C_{66} = 1,0$ ), топаза ( $C_{11} = 28,2$ ,  $C_{12} = 13,1$ ,  $C_{22} = 34,9$ ,  $C_{66} = 12,6$ ) и калия–пентабората ( $C_{11} = 5,82$ ,  $C_{12} = 2,29$ ,  $C_{22} = 3,59$ ,  $C_{66} = 0,57$ ) ( $10^{10}$  н/м<sup>2</sup>):

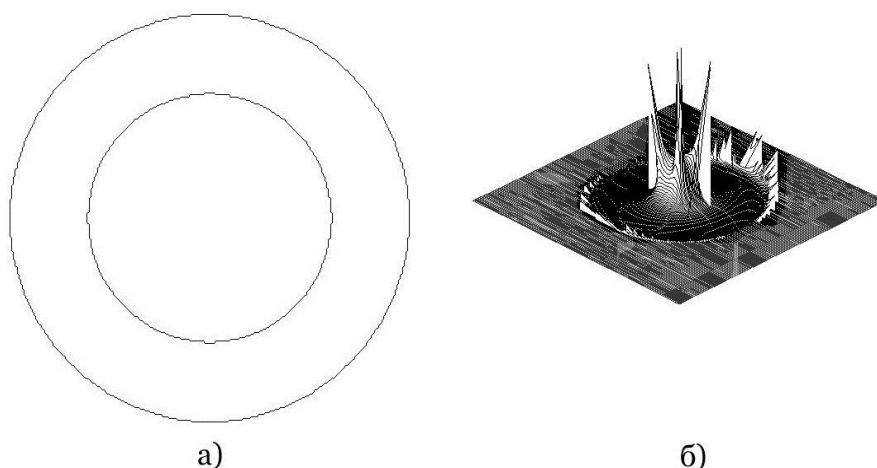
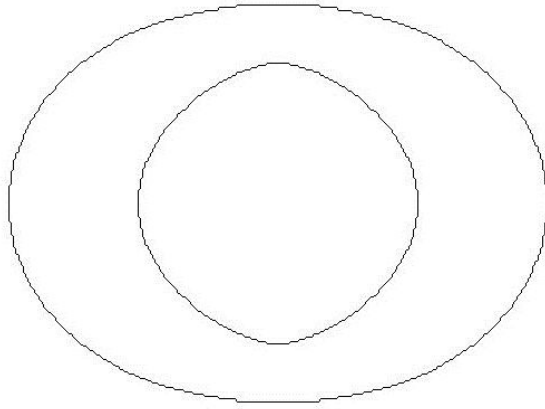
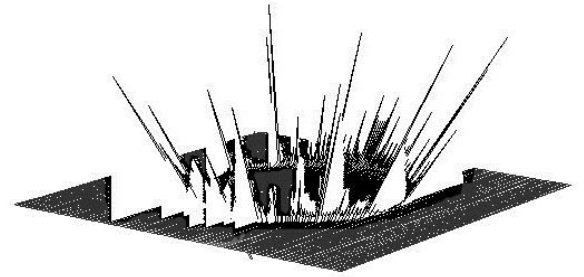


Рисунок 3.3 – Картина волновых фронтов (а) и амплитуды перемещений (б) для алевролита при действии сосредоточенной силы

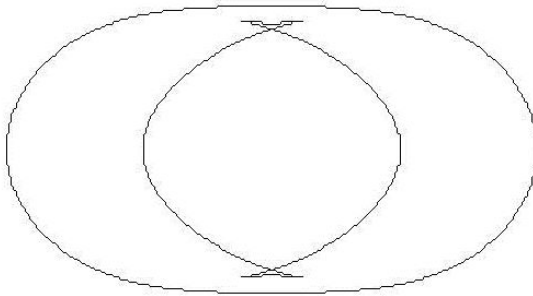


а)

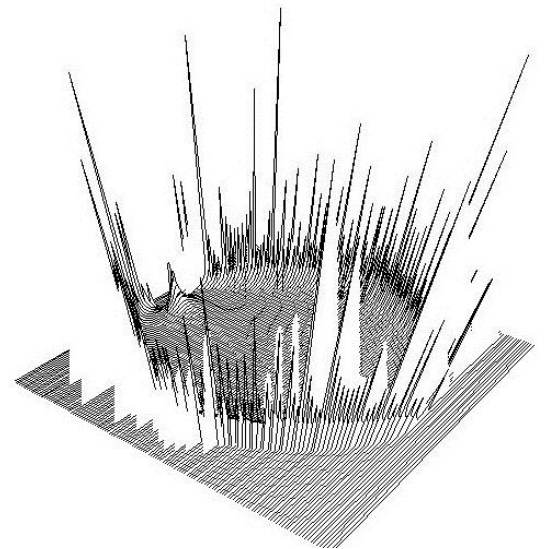


б)

Рисунок 3.4 – Картина волновых фронтов (а) и амплитуды перемещений (б) для арагонита при действии сосредоточенной силы



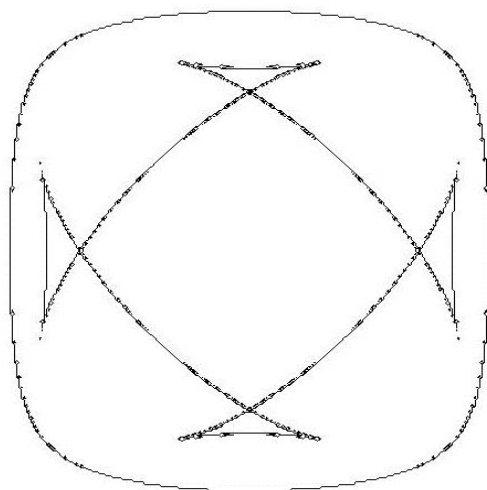
а)



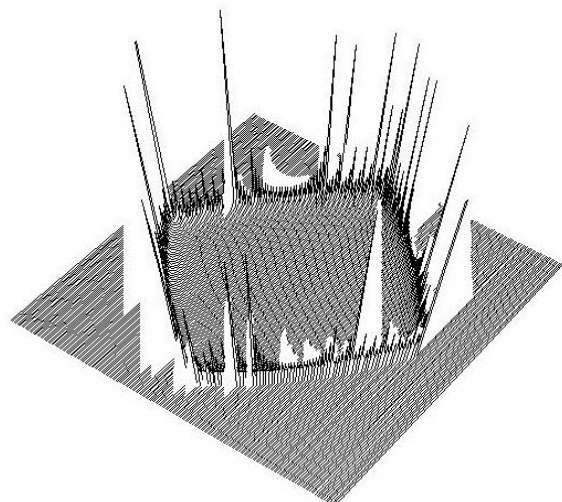
б)

Рисунок 3.5 – Картина волновых фронтов (а) и амплитуды перемещений (б) для Zn при действии сосредоточенной силы



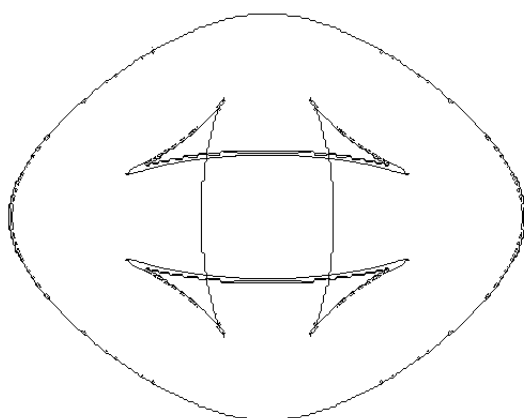


а)

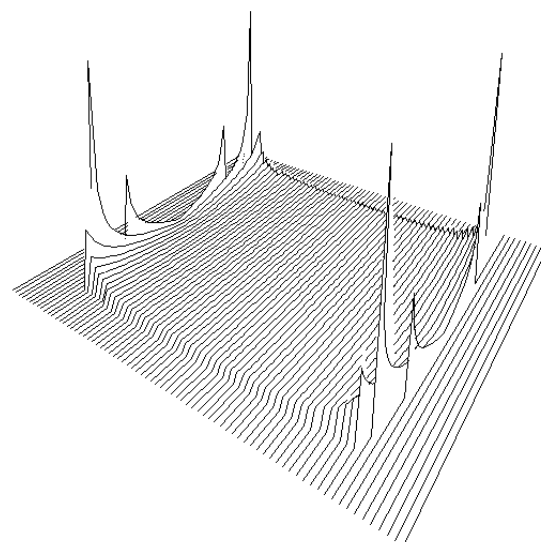


б)

Рисунок 3.6 – Картина волновых фронтов (а) и амплитуды перемещений (б) для топаза при действии сосредоточенной силы



а)



б)

Рисунок 3.7 – Картина волновых фронтов (а) и амплитуды перемещений (б) для калия – пентабората при действии сосредоточенной силы

Из рисунков видно, что в случае изотропной среды – алевролита фронт волны от импульсного источника представляет собой концентрические окружности (сферы), расширяющиеся с соответствующими скоростями распространения объемных и сдвиговых волн (рисунок 1.1). В средах со слабой анизотро-

пией упругих свойств (например, арагонита) картина распространения волн подобна картине распространения волн в изотропной среде, но фронты волн, представляющие замкнутые гладкие кривые, несколько отличаются от концентрических окружностей (рисунок 2.3). В средах с сильной анизотропией упругих свойств возникают лакуны. Координаты таких областей удовлетворяют условиям  $\text{Im}\zeta_q(x_1, x_2, t) = 0$ ,  $q = 1, 2$ . Это явление связано с волноводными свойствами сильно анизотропной среды, которые резко выражены в направлениях с преобладающей жесткостью и ослаблены в тех, где жесткость мала. Так, для ортотропных цинка, топаза и калия–пентабората, являющихся сильно анизотропными средами, имеет место наличие лакун (изображены треугольными областями). Расположение лакун различно: для цинка – на одной оси (поле квазипродольной волны представляет собой трехсвязную область) (рисунок 2.5), для топаза – на обеих осях ортотропии (рисунок 2.6), для калия–пентабората – между осями ортотропии (рисунок 2.7). Для этих сред область квазипродольной волны представляет собой пятисвязную область, ограниченную внешним фронтом и частями внутреннего фронта волны, соединяющими точки возврата между собой, и с узловыми точками. Эти участки внутреннего фронта волны, образующие замкнутые кусочно-гладкие линии, являются внутренними фронтами квазипродольной волны. Фронт квазипоперечной волны состоит из кусочно–гладких кривых.

Ниже приведены результаты расчетов напряженно-деформированного состояния в возмущенной зоне. На рисунках представлен характер распределения перемещений вдоль оси  $x_1$  для рассматриваемых сред в случаях действия сосредоточенной силы, диполя, сосредоточенного момента, плоского центра расширения, центра вращения.

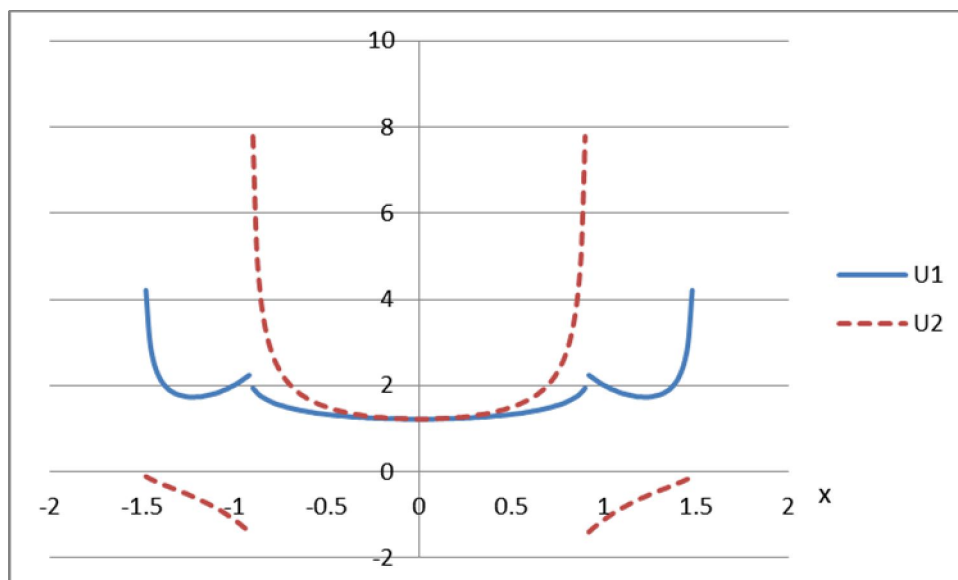


Рисунок 3.8 - Компоненты тензора Грина для алевролита при действии сосредоточенных сил и моментов при  $t = 1,5$

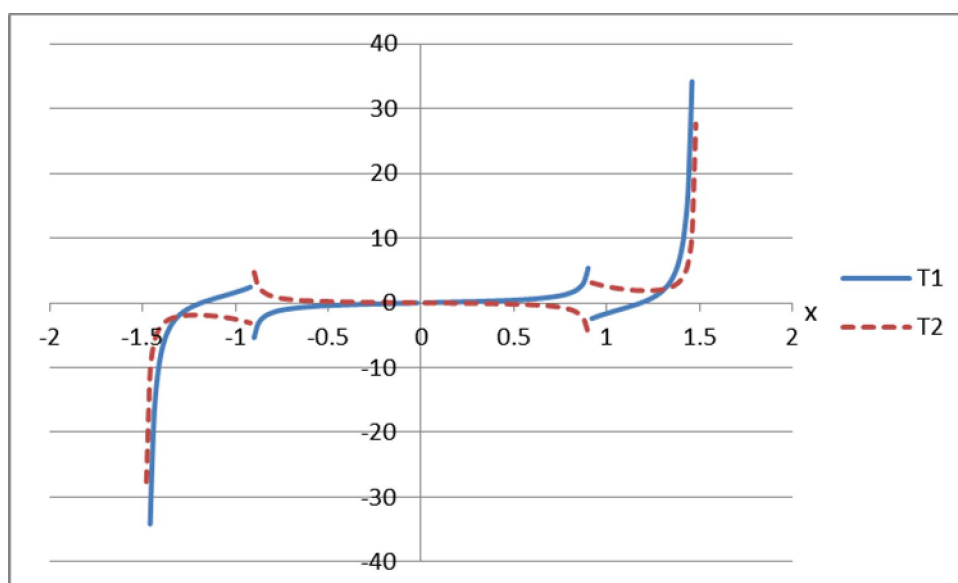


Рисунок 3.9 - Компоненты тензора фундаментальных напряжений для алевролита при действии сосредоточенных сил при  $t = 1,5$

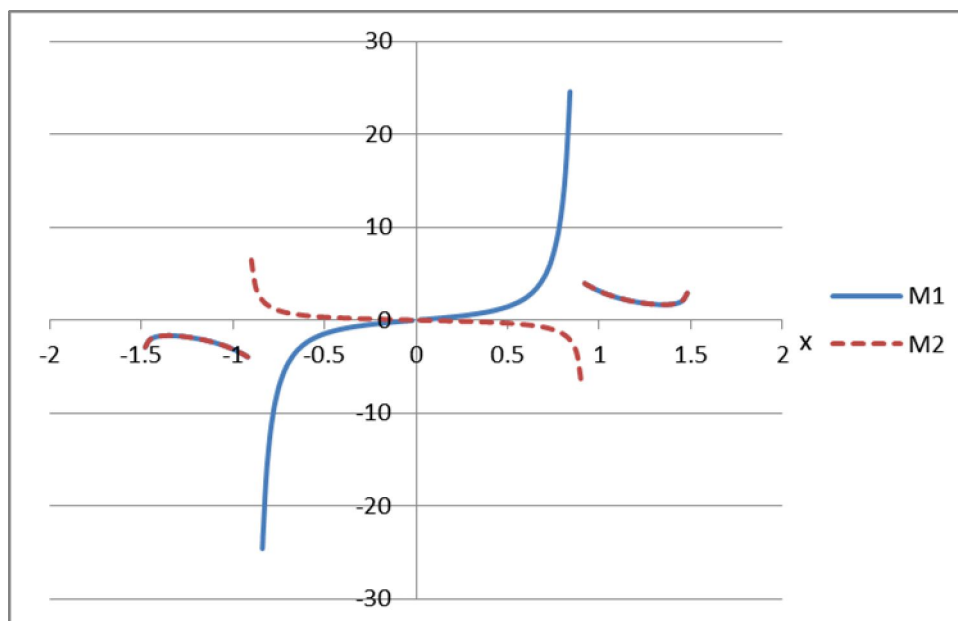


Рисунок 3.10 - Компоненты тензора Грина для алевролита при действии моментов при  $t=1,5$

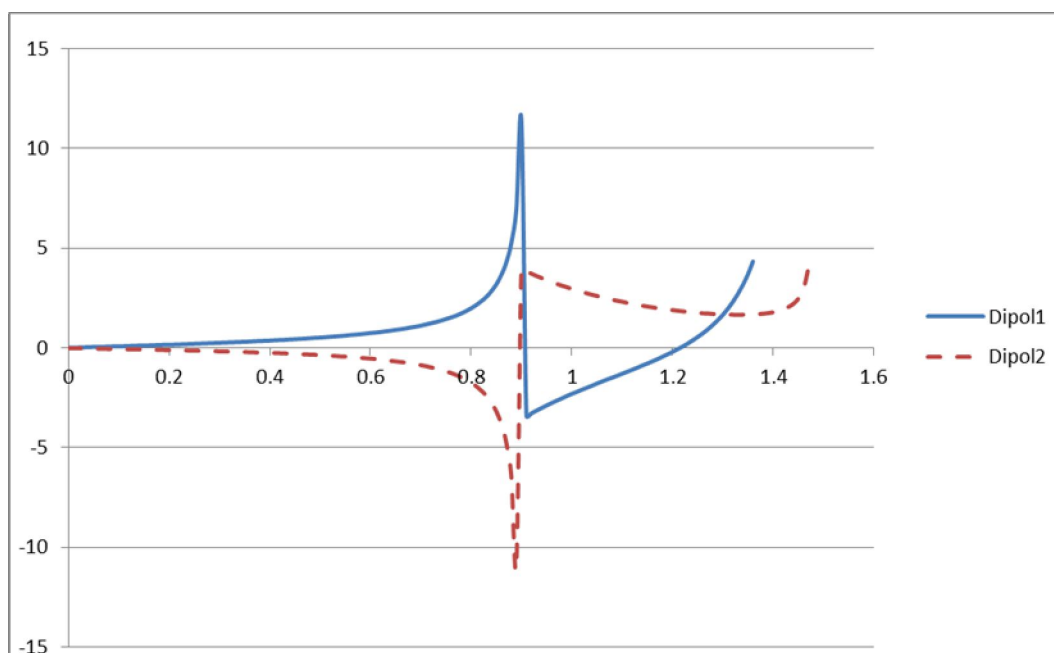


Рисунок 3.11 - Компоненты тензора Грина для алевролита при действии диполя  $t=1,5$

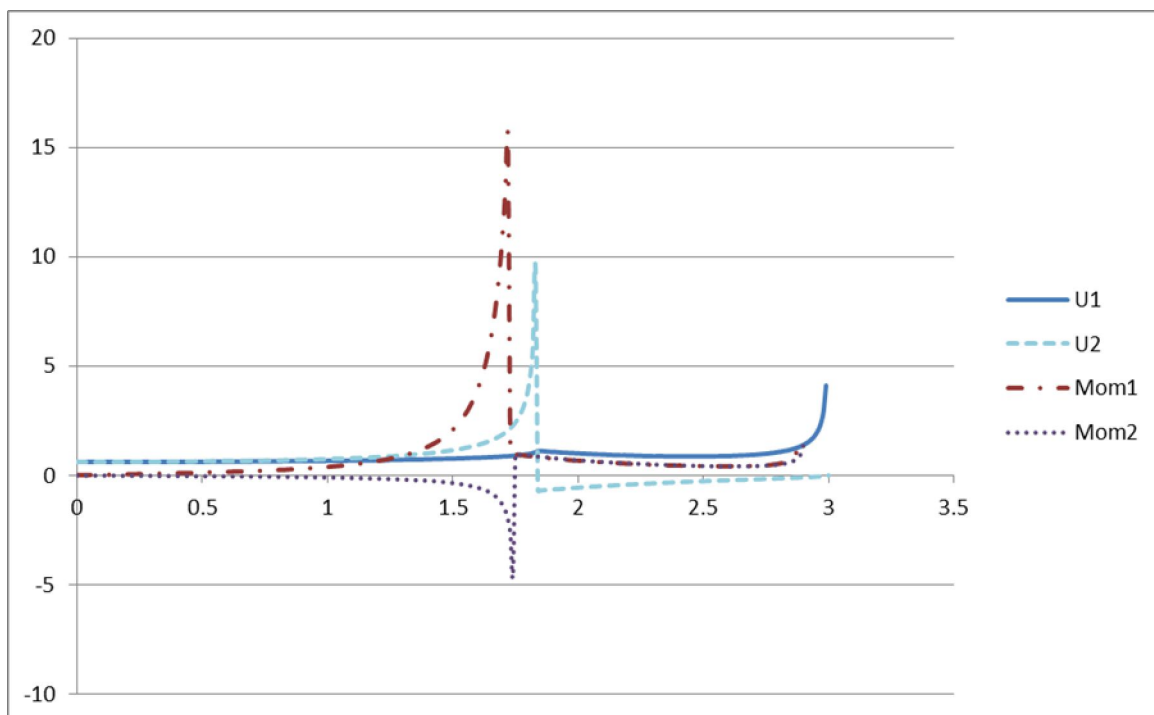


Рисунок 3.12- Компоненты тензора Грина для алевролита при действии сосредоточенных сил и моментов при  $t = 3$

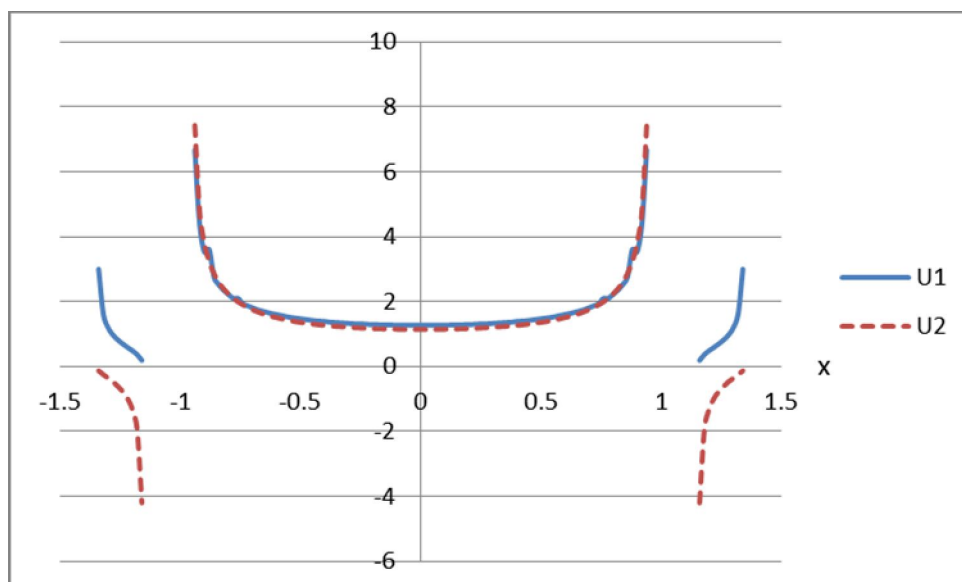


Рисунок 3.13 - Компоненты тензора Грина для топаза при действии сосредоточенных сил при  $t = 1,5$

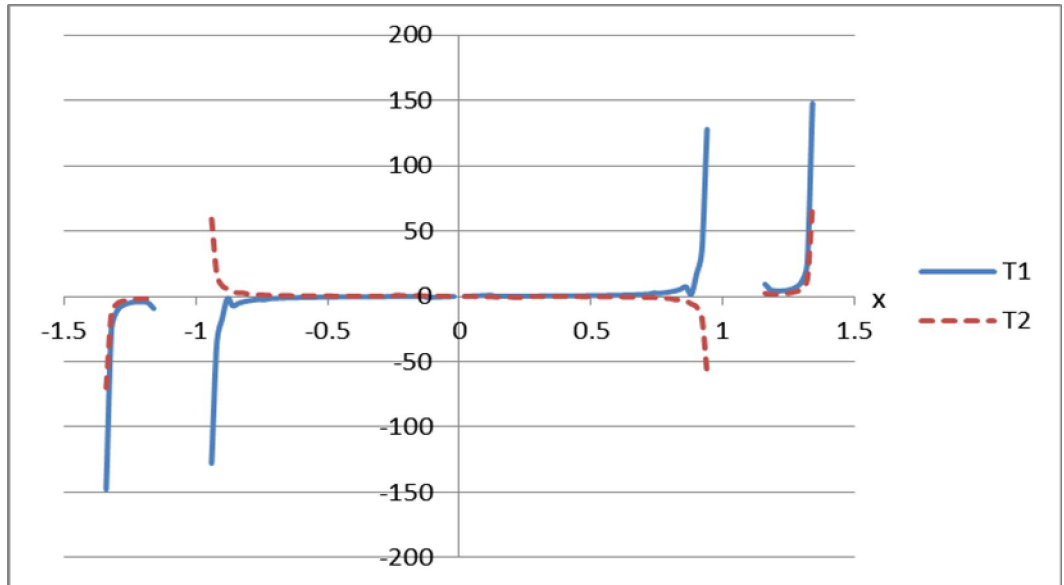


Рисунок 3.14 - Компоненты тензора фундаментальных напряжений для топаза при действии сосредоточенных сил при  $t = 1,5$

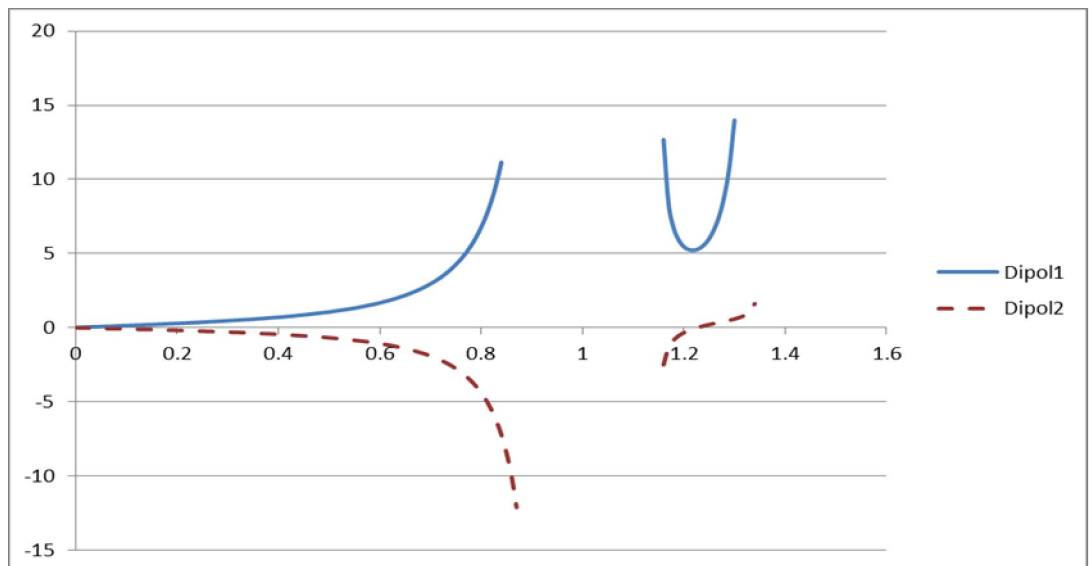


Рисунок 3.15 - Компоненты тензора Грина для топаза при действии диполя  $t = 1,5$

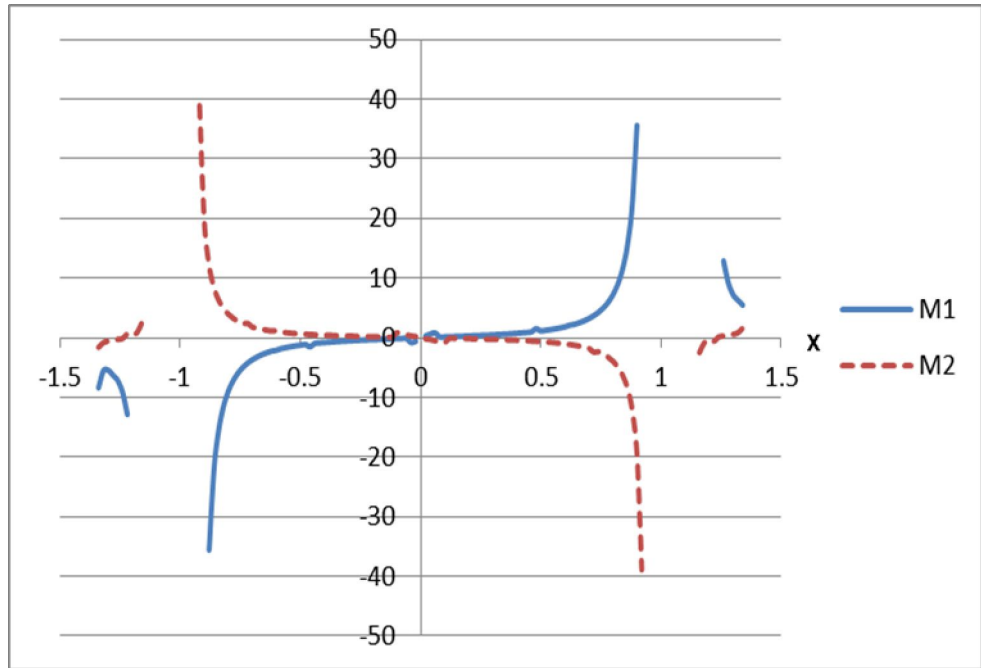


Рисунок 3.16 - Компоненты тензора Грина для топаза при действии моментов при  $t=1,5$

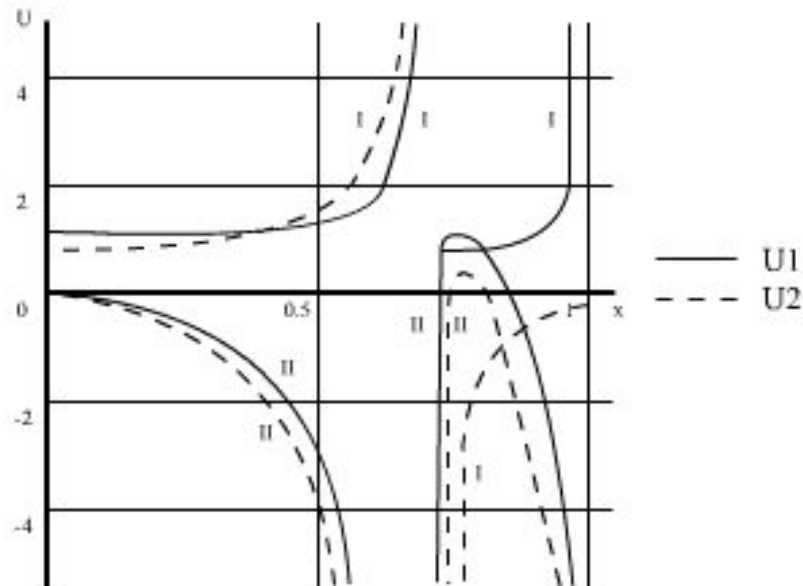


Рисунок 3.17 - Компоненты тензора Грина для топаза

На рисунке 2.17 представлен характер распределения перемещений топаза при действии сосредоточенной силы (I), диполя (II), плоского центра расширения (IV)

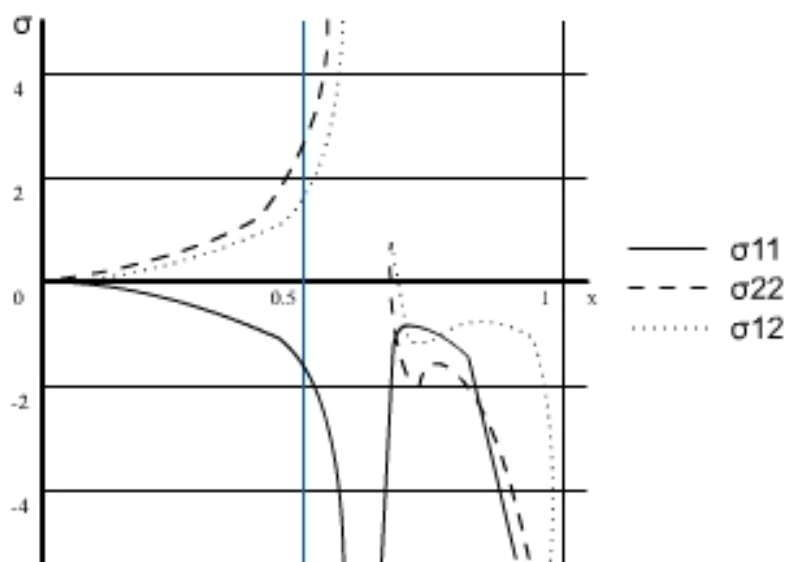


Рисунок 3.18 - Компоненты тензора Грина для топаза

На рисунке 3.18 представлен характер распределения компонент тензора напряжений для топаза при действии сосредоточенной силы.

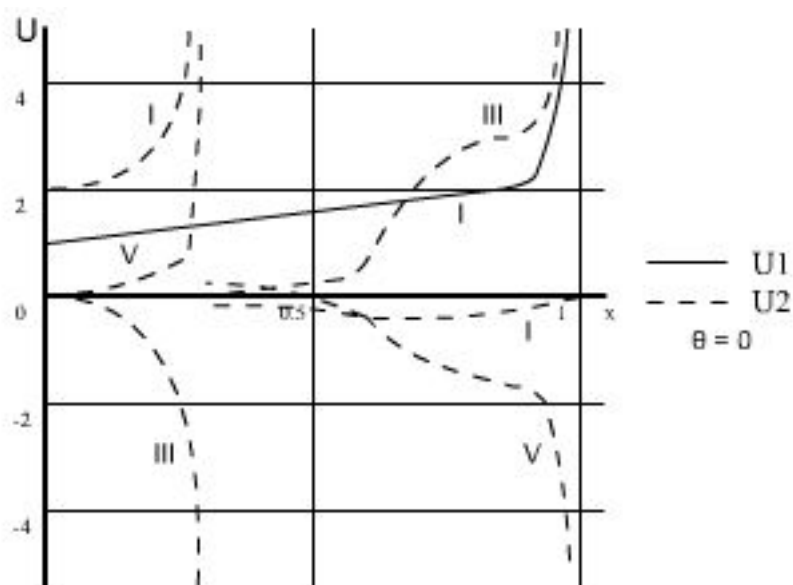




Рисунок 3.19 - Компоненты тензора Грина для калия пентабората

На рисунке 3.19 представлен характер распределения компонент тензора перемещений вдоль оси  $x_1$  (угол наклона  $\theta = 0$ ) для калия пентабората при действии сосредоточенной силы (I), сосредоточенного момента (III), центра вращения (V).

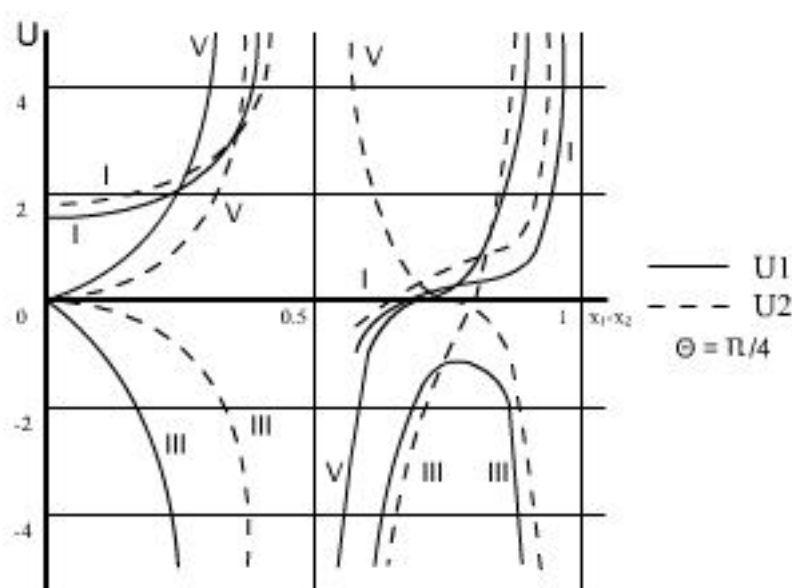


Рисунок 3.20 - Компоненты тензора Грина для калия пентабората

На рисунке 3.20 представлен характер распределения компонент тензора перемещений вдоль оси, расположенной под углом  $\theta = \pi / 4$  к оси  $x_1$  для калия пентабората при действии сосредоточенной силы (I), сосредоточенного момента (III), центра вращения (V).

В расчетах предполагалось:  $D = 1$ ,  $M = 1$ , в случае диполя  $e = (1,0)$ , для сосредоточенного момента  $G^0 = (1,0)$ ,  $e = (0,1)$ .

Результаты расчетов показывают, что, например, при действии сосредоточенной силы перемещения  $u_1$  терпят разрыв на фронтах квазипродольной волны,  $u_2$  - на фронтах квазипоперечной волны. Расчеты показывают, что в участках, соответствующих лакуне, перемещения отсутствуют.

### 3.5 Краткие выводы

В разделе исследуется влияние степени анизотропии среды на характер напряженно-деформированного состояния породного массива в окрестности сосредоточенных импульсных источников. Для этого на основе преобразования Фурье и Лапласа обобщенных функций построены тензора Грина для уравнений движения анизотропных сред (при плоской и пространственной деформации), тензора фундаментальных напряжений, и их первообразные по времени, исследованы их асимптотические свойства. Построены обобщенные решения уравнений движения анизотропной упругой среды при действии сейсмических источников.

На основе численных экспериментов для сред со слабой и сильной анизотропией упругих свойств показано, что в первом случае топологический тип волновых фронтов подобен расширяющимся сферам. Во втором случае появляются сложные волновые фронты и лакуны – подвижные невозмущенные области, ограниченные волновыми фронтами и расширяющиеся с течением времени. Это явление связано с волноводными свойствами сильно анизотропной среды, которые резко выражены в направлениях с преобладающей жесткостью и ослаблены в тех, где жесткость мала.

Разработана математическая модель динамики породного массива при действии источника возмущений вблизи его дневной поверхности с учетом его анизотропии в случае плоской деформации. Построены трансформанты тензора Грина первой и второй краевой задачи динамики для анизотропной полуплоскости.

## ГЛАВА 4 НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ УПРУГИХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

В данной главе рассмотрены нестационарные краевые задачи динамики упругих анизотропных сред. На основе метода обобщенных функций разработан метод граничных интегральных уравнений, который позволяет исходную дифференциальную начально-краевую задачу привести к решению системы сингулярных граничных интегральных уравнений для определения неизвестных граничных функций, что снижает размерность решаемых уравнений, требований на гладкость решений и повышает устойчивость численных процедур. Построены динамические аналоги формул Сомильяны и сингулярные граничные интегральные уравнения для решения ряда краевых задач.

### 4.1 Постановка начально-краевых задач. Условия на фронтах ударных волн

Пусть рассматриваемая среда занимает область  $S^- \in R^N$ , ограниченную гладкой замкнутой поверхностью  $S$  из класса поверхностей Ляпунова [Влад] с внешней нормалью  $n = (n_1, \dots, n_N)$  ( $\|n\| = 1$ ) к поверхности  $S$ :

$$\|n(x_2) - n(x_1)\| = O(\|x_2 - x_1\|), \quad x_1, x_2 \in S$$

Обозначим через  $D^- = S^- \times [0, \infty)$  – пространственно – временной цилиндр:  $(x, t) \in D^-$ ,  $D = S \times [0, \infty)$  – поверхность этого цилиндра,  $D_t^- = S^- \times [0, t]$ ,  $D_t = S \times [0, t]$ . Рассматриваются следующие краевые задачи.

*Начально-краевая задача I.* Найти решение системы уравнений движений (2.1), при заданных начальных перемещениях и скоростях:

$$u_i(x, 0) = u_i^0(x), \quad x \in S^- \cup S, \quad (4.1)$$

$$u_{i,t}(x,0)=u_i^1(x), \quad x \in S^-, \quad (4.2)$$

и заданных перемещениях на границе:

$$u_i(x,t)=u_i^S(x,t), \quad x \in S, \quad t \geq 0 \quad (4.3)$$

а также условиям на фронтах ударных волн (2.5) – (2.7).

*Начально-краевая задача* II. Найти решение системы уравнений движений (2.1), удовлетворяющее начальным условиям (4.1), (4.2) при заданных напряжениях на границе:

$$\sigma_i^l(x,t)n_l(x)=g_i(x,t), \quad x \in S, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1,N} \quad (4.4)$$

и условиям на фронтах (2.5) – (2.7).

**О п р е д е л е н и е.** Решение  $u(x,t)$  назовем классическим, если оно непрерывно для  $x \in (D^- \cup D)$ , дважды дифференцируемо почти всюду в области  $D^-$  и имеет ограниченное число волновых фронтов, на которых выполняются условия на скачки (2.5) – (2.7).

Предполагается, что начальные  $u_i^0(x)$  и граничные  $u_i^S(x,t)$  функции перемещений непрерывны, начальные скорости  $u_i^1(x)$  и граничные нагрузки  $g_i(x,t)$  – кусочно–непрерывные функции.

Для непрерывности и дифференцируемости решений необходимы условия согласования начальных и граничных данных:

$$u_i^S(x,0)=u_i^0(x), \quad u_{i,t}^S(x,0)=u_i^1(x), \quad x \in S \quad (4.5)$$

Первое условие необходимо для сохранения сплошности среды. В случае, когда внешние воздействия (силы) имеют ударный характер и описываются разрывными или сингулярными функциями, второе из условий (4.5) согласования по скоростям могут не выполняться, что типично для физических задач. На возникающих в таких случаях в среде волновых фронтах производные перемещений могут терпеть скачки.

## 4.2 Закон сохранения энергии и единственность решений

Введем следующие функции:

$$W(u, t) = 0,5 C_{ij}^{ml} u_{i,m} u_{j,l}, \quad K(u, t) = 0,5 \rho u_{i,t}^2$$

$$E(u, t) = K(u, t) + W(u, t), \quad L(u, t) = K(u, t) - W(u, t)$$

Функции  $W$ ,  $K$ ,  $E$  являются плотностями внутренней, кинетической и полной энергии системы соответственно,  $L$  – функция Лагранжа.

**Т е о р е м а 3.1.** Если  $u$  – классическое решение первой (второй) краевой задачи, то

$$\int_{D_i^-} L(u, t) dV(x, t) = \rho c \int_{S^-} (u_i^0(x) u_i^1(x) - u_i(x, t) u_{i,t}(x, t)) dV(x) - \\ - \int_0^t d\tau \int_S g_i(x, t) u_i^s(x, t) dS(x) - \int_{D_i^-} G_i(x, t) u_i(x, t) dV(x, t)$$

здесь и далее  $dV(x) = dx_1 \dots dx_N$ ,  $dV(x, t) = dV(x) dt$ ;  $dS(x)$ ,  $dS(x, t)$  – дифференциалы площади соответствующих поверхностей.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Умножая (2.1) на  $u_i$ , после простых преобразований получим выражение вида:

$$L(u, t) = \rho (u_i u_{i,t})_{,t} - (C_{ij}^{ml} u_{j,l} u_i)_{,m} - G_i u_i$$

Проинтегрируем это равенство по области  $D_i^-$  с учетом разрывов на фронтах, используя теорему Остроградского-Гаусса и начальные условия (4.1), (4.2):

$$\int_{D_i^-} L(u, t) dV(x, t) = \int_{D_i^-} \rho (u_i(x, t) u_{i,t}(x, t))_{,t} dV(x, t) - \\ - \int_{D_i^-} (C_{ij}^{ml} u_{j,l}(x, t) u_i(x, t))_{,m} dV(x, t) - \int_{D_i^-} G_i(x, t) u_i(x, t) dV(x, t) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{S^-} \rho \left( u_i(x,t) u_{i,t}(x,t) - u_i^0(x) u_i^1(x) \right) dV(x) - \\
&\quad - \int_0^t d\tau \int_S \sigma_i^m(x,\tau) n_m(x) u_i(x,\tau) dS(x) - \int_{D_t^-} G_i(x,\tau) u_i(x,\tau) dV(x,\tau) + \\
&\quad + \sum_k \int_{F_{t_k}} \left[ \rho u_i(x,t) u_{i,t}(x,t) n_t^k - C_{ij}^{ml} u_{j,l}(x,t) n_m^k(x) u_i(x,t) \right]_{F_{t_k}} dF_{t_k}(x,t)
\end{aligned}$$

Здесь  $n_m^k, n_t^k$  – компоненты вектора единичной нормали к  $k$ -му фронту  $F_{t_k}$  в  $R^{N+1}$ ,  $dF_{t_k}(x,t)$  – дифференциал площади поверхности в соответствующей точке  $k$ -го волнового фронта. В силу условий на фронтах (2.5), а также равенств

$$[ab] = a^+[b] + b^-[a], \quad [a^2] = (a^+ + a^-)[a], \quad (4.6)$$

последнее слагаемое равно нулю. С учетом граничных условий (4.3), (4.4) получим утверждение теоремы.

**Т е о р е м а 3.2.** Если  $u$  – классическое решение первой (второй) краевой задачи, то справедливо соотношение

$$\begin{aligned}
&\int_{S^-} (\mathbf{E}(u,t) - \mathbf{E}(u,0)) dV(x) = \\
&= \int_{D_t^-} G_i(x,t) u_{i,t}(x,t) dV(x,t) + \int_{D_t} g_i(x,t) u_{i,t}^s(x,t) dS(x,t)
\end{aligned}$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Заметим, что  $\mathbf{E}(u,t)$ , в силу (2.3), положительна для  $u \neq 0$ . Умножая (2.1) на  $u_{i,t}$ , после простых преобразований получим выражение вида:

$$\left(C_{ij}^{ml} u_{j,m} u_{i,t}\right)_l - \left(C_{ij}^{ml} u_{j,m} (u_{i,t})_l\right) - 0.5\rho(u_{i,t} u_{i,t})_{,t} + G_i u_{i,t} = 0 \quad (4.7)$$

Воспользуемся, в силу свойств симметрии (2.20), равенством

$$C_{ij}^{ml} u_{j,m} (u_{i,t})_l = 0.5\left(C_{ij}^{ml} u_{i,m} u_{j,l}\right)_t$$

В результате выражение (4.7) можно представить в виде

$$\left(C_{ij}^{ml} u_{j,m} u_{i,t}\right)_l - E_{,t} + G_i u_{i,t} = 0$$

Проинтегрируем полученное соотношение по области  $D^-$ , с учетом разбиения области интегрирования волновыми фронтами  $F_{t_k}$ . Используя теорему Остроградского – Гаусса в  $R^{N+1}$ , получим

$$\begin{aligned} & \int_{D_t^-} \left(C_{ij}^{ml} u_{j,m} (x,t) u_{i,t} (x,t)\right)_l dV(x,t) - \int_{D_t^-} E_{,t}(u,t) dV(x,t) + \\ & + \int_{D_t^-} G_i(x,\tau) u_{i,t}(x,\tau) dV(x,\tau) = \int_0^t d\tau \int_S \sigma_i^l(x,\tau) n_l(x) u_{i,t}(x,\tau) dS(x) - \\ & - \int_{S^-} (E(x,t) - E(x,0)) dV(x) + \int_{D_t^-} G_i(x,\tau) u_{i,t}(x,\tau) dV(x,\tau) + \\ & + \sum_k \int_{F_{t_k}} \left[ C_{ij}^{ml} u_{j,m} (x,\tau) u_{i,t}(x,\tau) n_l(x) - E(u,\tau) n_t \right]_{F_{t_k}} dF_{t_k}(x,\tau) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Рассмотрим выражение скачка в (4.8):

$$\left[ C_{ij}^{ml} u_{j,m} u_{i,t} n_l - E n_t \right]_{F_{t_k}} = \left[ \sigma_i^l n_l u_{i,t} - 0.5\left(\sigma_i^l u_{i,l} - \rho u_{i,t} u_{i,t}\right) n_t \right]_{F_{t_k}} =$$

$$= 0.5[u_{i,t}(\sigma_i^l n_l - \rho u_{i,t} n_t)] - 0.5[\sigma_i^l (u_{i,t} n_t - u_{i,t} n_l)]$$

В силу условий на скачки (2.6), (2.7), а также равенств (4.6), последний интеграл в (4.8) равен нулю.

Таким образом, получаем

$$\int_{S^-} (\mathbf{E}(x,t) - \mathbf{E}(x,0)) dV(x) = \int_{D_t^-} G_i(x,t) u_{i,t}(x,t) dV(x,t) + \int_0^t d\tau \int_S \sigma_i^l n_l u_{i,t} dS(x)$$

С учетом обозначений для граничных функций, отсюда получаем формулу теоремы.

**С л е д с т в и е 1.** Если  $u(x,t)$  – классическое решение (2.1), то на фронтах

$$[\mathbf{E}(x,t)]_{F_t} = c^{-1} [C_{ij}^{ml} u_{j,m} u_{i,t} n_l]_{F_t}$$

**С л е д с т в и е 2.** Если внешние воздействия на систему отсутствуют, т.е.  $G(x,t) = 0$ ,  $g(x,t) = 0$ , то полная энергия системы не меняется со временем:

$$\int_{S^-} \mathbf{E}(x,t) dV(x) = \int_{S^-} \mathbf{E}(x,0) dV(x)$$

Теорема 3.2 представляет собой закон сохранения энергии и используется для доказательства единственности решений начально-краевых задач.

**Т е о р е м а 3.3.** Если классическое решение первой (второй) краевой задачи существует то оно единственно.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В силу линейности задачи достаточно доказать единственность решения однородной краевой задачи. Если существуют два решения  $u_1, u_2$ , то разность этих решений  $u = u_2 - u_1$  удовлетворяет уравнению с однородной правой частью, т.е.  $G=0$ , нулевым начальным условиям

$$u_i^m(x) = 0 \quad (m = 0,1)$$



и однородным соответствующим граничным условиям

$$u_i(x, t) = 0 \text{ либо } g_i(x, t) = 0 \text{ для } x \in S$$

Из теоремы 3.2 нетрудно получить:

$$\int_{S^-} E(u, t) dV(x) = \int_{S^-} (K(u, t) + W(u, t)) dS(x) = 0$$

В силу положительной определенности подынтегрального выражения следует, что  $u \equiv 0$ . Теорема доказана.

#### 4.3 Динамический аналог формулы Сомильяны в пространстве обобщенных функций

Для функции перемещений  $u(x, t)$ , определенной в области  $D^-$ , введем обобщенную функцию  $\hat{u}(x, t)$

$$\hat{u}(x, t) = u(x, t) H_D^-(x, t), \quad (4.9)$$

определенную теперь на всем пространстве  $R^{N+1}$ . Аналогично введем

$$\hat{G}(x, t) = G(x, t) H_D^-(x, t) \quad (4.10)$$

где  $u(x, t)$  – классическое решение краевой задачи,  $H_D^-(x, t) = H_S^-(x)H(t)$  – характеристическая функция пространственно-временного цилиндра  $D^-(x, t)$ ,  $H_S^-(x)$  – характеристическая функция области  $S^-$  [ ],  $H(t)$  – функция Хевисайда:  $H(0) = 1/2$ .

Пусть матрица Грина  $U_j^k(x, t)$  – решение уравнений (2.1). Введем первообразную матрицы Грина по времени:

$$V_j^k(x, t) = U_j^k(x, t) *_t H(t) \Rightarrow \partial_t V_j^k(x, t) = U_j^k(x, t) \quad (4.11)$$

здесь символ " $\ast_t$ " означает неполную свертку функций по времени  $t$ , которая для регулярной функции имеет вид

$$f(x,t) \ast_t g(x,t) = H(t) \int_0^t f(x,t-\tau) g(x,\tau) d\tau$$

**Т е о р е м а 3.4.** Если классическое решение первой (второй) краевой задачи  $u(x,t)$  существует и единственно, то обобщенное решение  $\hat{u}(x,t)$  представимо в виде свертки:

$$\begin{aligned} \hat{u}_i(x,t) = & U_i^k(x,t) \ast_x 2\rho u_k^1(x) H_S^-(x) + \\ & + \rho \left( \partial_t U_j^k(x,t) \ast_x u_k^0(x) H_S^-(x) \right) + U_j^k(x,t) \ast g_k(x,t) \delta_S(x) H(t) + \\ & + C_{kj}^{ml} \partial_t V_j^k(x,t) \ast_x u_{j,t}(x,t) n_m(x) \delta_S(x) H(t) + C_{kj}^{ml} \partial_l V_j^k(x,t) \ast_x u_j^0(x) n_m(x) \delta_S(x) \end{aligned} \quad (4.12)$$

здесь  $\delta_S(x)$  – сингулярная обобщенная функция – простой слой на поверхности  $S$  [ ], соответственно  $g_i(x,t) \delta_S(x) H(t)$  – простой слой на боковой поверхности цилиндра  $D = S \times [0, \infty)$ ,  $\delta(t)$  – функция Дирака.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Действуя оператором  $L$  на  $\hat{u}(x,t)$ , используя правила дифференцирования обобщенных функций, с учетом равенств (2.произв. хар.ф. и ф.Хевисайда ) и условий на фронтах (2.5), (2.7), получим

$$\begin{aligned} L_{kj}(\partial_x, \partial_t) \hat{u}_j(x,t) = & - C_{kj}^{ml} \left( u_j(x,t) n_m(x) \delta_S(x) \right)_{,l} H(t) - \\ & - g_k(x,t) \delta_S(x) H(t) - \rho u_k^0(x) \dot{\delta}(t) H_S^-(x) - 2\rho u_k^1(x) H_S^-(x) \delta_S(x) = - \hat{G}_k(x,t) \end{aligned}$$

Свойство матрицы Грина позволяет построить обобщенное решение полученных уравнений в виде свертки

$$\hat{u}_j(x,t) = U_j^k \ast_x \hat{G}_k = U_j^k \ast_x 2\rho u_k^1(x) H_S^-(x) + \rho \left( \partial_t U_j^k \ast_x u_k^0(x) H_S^-(x) \right) + \quad (4.13)$$

$$+ U_j^k(x, t) * g_k(x, t) \delta_S(x) H(t) + U_j^k(x, t) * \left( C_{kj}^{ml} u_j(x, t) n_m(x) \delta_S(x) \right)_{,l} H(t)$$

переменная  $x$  под звездочкой соответствует свертке только по  $x$ . Последнюю свертку в (4.13) можно преобразовать, пользуясь обозначением (4.11) и правилами дифференцирования сверток и обобщенных функций:

$$\begin{aligned} & C_{kj}^{ml} \partial_t V_j^k(x, t) * \left( u_j(x, t) n_m(x) \delta_S(x) H(t) \right)_{,l} = \\ & = C_{kj}^{ml} \partial_l V_j^k(x, t) * \left( u_j(x, t) n_m(x) \delta_S(x) H(t) \right)_{,t} = \\ & = C_{kj}^{ml} \partial_l V_j^k(x, t) * \left( u_{j,t}(x, t) n_m(x) \delta_S(x) H(t) + u_j^0(x) n_m(x) \delta_S(x) \delta(t) \right) = \\ & = C_{kj}^{ml} \partial_l V_j^k(x, t) * u_{j,t}(x, t) n_m(x) \delta_S(x) H(t) + C_{kj}^{ml} \partial_l V_j^k(x, t) * u_j^0(x) n_m(x) \delta_S(x) \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в (4.14) получим формулу теоремы. В силу леммы дю Буа – Реймона [ ]  $\hat{u}(x, t)$  является классическим решением уравнений (2.1).

В (4.12) плотности простых и двойных слоев определяются заданными начальными условиями (4.1), (4.2) и граничными условиями (4.3), (4.4), часть из которых, в зависимости от решаемой краевой задачи, известна. Таким образом, полученная формула по известным начальным и граничным значениям восстанавливает решение в области, поэтому ее можно назвать *аналогом формулы Сомильяны* для решений уравнений (2.1). Она является обобщенным решением поставленных задач и может использоваться при произвольных силах  $G$ , в т.ч. и сингулярных, что характерно для физических задач.

Для записи этой формулы в интегральном виде и построении на ее основе граничных интегральных уравнений для решения начально-краевых задач используем свойства входящих в нее функциональных матриц, исследованные в главе 3, раздел 3.3.

#### 4.4 Динамический аналог формулы Гаусса.

Лемма 3.1 (аналог формулы Гаусса). Если  $S$  – произвольная замкнутая поверхность Ляпунова в  $R^N$ , то

$$\int_S T_i^{k(s)}(y-x, n(y)) dS(y) = \delta_k^i H_S^-(x) \quad (4.14)$$

при  $x \in S$  интеграл сингулярный, берется в смысле главного значения.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Свернем уравнение с  $H_S^-(x)$  и воспользуемся правилами дифференцирования свертки

$$\begin{aligned} C_{ij}^{ml} U_j^{k(s)} \cdot_l(x) * H_S^-(x) + \delta_i^k H_S^-(x) = \\ = \int_S T_k^{i(s)}(x-y, n(y)) dS(y) + \delta_i^k H_S^-(x) = 0 \end{aligned}$$

Используя (2.24), получим формулу леммы. В силу регулярности  $T_i^{k(s)}$  для  $x \notin S$  формула верна для таких  $x$ . Докажем справедливость этой формулы для граничных точек.

Пусть  $x \in S$ . Обозначим  $O_\varepsilon(x) = \{y \in S : \|y-x\| < \varepsilon\}$ ,  $S_\varepsilon(x) = S - O_\varepsilon(x)$ ,  $\Gamma_\varepsilon(x) = \{y : \|y-x\| = \varepsilon\}$ ,  $\Gamma_\varepsilon^-(x) = \Gamma_\varepsilon(x) \cap S^-$ ,  $\Gamma_\varepsilon^+(x) = \Gamma_\varepsilon(x) \cap S^+$ . Аналогично получим

$$\int_{S_\varepsilon} T_k^{i(s)}(x-y, n(y)) dS(y) + \int_{\Gamma_\varepsilon^-} T_k^{i(s)}(x-y, n(y)) dS(y) = 0$$

$$\int_{S_\varepsilon} T_k^{i(s)}(x-y, n(y)) dS(y) + \int_{\Gamma_\varepsilon^+} T_k^{i(s)}(x-y, n(y)) dS(y) = \delta_k^i$$

Поскольку в противоположных точках  $y^-$ ,  $y^+$  сферы  $\Gamma_\varepsilon(x)$  на  $\Gamma_\varepsilon^-(x)$  и  $\Gamma_\varepsilon^+(x)$  внешние нормали к соответствующему множеству совпадают:  $n(y^-) = (x-y^-)/\varepsilon = (y^+ - x)/\varepsilon = n(y^+)$ , а  $(y^+ - x) = -(x-y^-)$  и в силу асимпто-

тики  $T_i^{k(s)}$ , согласно теореме 3.6, суммируя эти два равенства и переходя к пределу по  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим равенство (4.14) для граничных точек. Лемма доказана.

В случае, когда  $N=1$  и  $L_{1j}(\partial_x, 0) = \partial_j \partial_j = \Delta$ , эта формула совпадает с формулой Гаусса для потенциала двойного слоя уравнения Лапласа [Влад].

#### 4.5 Граничные интегральные уравнения нестационарных краевых задач

Рассмотрим формулу (4.12) (теорема 3.1). Формально она может быть представлена в интегральном виде

$$\hat{u}_k(x, t) = \int_D \left( T_k^i(x-y, n(y), t-\tau) u_i(y, \tau) + U_k^i(x-y, t-\tau) g_i(y, \tau) dD(y, \tau) \right) + \\ + \int_{S^-} \left( U_{k,t}^i(x-y, t) u_i^0(y) + U_k^i(x-y, t) u_i^1(y) dS^-(y) \right)$$

При нулевых начальных условиях эта формула по виду совпадает с обобщением формулы Грина для эллиптических систем. Однако особенности матрицы Грина волновых уравнений не позволяют использовать ее для построения решений краевых задач, так как, из-за наличия сильных особенностей на фронтах у  $T_k^i$ , интегралы справа не существуют. Однако, введенные выше первообразные матрицы позволяют строить интегральные представления формулы (4.12).

**Т е о р е м а 3.5.** Если  $u(x, t)$  – классическое решение краевой задачи, то

$$\hat{u}_k(x, t) = U_k^i(x, t) * g_i(x, t) \delta_S(x) H(t) - \int_S dS(y) \int_0^t T_k^{i(s)}(x-y, n(y)) u_i(y, t) dS(y) - \\ - \int_S dS(y) \int_0^t W_k^{i(d)}(x-y, n(y), t-\tau) u_{i,t}(y, \tau) d\tau -$$

$$- \int_S W_k^{i(d)}(x-y, n(y), t) u_i^0(y) dS(y) + \left( U_k^i(x, t) *_{t} u_i^0(x) H_S^-(x) \right)_t$$

при  $x \in S$  интеграл сингулярный, берется в смысле главного значения.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Интегральное представление (4.12) для четных  $N$  имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{u}_k(x, t) = & \int_S dS(y) \int_0^t \left( U_k^i(x-y, t-\tau) g_i(y, \tau) - W_k^i(x-y, n(y), t-\tau) u_{i,t}(y, \tau) \right) d\tau - \\ & - \int_S W_k^i(x-y, n(y), t) u_i^0(y) dS(y) + \partial_t \int_{S^-} U_{k,t}^i(x-y, t) u_i^0(y) dS^-(y) + \\ & + \int_{S^-} U_k^i(x-y, t) u_i^1(y) dS^-(y) + \int_{D^-} U_k^i(x-y, t-\tau) G_i(y, \tau) dD^-(y, \tau) \end{aligned}$$

Здесь для внутренних точек среды все интегралы регулярные, а для граничных точек сингулярные.

**З а м е ч а н и е.** Если  $N$  – нечетное, то для интегралов, содержащих  $U$ , в силу сингулярности  $U$ , следует сохранить запись в виде свертки и брать ее по правилам свертки в зависимости от вида  $U$ . Для волнового уравнения нечетной размерности такие представления построены в [Ал МЖ].

При нулевых начальных данных, как легко видеть, три последних интеграла (свертки) равны нулю.

Если воспользоваться теоремой 3.6, второе слагаемое можно представить так

$$\begin{aligned} & \int_S dS(y) \int_0^t W_k^i(x-y, n(y), t-\tau) u_i(y, \tau) d\tau = \\ & = \int_S T_k^{i(s)}(x-y, n(y)) (u_i(y, t) - u_i^0(y)) dS(y) + \end{aligned}$$

$$+ \int_S dS(y) \int_0^t W_k^{i(d)}(x-y, n(y), t-\tau) u_{i,t}(y, \tau) d\tau$$

здесь первый интеграл сингулярный для  $x \in S$ , существует в смысле главного значения в силу леммы 3.1; второй - регулярный. Суммируя, для внутренних точек получим формулу теоремы.

Покажем, что равенство сохраняется и для граничных точек.

Пусть  $x^* \in S$ ,  $x \in S^-$  и  $x \rightarrow x^*$ . Тогда, в силу непрерывности сверток, содержащих  $U_k^i$  и  $W_k^{i(d)}$ , имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x^*} u_k(x, t) &= u_k(x^*, t) = \lim_{x \rightarrow x^*} \int_S T_k^{i(s)}(x-y, n(y)) u_i(y, t) dS(y) + \\ &+ \int_S W_k^{i(d)}(x^* - y, n(y), t) u_i^0(y) dS(y) - \\ &- \int_S dS(y) \int_0^t \left( U_k^i(x^* - y, t-\tau) g_i(y, \tau) + W_k^{i(d)}(x^* - y, n(y), t-\tau) u_{i,t}(y, \tau) \right) d\tau + \\ &+ \int_{S^-} U_k^i(x^* - y, t) u_i^1(y) dV(y) + \int_{S^-} \left( U_k^i(x^* - y, t) u_i^0(y) \right)_{,t} dV(y) + \\ &+ \int_{D^-} U_k^i(x^* - y, t-\tau) G_i(y, \tau) dV(y, \tau) \end{aligned}$$

С помощью леммы 3.1, предел справа можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \int_S T_k^{i(s)}(x^* - y, n(y)) \left( u_i(y, t) - u_i(x^*, t) \right) dS(y) + u_i(x^*, t) \delta_k^i = \\ = V.P. \int_S T_k^{i(s)}(x^* - y, n(y)) u_i(y, t) dS(y) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -u_i(x^*, t) V.P. \int_S T_k^{i(s)}(x^* - y, n(y)) dS(y) + u_i(x^*, t) \delta_k^i = \\
& = V.P. \int_S T_k^{i(s)}(x^* - y, n(y)) dS(y) + 0,5 u_i(x^*, t) \delta_k^i
\end{aligned}$$

Суммируя и приводя подобные члены, получим для граничных точек формулу теоремы. Теорема доказана.

Формула на границе дает граничные интегральные уравнения для решения начально-краевых задач. Сформулируем этот результат в виде теоремы.

**Теорема 3.8.** Классическое решение первой (второй) начально-краевой задачи для  $x \in S$ ,  $t > 0$  удовлетворяет сингулярным граничным интегральным уравнениям вида

$$\begin{aligned}
0.5 u_k(x, t) = & U_k^i(x, t) * G_i(x, t) + U_k^i(x, t) * g_i(x, t) \delta_s(x) H(t) - \\
& - V.P. \int_S T_k^{i(s)}(x - y, n) u_i(y, t) dS(y) - \int_S dS(y) \int_0^t W_k^{i(d)}(x - y, n, t - \tau) u_{i,t}(y, \tau) d\tau - \\
& - \int_S W_k^{i(d)}(x - y, n, t) u_i^0(y) dS(y) + \left( U_k^i(x, t) * u_i^0(x) H_S^-(x) \right)_t + U_k^i(x, t) * u_i^1(x) H_S^-(x)
\end{aligned}$$

Эти уравнения позволяют определить неизвестные граничные функции соответствующей начально-краевой задачи. После их определения формулы теоремы 3.7 определяют решение внутри области определения.

Вопрос разрешимости полученных СГИУ на определенном классе функций представляет собой самостоятельную задачу функционального анализа. Численное решение этих уравнений с использованием метода граничных элементов вполне реализуемо. С частными случаями решения таких СГИУ для нестационарных краевых задач теории упругости (соответствующие  $N = 2, 3$  можно познакомиться в работах [        ]).



#### **4.6 Краткие выводы**

В главе разработан метод обобщенных функций для решения краевых задач динамики анизотропных упругих и пьезоупругих сред при нестационарных воздействиях, а также в случае стационарных колебаний анизотропных упругих тел. Построены обобщенные решения уравнений движения таких сред в пространстве обобщенных функций, аналоги формул Сомильяны, Гаусса в пространстве обобщенных функций.

Построены сингулярные граничные интегральные уравнения для решения поставленных начально-краевых задач динамики анизотропных сред.

## ГЛАВА 5

### ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ

Среди динамических задач теории упругости особое место занимают задачи установившихся колебаний. При решении таких задач в зависимости от вида граничных условий и формы области может существовать дискретный спектр частот, при которых в телах сохраняются незатухающие колебания в отсутствие внешних сил (свободные колебания). При таких частотах даже при кратковременном действии возбуждающей силы той же частоты возникают большие деформации, что приводит к потере устойчивости и разрушению конструкции. Поэтому исследование таких задач имеет несомненный практический интерес.

Исследование стационарных задач для изотропных упругих сред с помощью метода потенциала и теории сингулярных интегральных уравнений изложено в работах В.Д. Купрадзе, Т.Г. Гегелия, М.О. Башелейшвили, Т.В. Бурчуладзе [1,2], В.З. Партоня, П.И. Перлина [3]. Применению метода разделения переменных и интегральных преобразований к решению стационарных задач посвящены исследования А.И. Гузя, В.Д. Кубенко, М.А. Черевко [4], Ж.С. Ержанова, Ш.М. Айтиалиева, Л.А.Алексеевой [5]. В анизотропных упругих средах наиболее исследованы процессы распространения стационарных волн в пространстве и полупространстве [6] и др.

Здесь рассмотрены стационарные краевые задачи для анизотропных упругих сред. Построены обобщения формул Сомильяны, Гаусса и сингулярные граничные интегральные уравнения (СГИУ) для решения краевых задач в анизотропных средах при стационарных колебаниях.

#### 5.1 Постановка задач стационарных колебаний.

Рассмотрим анизотропную упругую среду, занимающую область  $S^- \in R^N$  ( $N=2$  при плоской деформации,  $N=3$  соответствует пространственному случаю)

с границей  $S$  из класса поверхностей Ляпунова с непрерывной внешней нормалью  $n$ ,  $\|n\|=1$ . Перемещения упругой среды  $u = (u_1, \dots, u_N)$  для стационарных колебаний с частотой  $\omega$  можно записать в виде  $u_j(x, t) = u_j^*(x) \exp(-i\omega t)$ , где  $u_j^*(x)$  – комплексные амплитуды колебаний точек среды  $x = (x_1, \dots, x_N) \in S^-$ ,  $t$  – время. Для анизотропной упругой среды связь между тензорами напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}$  имеет вид

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{ml} \varepsilon_{ml}, \quad (5.1)$$

$$\varepsilon_{ij} = 0,5(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (5.2)$$

где  $C_{ij}^{ml}$  – матрица упругих констант, обладающая свойствами симметрии по отношению к перестановке индексов  $C_{ij}^{ml} = C_{ij}^{lm} = C_{ji}^{ml} = C_{ml}^{ij}$  и эллиптичности  $C_{ij}^{ml} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ml} \geq \alpha \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ml}$ ,  $\forall \varepsilon_{ij}$ ,  $\alpha > 0$  [7]. Здесь и ниже используются обозначения  $u_{i,j} = \partial_j u_i = \partial u_i / \partial x_j$ . С учетом соотношений (1) и (2) уравнения движения для анизотропной упругой среды для комплексных амплитуд приводятся к системе уравнений вида

$$L_{ij}(\partial_x, -i\omega) u_j(x) + G_i(x) = 0, \quad (5.3)$$

$$L_{ij}(\partial_x, -i\omega) = C_{ij}^{ml} \partial_m \partial_l + \delta_{ij} \rho \omega^2,$$

$$i, j, m, l = \overline{1, N},$$

где  $\rho$  – плотность среды,  $G_i$  – компоненты массовой силы,  $\delta_{ij}$  – символ Кронеккера. Здесь и всюду далее значок «\*» для комплексных амплитуд опущен, по одноименным индексам в произведении проводится суммирование в указанных выше пределах изменения индексов.

Требуется построить решения основных краевых задач теории упругости:

*Краевая задача I.* Найти решение (1), если известны перемещения на  $S$ :

$$u_i(x) = u_i^S(x), \quad x \in S$$

*Краевая задача II.* Найти решение (1), если известны напряжения на  $S$ :

$$\sigma_{ij}(x)n_j(x) = g_i(x), \quad x \in S$$

Граничные условия записаны для комплексных амплитуд. При постановке стационарных задач начальные условия не задаются. Для выделения единственного решения в случае неограниченной области  $S^-$  (внешняя задача) задаются условия типа условий излучения Зоммерфельда [8]. Предполагается, что  $u \in C^2(S^-) \cup C(S^- \cup S)$ ,  $G \in C(S^- \cup S)$ .

Будем называть такие решения *классическими*.

## 5.2 Стационарные аналоги формул Соммильяны в пространстве обобщенных функций

Обозначим через  $D'_N(R^N)$  – пространство обобщенных вектор-функций  $\hat{f}(x) = \{\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_N\}$  – линейных функционалов, определенных на  $D_N(R^N)$  – пространстве финитных бесконечно – дифференцируемых вектор – функций  $\varphi(x) = \{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ ,  $\varphi \in D_N(R^N)$  [8]. Введем определенные на всем пространстве  $R^N$  обобщенные функции  $\hat{u}_k(x) = H_S^-(x)u_k(x)$ ,  $\hat{G}_k(x) = H_S^-(x)G_k(x)$ , где  $H_S^-(x)$  – характеристическая функция множества  $S^-$  [9], обладающая свойством:  $\partial_j H_S^-(x) = -n_j(x)\delta_S(x)$  [8], где  $\delta_S(x)$  – простой слой на  $S$ . Если граница  $S$  – гладкая с непрерывной нормалью, то  $H_S^-(x) = 1/2$  для  $x \in S$ .

Обозначим через  $U_i^k$  матрицу Грина – решение системы уравнений (3), соответствующее действию сосредоточенной силы  $\hat{G}_i(x) = \delta_{ik}\delta(x)$ , где  $\delta(x)$  –

обобщенная дельта – функция, при фиксированном  $k$  имеет место  $(\delta_{ik} \delta(x), \varphi_i(x)) = \varphi_k(0)$ .

**Т е о р е м а 1.** Если при данном  $\omega$  классическое решение первой (второй) краевой задачи  $u(x)$  существует и единственно, то  $\hat{u}(x)$  представимо в виде свертки

$$\hat{u}_i(x) = -U_i^k * \hat{G}_k + U_i^k * g_k \delta_S(x) - C_{kj}^{ml} U_{i,l}^k * u_j n_m \delta_S(x) \quad (5.4)$$

и является обобщенным решением (1).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим (3) на  $D'_N(R^N)$ . Действуя оператором  $L_{ij}$  на  $\hat{u}(x)$  и используя правила дифференцирования обобщенных функций, получим

$$L_{kj} \hat{u}_j(x) = -\hat{G}_k(x) + g_k(x) \delta_S(x) - C_{kj}^{ml} (u_j^S(x) n_m(x) \delta_S(x))_{,l} = \hat{F}_k(x) \quad (5.5)$$

Построим обобщенное решение (3) в виде свертки

$$\hat{\omega}_i(x) = -U_i^k * G_k + U_i^k * g_k \delta_S(x) - C_{kj}^{ml} U_i^k * (u_j^S(x) n_m(x) \delta_S(x))_{,l} \quad (5.6)$$

Последнюю свертку можно преобразовать, пользуясь правилами дифференцирования сверток и обобщенных функций

$$C_{kj}^{ml} U_i^k * (u_j(x) n_m(x) \delta_S(x))_{,l} = C_{kj}^{ml} U_{i,l}^k * u_j(x) n_m(x) \delta_S(x)$$

Подставим это соотношение в (5.6). В результате получим правую часть (5.4). Покажем, что (5.6) является обобщенным решением (5.3). Действительно, если  $U_i^k(x)$  – фундаментальное решение (5.3), решение для произвольной  $\hat{F}_i$  может быть представлена в виде свертки:  $\hat{\omega}_j = U_j^k * \hat{F}_k$ . Подставив это в (5.3), получим

$$L_{ij} \hat{\omega}_j = L_{ij} (U_j^k * \hat{F}_k) \quad \left( \left( L_{ij} U_j^k \right) * \hat{F}_k \quad \delta_{ik} \hat{F}_k \quad \hat{F}_i \right)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} (\hat{\omega}_i, \varphi_i) &= (U_i^k * \hat{F}_k, \varphi_i) = (U_i^k * L_{kj} \hat{u}_j, \varphi_i) \\ &= (L_{kj} U_i^k * \hat{u}_j, \varphi_i) = (\delta_i^j \delta(x) * \hat{u}_j, \varphi_i) = (\hat{u}_i, \varphi_i) \quad \forall \varphi \in D_N(R^N) \end{aligned}$$

отсюда следует, что  $\hat{\omega} = \hat{u}$  и утверждение теоремы. В силу леммы дю Буа – Реймона [8]  $\omega$  является классическим решением (5.3).

Полученная формула по известным граничным значениям восстанавливает решение в области, поэтому ее можно назвать *аналогом формулы Сомильяны* для решений (5.3). Она является обобщенным решением поставленной задачи и может использоваться при  $\forall \hat{G}_i$  в том числе и сингулярных, что характерно для физических задач.

### 5.3 Граничные интегральные уравнения стационарных краевых задач при плоской деформации

*Матрицы фундаментальных напряжений и их свойства.* Введем матрицы  $S_{ik}^m(x)$ ,  $T_k^i(x, n)$ , компоненты которых определяются равенствами:  $S_{ij}^k(x) = C_{ij}^{ml} U_{m,l}^k$ ,  $\Gamma_i^k(x, n) = S_{ij}^k(x) n_j(x)$ ,  $T_k^i(x, n) = -\Gamma_i^k(x, n)$ . Отметим их некоторые свойства симметрии:

$$U_i^k(x) = U_i^k(-x), \quad U_i^k(x) = U_k^i(x), \quad S_{ik}^m(x) = -S_{ik}^m(-x),$$

$$T_i^k(x, n) = -T_i^k(-x, n) = -T_i^k(x, -n).$$

Легко видеть, что они являются следствием инвариантности уравнений (3) относительно преобразований симметрии  $y = -x$ .

**Т е о р е м а 2.** При фиксированных  $k$  и  $n$  матрица  $T_i^k(x, n)$  является фундаментальным решением системы (1), соответствующим сосредоточенным источникам мультипольного типа  $G_i(x) = n_m C_{il}^{km} \delta_{,l}(x)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Применим дифференциальный оператор  $L_{ij}$  к матрице  $T_i^k(x, n)$ , используя приведенные выше свойства:

$$\begin{aligned} L_{ij} T_j^k(x, n) &= -L_{ij} \Gamma_k^j(x, n) = -L_{ij} S_{km}^j(x) n_m(x) = -n_m(x) L_{ij} C_{sl}^{km} U_{s, \gamma l}^j(x) = \\ &= -n_m(x) C_{sl}^{km} L_{ij} U_{s, \gamma l}^j(x) = n_m(x) C_{il}^{km} \delta_{is} \delta_{,l}(x) = n_m(x) C_{il}^{km} \delta_{,l}(x). \end{aligned}$$

**Т е о р е м а 3** (аналог формулы Гаусса). Если  $S$  – произвольная замкнутая поверхность Ляпунова в  $R^N$ , то

$$V.p. \int_S T_i^k(x, y, n(y)) dS(y) = \rho \omega^2 \int_{S^-} U_k^i(x, y) dV(y) + \delta_{ki} H_S^-(x) \quad (5.7)$$

при  $x \in S$  интеграл сингулярный, берется в смысле главного значения.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Свернем уравнение (3) для  $U_i^k(x)$  при  $G_i(x) = \delta_{ik} \delta(x)$  с  $H_S^-(x)$  и воспользуемся правилами дифференцирования свертки:

$$\begin{aligned} L_{kj} U_j^i(x) * H_S^-(x) + \delta_{ki} H_S^-(x) &= \\ &= C_{km}^{jl} U_{j, \gamma l}^i(x) * \partial_m H_S^-(x) + \delta_{kj} \rho \omega^2 U_j^i(x) * H_S^-(x) + \delta_{ki} H_S^-(x) = \\ &= \int_S C_{km}^{jl} U_{j, \gamma l}^i(x, y) n_m dS(y) + \rho \omega^2 \int_{S^-} U_k^i(x, y) dV(y) + \delta_{ki} H_S^-(x) = \\ &= - \int_S T_i^k(x, y, n(y)) dS(y) + \rho \omega^2 \int_{S^-} U_k^i(x, y) dV(y) + \delta_{ki} H_S^-(x) = 0 \end{aligned}$$

В силу регулярности  $U_i^k(x)$ ,  $T_i^k(x, n)$  для  $x \notin S$  формула верна для таких  $x$ . Для граничных точек интеграл в (5.7) является сингулярным и берется в смысле главного значения. Доказательство справедливости формулы для граничных точек аналогично доказательству в [10].

Формула (4) может быть представлена в следующем интегральном виде

$$\begin{aligned} \hat{u}_i(x) = & \int_{S^-} U_i^k(y, x) \hat{G}_i(y) dV(y) + \\ & + \int_S U_i^k(y, x) g_k(y) dS(y) - \int_S T_i^k(y, x, n(y)) u_k(y) dS(y) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Для  $x \notin S$   $U_i^k(x)$ ,  $T_i^k(x, n)$  – регулярные функции. Для граничных точек имеют место следующие асимптотики [10]:

$$U_i^k(x) \sim \ln \|x\| A_{ik}^N(e_x), \quad T_i^k(x, n) \sim \|x\|^{-1} B_{ik}^N(e_x) \quad \text{при } N=2$$

$$U_i^k(x) \sim \|x\|^{-N+2} A_{ik}^N(e_x), \quad T_i^k(x, n) \sim \|x\|^{-N+1} B_{ik}^N(e_x) \quad \text{при } N>2$$

здесь  $e_x = x/\|x\|$ ,  $A_{ik}^N(e_x)$ ,  $B_{ik}^N(e_x)$  – непрерывные и ограниченные на сфере  $\|e\|=1$  функции. Поэтому последнее слагаемое в правой части (5.8) является сингулярным.

Соотношения (5.8) являются обобщением формулы Сомильяны для эллиптических систем. Они получены для обобщенных функций. Согласно лемме дю Буа – Реймона [8], в силу регулярности  $u$  и подынтегральных функций эти равенства справедливы и обычном смысле для  $x \notin S$ .

На границе полученные соотношения дают сингулярные граничные интегральные уравнения для решения краевых задач. Верна следующая теорема.

**Т е о р е м а 4.** Если  $u$  – классическое решение первой (второй) краевой задачи, то оно удовлетворяет СГИУ вида



$$H_S^- u_k(x) = \int_{S^-} U_k^i(y, x) G_i(y) dV(y) + \quad (5.9)$$

$$+ \int_S U_k^i(y, x) g_i(y) dS(y) - V.p. \int_S T_k^i(y, x, n(y)) u_i^s(y) dS(y)$$

Доказательство формулы (5.9) следует из (5.7) при  $x \rightarrow S$  с учетом теоремы 3. Вопросы разрешимости такого типа граничных интегральных уравнений достаточно хорошо исследованы. Численной реализации уравнений для решения стационарных задач для изотропной упругой среды, статических задач для анизотропной упругой среды посвящены работы [11, 12] и др.

#### 5.4 Стационарная дифракция волн сдвига в упругой анизотропной среде при антиплоской деформации

Задачи дифракции упругих волн на различного типа неоднородностях относятся к числу актуальных задач механики деформируемого тела. Рассмотрим распространение волны, заданной полем перемещений  $u^{(i)}(x, t)$  либо напряжений  $\sigma_{ml}^{(i)}(x, t)$ , в анизотропной упругой среде. Распространение нестационарных волн в такой среде описывается системой уравнений движения (2.42). В случае падающей волны поле разбивается на два: поле падающей волны и отраженное, поскольку взаимодействие волны с границей  $S$  области  $S^-$  вызывает возмущенное поле перемещений  $u^{(r)}(x, t)$  либо  $\sigma_{ml}^{(r)}(x, t)$ . Задача исследования дифракции упругой волны на границе  $S$  состоит в нахождении возмущенного поля по заданному полю падающей волны ( $u^{(i)}(x, t)$ ,  $\sigma_{ml}^{(i)}(x, t)$ ), граничным условиям на препятствии, начальным условиям. Сумма падающей и возмущенной полей есть суммарное (результатирующее) поле

$$u^{(t)}(x,t) = u^{(r)}(x,t) + u^{(i)}(x,t)$$

Обозначим поверхностные силы на границе  $S$ , порождаемые полями перемещений  $u^{(i)}(x,t)$  и  $u^{(t)}(x,t)$  соответственно через  $g^{(i)}(x,t)$  и  $g^{(t)}(x,t)$ .

Введем характеристическую функцию  $H_S^-(x)$  множества  $S^-$ , равную 1 для  $x \in S^-$ , равную  $1/2$  для  $x \in S$  и равную 0 для  $x \in R^N \setminus (S \cup S^-)$ . Функцию Хевисайда  $H(t)$  доопределим в нуле:  $H(0)=1/2$ . Соответственно для функции перемещения  $u(x,t)$  и  $G$ , определенных на  $D^-$ , введем обобщенные функции

$$\hat{u}(x,t) = H(t)H_S^-(x) u(x,t), \quad \hat{G}_k(x,t) = H(t)H_S^-(x) G_k(x,t)$$

определенные теперь на всем пространстве  $R^{N+1}$ . Сналогично всем пространстве тношением я системы (1)овых фронтов чением иперболических уравнений вида

Справедлива следующая

**Т е о р е м а 2.2.** *Если  $u(x,t)$  – классическое решение краевой задачи, то  $\hat{u}(x,t)$  представима в виде сверток*

$$\begin{aligned} \hat{u}_i(x,t) = & U_i^k(x,t) * \hat{G}_k(x,t) + U_i^k(x,t) * u_k^1(x)H_S^-(x) + \\ & + (U_{i,t}^k(x,t) * u_k^0 H_S^-(x) + U_i^k(x,t) * g_k(x,t)\delta_S(x)H(t) - \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$- C_{kj}^{ml} V_{i,l}^k(x,t) * \dot{u}_{j,t} n_m(x)\delta_S(x)H(t) - C_{kj}^{ml} V_{i,l}^k(x,t) * u_j^0(x)n_m(x)\delta_S(x)$$

здесь  $g_k(x,t)\delta_S(x)H(t)$  – сингулярная обобщенная функция – простой слой на цилиндре  $D$ , символ « $*$ » означает полную свертку по  $(x,t)$ , символ « $x$ » или « $t$ » под звездочкой соответствует свертке только по  $x$  или  $t$  соответственно,  $V_i^k(x,t) = U_i^k(x,t) * H(t)$ . Предполагается, что функция  $u(x,t)$  удовлетворяет начальным условиям:

$$u_i(x,0) = u_i^0(x), \quad x \in S^- \cup S, \quad u_{i,t}(x,0) = u_i^1(x), \quad x \in S^-$$

Поскольку отраженные препятствием волны возникают лишь с момента времени, когда падающая волна достигнет препятствия, начальные условия для потенциалов отраженных волн берутся нулевыми:

$$u^{(r)}|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}^{(r)}|_{t=0} = 0.$$

Исследование свойств функциональных матриц, входящих в соотношения (2.61) позволяет записать их в интегральном виде.

*Т е о р е м а 2.3. Если  $u$  – классическое решение краевой задачи, то*

$$\begin{aligned} \hat{u}_k(x,t) = & U_k^i(x,t) * \hat{G}_i(x,t) + U_k^i(x,t) * g_i(x,t) \delta_S(x) H(t) - \\ & - V.P. \int_S (T_k^{i(s)}(x-y, n(y)) \mu_i(y,t) dS(y) - \\ & - \int_0^t d\tau \int_S W_k^{i(d)}(x-y, n(y), t-\tau) u_{i,t}(y,\tau) dS(y) - \\ & - \int_S W_k^{i(d)}(x-y, n(y), t) u_i^0(y) dS(y) + (U_k^i(x,t) * u_i^0(y) H_S^-(x))_{,t} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Формула на границе дает граничные интегральные уравнения для решения краевых задач, которые в каждом конкретном случае можно решать численно.

Предположим, что граница области свободна от нагрузок, т.е. имеют место граничные условия

$$g^{(t)}(x,t) = 0 \quad \text{для } x \in S$$

Тогда для поля отраженной волны можем записать условия на границе

$$g^{(r)}(x,t) = -g^{(i)}(x,t) \quad \text{для } x \in S$$

Запишем интегральные уравнения для решения нестационарных краевых задач для поля отраженной волны с учетом однородных начальных условий

$$\begin{aligned} \hat{u}_k^{(t)}(x,t) - \hat{u}_k^{(i)}(x,t) &= U_k^i(x,t) * [g_i^{(i)}(x,t) - g_i^{(i)}(x,t)]\delta_S(x)H(t) - \\ & \text{V.P.} - V.P. \int_S (T_k^{i(s)}(x-y, n(y))) (u_i^{(r)}(y,t) - u_i^{(i)}(y,t)) dS(y) + \\ & \int_S dS(y) \int_0^t W_k^{i(d)}(x-y, n(y), t-\tau) [u_{i,t}^{(r)}(y,\tau) u_{i,t}^{(i)}(y,\tau)] d\tau \end{aligned} \quad (5.12)$$

Поскольку поле падающей волны определено в рассматриваемой области, учитывая противоположную ориентацию границы для  $S^-$  и  $S^+$ , можем записать

$$\begin{aligned} 0 &= U_k^i(x,t) * \hat{G}_i(x,t) - U_k^i(x,t) * g_i^{(i)}(x,t)\delta_S(x)H(t) + \\ & + V.P. \int_S (T_k^{i(s)}(x-y, n(y))) u_i^{(i)}(y,t) dS(y) + \\ & + \int_0^t d\tau \int_S W_k^{i(d)}(x-y, n(y), t-\tau) u_{i,t}^{(i)}(y,\tau) dS(y) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Из (2.60) и (2.61) получим следующее представление

$$\begin{aligned} \hat{u}_k^{(t)}(x,t) &= \hat{u}_k^{(i)}(x,t) + U_k^j(x,t) * \hat{G}_i(x,t) + U_k^j(x,t) * g_i^{(t)}(x,t)\delta_S(x)H(t) - \\ & - \text{V.P.} \int_S (T_k^{i(s)}(x-y, n(y))) u_i^{(t)}(y,t) dS(y) - \int_S dS(y) \int_0^t W_k^{i(d)}(x-y, n(y), t-\tau) u_{i,t}^{(t)}(y,\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.14)$$

Таким образом, справедлива следующая

**Т е о р е м а 2.3.** Для области  $S^-$  с границей из класса поверхностей Ляпунова с непрерывной внешней нормалью имеет место выражение

$$L_{ij}(\partial_x, \partial_t)(u_j^{(t)}(x, t) - u_j^{(i)}(x, t)) = 0$$

$$L_{ij}(\partial_x, \partial_t)u_j^{(i)}(x, t) = G_i(x, t)$$

где вектор – функции  $u(x, t)$ ,  $p(x, t)$ ,  $G(x, t)$  таковы, что имеют смысл свертки и интегралы в (2.64). Тогда справедлива формула (6.4)

**С л е д с т в и е 2.1.** Если массовые силы  $G(x, t)$  отсутствуют, то

$$\hat{u}_k^{(t)}(x, t) = \hat{u}_k^{(i)}(x, t) + U_k^i(x, t) * g_i^{(t)}(x, t)\delta_S(x)H(t) -$$

$$V.P.\int_S (T_k^{i(s)}(x-y, n(y))u_i^{(t)}(y, t)dS(y) - \int_0^t d\tau \int_S W_k^{i(d)}(x-y, n(y), t-\tau)u_{i,t}^{(t)}(y, \tau)dS(y))$$

## 5.5 Краткие выводы

В разделе разработан метод обобщенных функций для решения стационарных краевых задач для упругой анизотропной среды. Построены обобщенные решения стационарных краевых задач для упругой анизотропной среды и их интегральные представления.

Представлены стационарные аналоги формул Сомильяны, Гаусса в пространстве обобщенных функций и граничные интегральные уравнения стационарных краевых задач при плоской деформации. Рассмотрена дифракция волн сдвига в упругой анизотропной среде при антиплоской деформации.

## ГЛАВА 6 ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ СВЯЗАННЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ПЬЕЗОУПРУГИХ СРЕД

Здесь рассматриваются анизотропные пьезоэлектрические среды, характеризующиеся отсутствием центральной симметрии. В пространстве обобщенных функций записаны уравнения движения и их решения для рассматриваемых сред. Построен динамический аналог формулы Сомильяны для решения краевых задач в пьезоупругих средах, позволяющий по известным начальным и граничным значениям перемещений, поверхностных нагрузок, электрического потенциала, плотности потока заряда восстанавливать перемещения, напряжения и напряженность электрического поля в среде.

### 6.1 Уравнения движения пьезоупругих сред. Частные случаи пьезоупругих сред

Пьезоэлектрический эффект имеет место в анизотропных средах, не обладающих центром упругой симметрии, в этом случае пьезоэлектрические константы  $e_{lij} \neq 0$ . Поскольку в пьезоупругих средах упругое и электрическое поля связаны между собой, в общем случае такие среды описываются пьезоэлектрическим тензором, содержащим 45 констант ( $C_{ij}^{ml(E)} - 21$ ,  $e_{lij} - 18$ ,  $\kappa_{il} - 6$ ):

$$C_{ij}^{ml} := \begin{cases} C_{ij}^{ml(E)}, & i, j, m, l = \overline{1, N}, \\ e_{lij}, & i, j, l = \overline{1, N}, \quad m = M \\ e_{iml}, & j, m, l = N, \quad i = M \\ -\kappa_{il}, & j, m = N, \quad i, l = M \end{cases} \quad (6.1)$$

где  $C_{ij}^{ml(E)}$  – матрица упругих констант, измеренных при постоянном электрическом поле, удовлетворяющая условию

$$W(v) = \sum_{i,j,m,l}^N C_{ij}^{ml(E)} v_m^i v_l^j > 0 \quad \forall v,$$

$e_{lij}$  – пьезоэлектрические константы,  $\kappa_{il}$  – диэлектрические проницаемости, измеренные при постоянной деформации,  $N$  – размерность пространства ( $N = 2$  при плоской деформации,  $N = 3$  соответствует пространственному случаю),  $M = N + 1$ . Константы  $C_{ij}^{ml(E)}$ ,  $e_{lij}$ ,  $\kappa_{il}$  обладают следующими свойствами симметрии по отношению к перестановке индексов:

$$C_{ij}^{ml(E)} = C_{ij}^{lm(E)} = C_{ji}^{ml(E)} = C_{ml}^{ij(E)}, \quad e_{lij} = e_{lji}, \quad \kappa_{il} = \kappa_{li} \quad (6.2)$$

и имеют вид, например, для кристалла триклинной системы с кристаллической решеткой с наименьшей симметрией:

$$\left( \begin{array}{cccccc} C_{11}^{11(E)} & C_{11}^{22(E)} & C_{11}^{33(E)} & C_{11}^{23(E)} & C_{11}^{31(E)} & C_{11}^{12(E)} \\ & C_{22}^{22(E)} & C_{22}^{33(E)} & C_{22}^{23(E)} & C_{22}^{31(E)} & C_{22}^{12(E)} \\ & & C_{33}^{33(E)} & C_{33}^{23(E)} & C_{33}^{31(E)} & C_{33}^{12(E)} \\ & & & C_{23}^{23(E)} & C_{23}^{31(E)} & C_{23}^{12(E)} \\ & & & & C_{31}^{31(E)} & C_{31}^{12(E)} \\ & & & & & C_{31}^{12(E)} \end{array} \right),$$

$$\begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13} \\ & \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ & & \kappa_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_{111} & e_{211} & e_{311} \\ e_{122} & e_{222} & e_{322} \\ e_{133} & e_{233} & e_{333} \\ e_{123} & e_{223} & e_{323} \\ e_{131} & e_{231} & e_{331} \\ e_{112} & e_{212} & e_{312} \end{pmatrix} \quad (*)$$

Первые две матрицы в (\*) симметричные, поэтому члены ниже главной диагонали относительно ее симметричны. Для ромбической системы имеют место 9 коэффициентов  $C_{ij}^{ml(E)}$ , по 3 коэффициента  $e_{ij}$  и  $\kappa_{il}$ :

$$\begin{pmatrix} C_{11}^{11(E)} & C_{11}^{22(E)} & C_{11}^{33(E)} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22}^{22(E)} & C_{22}^{33(E)} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33}^{33(E)} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{23}^{23(E)} & 0 & 0 \\ & & & & C_{31}^{31(E)} & 0 \\ & & & & & C_{12}^{12(E)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ & \kappa_{22} & 0 \\ & & \kappa_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{123} & 0 & 0 \\ 0 & e_{231} & 0 \\ 0 & 0 & e_{312} \end{pmatrix}$$

В силу (2) имеем  $C_{ij}^{ml} = C_{lm}^{ji}$ .

В пьезоупругих средах упругое и электрическое поля связаны между собой и описываются линейными уравнениями состояния [3]:

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{ml(E)} u_{m,l} - e_{lij} E_l, \quad i, j, m, l = \overline{1, N} \quad (6.3)$$



$$D_j = e_{jml}u_{m,l} + \kappa_{jl}E_l, \quad j, m, l = \overline{1, N} \quad (6.4)$$

где  $u = (u_1, \dots, u_N)$  – перемещения упругой среды,  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений,  $D_i$  – компоненты вектора электрических смещений,  $E_l$  – компоненты вектора напряженности электрического поля,  $u_{i,j} = \partial_j u_i = \partial u_i / \partial x_j$ ,  $x = (x_1, \dots, x_N) \in R^N$ . Здесь и всюду по одноименным индексам в произведении проводится суммирование в указанных выше пределах изменения индексов.

Подставим соотношения (3), (4) в уравнения движения для электроупругой среды:

$$\sigma_{ij,j} + G_i = \rho u_{i,tt},$$

$$D_{j,j} = \rho_e$$

где  $\rho$  – плотность среды,  $G_i$  – компоненты массовой силы,  $u_{i,tt} = \partial^2 u_i / \partial t^2$ ,  $t$  – время,  $\rho_e$  – плотность электрического заряда. Учитывая, что пьезоэлектрики являются диэлектриками, которым свойственно отсутствие свободных электрических зарядов ( $\rho_e \equiv 0$ ), получим следующую систему уравнений динамики для пьезоупругих сред:

$$C_{ij}^{ml(E)} u_{m,lj} - e_{lij} \varphi_{,lj} = \rho u_{i,tt} - G_i \quad (6.5)$$

$$e_{jml} u_{m,lj} - \kappa_{jl} \varphi_{,lj} = 0, \quad E_m = -\varphi_{,m} \quad (6.6)$$

Таким образом, для исследования нестационарных процессов в пьезоупругих средах необходимо рассматривать систему уравнений смешанного типа: уравнения гиперболического типа (5), описывающие анизотропные упругие среды, и уравнение эллиптического типа (6) – уравнение электрического поля.

## 6.2 Обобщенные решения нестационарных краевых задач для пьезоупругих сред. Условия на волновых фронтах

Введем вектор  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{N+1})$ , объединяющий упругие перемещения и электрический потенциал:

$$\nu_j := \begin{cases} u_j, & j = \overline{1, N} \\ \varphi, & j = N + 1 \end{cases}, \quad (6.7)$$

матрицу напряжений  $T_{ij}$ , содержащую тензор напряжений Коши и электрический вектор перемещений, а также матрицу деформаций  $Z_{ml}$ , содержащую тензор упругих деформаций  $\varepsilon_{ml} = 0,5(u_{m,l} + u_{l,m})$  и вектор напряженности электрического поля:

$$T_{ij} := \begin{cases} \sigma_{ij}, & j = \overline{1, N} \\ D_i, & j = M \end{cases}, \quad Z_{ml} := \begin{cases} \varepsilon_{ml}, & m = \overline{1, N} \\ -E_l, & m = M \end{cases} \quad (6.8)$$

векторный поток  $p_i$ , объединяющий вектор нагрузки  $g_i = \sigma_{ij}n_j$  и плотность потока заряда  $q = D_jn_j$ , и вектор источников  $\tilde{G}_i$ , содержащий массовые силы

$$p_i := \begin{cases} g_i, & i = \overline{1, N} \\ q, & i = M \end{cases}, \quad \tilde{G}_i := \begin{cases} G_i, & i = \overline{1, N} \\ 0, & i = M \end{cases} \quad (6.9)$$

Аналог закона Гука (связь между  $\Sigma$  и  $Z$ ???) и соотношение для вектора потока запишем в виде:

$$T_{ij} = \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^N C_{ij}^{ml} Z_{ml}, \quad i = \overline{1, N+1}, \quad j = \overline{1, N} \quad (6.10)$$

$$p_i = \sum_{j=1}^N T_{ij} n_j \quad i = \overline{1, N+1} \quad (6.11)$$

Таким образом, с учетом введенных выше обобщений (6.1), (6.7) – (6.9), уравнения движения для пьезоупругой среды можно записать в следующем операторном виде:

$$L_{im}(\partial_x, \partial_t) v_m(x, t) + \tilde{G}_i(x, t) = 0 \quad (6.12)$$

$$L_{im}(\partial_x, \partial_t) = C_{ij}^{ml} \partial_j \partial_l - \rho \tilde{\delta}_{im} \partial_t^2, \quad i, m = \overline{1, N+1}, \quad j, l = \overline{1, N}$$

$$\tilde{\delta}_{im} := \begin{cases} \delta_{im}, & i, m = \overline{1, N} \\ 0, & i = m = N+1 \end{cases},$$

где  $\partial_x = (\partial_1, \dots, \partial_N)$ ,  $x \in S^- \subset R^N$ ,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Поскольку электрическое поле квазистатическое, система (6.12) гипербола – эллиптического типа. В силу положительной определенности  $W$  характеристическое уравнение системы (6.12) имеет действительные корни  $c$ , в общем случае зависящие от направления распространения волны [4].

Как известно [5], решения гиперболических уравнений могут иметь характеристические поверхности, на которых наблюдаются скачки производных. Для вывода условий на скачках удобно воспользоваться аппаратом теории обобщенных функций [6–8].

Обозначим через  $D'_M(R^{N+1})$  пространство обобщенных вектор – функций  $\hat{f}(x, t) = (\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_M)$ , определенных на пространстве  $D_M(R^{N+1})$  финитных бесконечно дифференцируемых вектор – функций  $\varphi(x, t) = (\varphi_1, \dots, \varphi_M)$ . Для регулярных  $\hat{f}$

$$\left(\hat{f}(x,t), \varphi(x,t)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{R^N} f_i(x,\tau) \varphi_i(x,\tau) dV(x), \quad i = \overline{1, M}, \quad dV = dx_1 \dots dx_N,$$

$$\forall \varphi \in \mathbf{D}_M(R^{N+1})$$

Пусть  $v(x,t)$  – решение (6.12), непрерывное, дважды дифференцируемое почти всюду, за исключением характеристической поверхности  $F$ , неподвижной в  $R^{N+1}$ , и подвижной в  $R^N$  (волновой фронт  $F_t$ ), на которой производные могут иметь скачки. Уравнение для такой поверхности  $F$  подобно характеристическому уравнению системы (6.12) и имеет вид:

$$\det \begin{pmatrix} C_{ij}^{ml} n_l n_j - \rho \delta_{ij} n_t^2 & -e_{ij} n_l n_j \\ e_{jml} n_l n_j & -\kappa_{jl} n_l n_j \end{pmatrix} = 0, \quad i, m = \overline{1, M}, \quad j, l = \overline{1, N}$$

Здесь  $(n, n_t)$  – вектор нормали к  $F$  в  $R^{N+1}$ ,  $n$  – единичный волновой вектор в  $R^N$ , направленный в сторону распространения  $F_t$ . Предполагается, что поверхность  $F$  кусочно – гладкая с непрерывной нормалью на ее гладкой части. Скорость движения поверхности  $F$  в пространстве

$$[f(x,t)]_{F_t} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (f(x + \varepsilon n, t) - f(x - \varepsilon n, t)),$$

как известно, равна

$$c = -n_{,t} / \|n\|_{R^N} \quad (6.13)$$

Решение  $v(x,t)$ , рассматриваемое как регулярная обобщенная функция, обозначим через  $\hat{v}(x,t) = v(x,t)$ . Аналогично  $\hat{G}(x,t) = \tilde{G}(x,t)$ .

Пусть  $\hat{v}(x, t)$  – решение (6.12) в пространстве  $D'_M(R^{N+1})$ . Такое решение будем называть *обобщенным решением* (6.12) или *решением в обобщенном смысле*. Обозначим  $[f]_{F_i}$  – скачок  $f$  на волновом фронте  $F_i$ :

$$[f(x, t)]_{F_i} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (f(x + \varepsilon n, t) - f(x - \varepsilon n, t))$$

**Т е о р е м а 1.** *Если  $v(x, t)$  удовлетворяет (6.12) почти всюду за исключением волновых фронтов, на которых выполняются условия на скачки*

$$[u_i(x, t)]_{F_i} = 0, \quad [\sigma_{ij} n_j + \rho c u_{i,t}]_{F_i} = [e_{ij} E_l n_j]_{F_i}, \quad (6.14)$$

$$[\varphi(x, t)]_{F_i} = 0, \quad [D_j]_{F_i} = 0 \quad (6.15)$$

то  $\hat{v}(x, t)$  является обобщенным решением (6.12).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** С учетом правил дифференцирования обобщенных функций, подставим обобщенные функции  $\tilde{G}_i$ ,  $\hat{v}_i(x, t)$  и их соответствующие производные в (6.12). В результате получим следующие выражения

$$\begin{aligned} L_{im}(\partial_x, \partial_t)\hat{v}_m(x, t) + \tilde{G}_i(x, t) &= C_{ij}^{ml} \partial_j \partial_l v_m + \tilde{G}_i - \rho \tilde{\delta}_{im} \ddot{v}_m + \\ &+ C_{ij}^{ml} ([v_m]_F v_l \delta_F(x, t))_{,j} - \rho ([v_m]_F v_t \delta_F(x, t))_{,t} + [\sigma_{ij} v_j - \rho v_{m,t} v_t]_F \delta_F(x, t), \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$i, m = \overline{1, M}, \quad j, l = \overline{1, N},$$

здесь  $\alpha(x, t)\delta_F(x, t)$  сингулярная обобщенная функция – простой слой на  $F$  с плотностью  $\alpha$ :

$$(\alpha(x, t)\delta_F(x, t), \varphi(x, t)) = \int_F \alpha_i(x, t)\varphi_i(x, t)dS(x, t), \quad \forall \varphi(x, t) \in D_M(R^{N+1}),$$

$(v, v_t) = (v_1, \dots, v_N, v_t)$  – единичный вектор, нормальный к характеристической поверхности  $F$ ;  $dS(x, t)$  – дифференциал площади поверхности в точке  $(x, t)$ .

Функция  $\hat{v}(x, t)$  будет удовлетворять уравнениям (6.12) в обобщенном смысле, если правая часть выражения (6.16) равна нулю. Естественное требование непрерывности решений при переходе через волновой фронт  $F$ , а также непрерывность электрического потенциала на фронте в силу отсутствия заряда в среде

$$[u_i(x, t)]_F = 0, \quad [\varphi(x, t)]_F = 0 \quad (6.17)$$

ввиду (6.12) обращают в нуль все слагаемые правой части (6.16), кроме последнего слагаемого. Следовательно, необходимо, чтобы

$$[\sigma_{ij} v_j - \rho v_{i,t} v_t]_F = 0 .$$

Запишем эти условия на соответствующем подвижном волновом фронте  $F_t$ . В силу (6.3), (6.4), (6.13) имеем

$$[C_{ij}^{ml(E)} u_{m,l} n_j + \rho c u_{i,t} - e_{lij} E_l n_j]_{F_t} = 0 , \quad (6.18)$$

$$[e_{jml} u_{m,l} - \kappa_{jl} \varphi_{,l}]_{F_t} = 0 \quad (6.19)$$

В силу (6.13) условия (6.18), (6.19) преобразуются к виду (6.14), где  $c$  – скорость фронта волны, и (6.15). Условие (6.14) – закон сохранения импульса на волновых фронтах [4]. Теорема доказана.

**Следствие.** *Справедливо равенство*

$$[n_l u_{i,t} + c u_{i,l}]_{F_t} = 0, \quad i = \overline{1, M}, \quad l = \overline{1, N}$$

Последнее равенство является условием непрерывности касательных производных перемещений на волновом фронте и является следствием первого условия (6.17).

**О п р е д е л е н и е.** Назовем  $v(x, t)$  – решение (12) для  $(x, t) \in R^{N+1}$  *классическим решением* (6.12), если функция  $v(x, t)$  непрерывна на  $R^{N+1}$ , дважды дифференцируема почти всюду на  $R^{N+1}$  и имеет ограниченное число волновых фронтов, на которых выполняются условия на скачки (6.14) – (6.15).

### 6.3 Динамический аналог формулы Сомильяны.

Рассмотрим анизотропную пьезоэлектрическую среду, занимающую область  $S^- \in R^N$  с границей  $S$  из класса поверхностей Ляпунова с непрерывной внешней нормалью  $n$ ,  $\|n\|=1$ ,  $(x, t) \in D^-$ ,  $D^- = S^- \times (0, \infty)$ ,  $D_t^- = S^- \times (0, t)$ ,  $t > 0$ ,  $D = S \times (0, \infty)$ ,  $D_t = S \times (0, t)$ . Обозначим:  
при  $t = 0$

$$u_i(x, 0) = u_i^0(x), \quad x \in S^- \cup S,$$

$$u_{i,t}(x, 0) = u_i^1(x), \quad x \in S^- \tag{6.20}$$

для  $x \in S$ ,  $t \geq 0$

$$u_i(x, t) = u_i^S(x, t), \quad \sigma_{ij}(x, t)n_j(x) = g_i(x, t), \tag{6.21}$$

$$D_j n_j = q^S(x, t), \quad \varphi(x, t) = \varphi^S(x, t)$$

Требуется по известным начальным и граничным значениям перемещений, поверхностных нагрузок, электрического потенциала, плотности потока заряда восстановить перемещения, напряжения и напряженность электрического поля в среде.

Введем определенные на всем пространстве  $R^N$  обобщенные функции

$$\hat{u}_k(x, t) = u_k(x, t)H_D^-(x, t), \quad \hat{\varphi}(x, t) = \varphi(x, t)H_D^-(x, t), \quad \hat{G}_k(x, t) = G_k(x)H_D^-(x, t)$$

где  $H_D^-(x, t) = H_S^-(x)H(t)$ ,  $H_S^-(x)$  – характеристическая функция области  $S^-$  [8]. Если граница области  $S$  – гладкая с непрерывной нормалью, то  $H_S^-(x) = 1/2$  для  $x \in S$ .  $H(t)$  – функция Хевисайда:  $H(0) = 1/2$ .

Обозначим через  $U_i^k(x, t)$  матрицу Грина – решение системы уравнений (6.12), соответствующее действию сосредоточенной силы  $\hat{G}_i(x, t) = \delta_{ik}\delta(x, t)$ , где  $\delta(x, t)$  – обобщенная дельта – функция, и удовлетворяющее условиям

$$U_i^k(x, 0) = 0, U_{i,t}^k(x, 0) = 0, x \neq 0$$

При фиксированном значении  $k$  имеет место

$$(\delta_{ik}\delta(x, t), \varphi_i(x, t)) = \varphi_k(0, 0) \quad \forall \varphi \in D'_M(R^{N+1})$$

Введем первообразную матрицы Грина по  $t$ :

$$V_i^k(x, t) = U_i^k(x, t) *_t H(t), \quad \partial_t V_i^k = U_i^k \quad (6.22)$$

Здесь символ " $*_t$ " означает неполную свертку по  $t$ , которая для регулярной функции имеет вид

$$f(x, t) *_t g(x, t) = H(t) \int_0^t f(x, t - \tau) g(x, \tau) d\tau$$

Первообразная матрицы Грина  $V_i^k(x, t)$  является решением (6.12) при  $\tilde{G}_i = \delta_{ik}\delta(x)H(t)$ .

**Т е о р е м а 5.1.** Если классическое решение краевой задачи  $v(x, t)$  существует и единственно, то обобщенное решение  $\hat{v}(x, t)$  представимо в виде свертки:

$$\hat{v}_i(x, t) = U_i^k *_t \tilde{G}_k + U_i^k *_x v_k^1(x) H_S^-(x) + \left( U_i^k *_x v_k^0(x) H_S^-(x) \right) *_t +$$



$$+ U_i^k * p_k \delta_S(x) H(t) + C_{kj}^{ml} V_i^k \text{,} \text{,} \text{,} * v_j \text{,} \text{,} \text{,} n_m \delta_S(x) H(t) + C_{kj}^{ml} V_i^k \text{,} \text{,} \text{,} * v_j^1(x) n_m \delta_S(x)$$

Здесь  $\delta_S(x)$  – сингулярная обобщенная функция – простой слой на  $S$  [5], соответственно  $p_k(x,t)\delta_S(x)H(t)$  – простой слой на  $D$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Действуя оператором  $L_{kj}$  на  $\hat{v}(x,t)$ , используя правила дифференцирования обобщенных функций, с учетом равенств [4]:

$$\partial_j H_D^-(x,t) = -n_j \delta_S(x) H(t), \quad \partial_t H_D^-(x,t) = \delta(t) H_S^-(x)$$

и условий на фронтах (6.14) – (6.15), получим

$$\begin{aligned} L_{kj}(\partial_x, \partial_t) \hat{v}_j(x,t) &= -\hat{G}_k(x,t) - \rho v_k^1(x) H_S^-(x) - \rho v_k^0(x) H_S^-(x) - \\ &- p_k(x,t) \delta_S(x) H(t) - C_{kj}^{ml} \partial_l (v_j(x,t) n_m \delta_S(x) H(t)) = \hat{F}_k(x,t) \end{aligned} \quad (6.23)$$

Свойство матрицы Грина, позволяет построить обобщенное решение (6.12) в виде свертки

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_i(x,t) &= U_i^k * \tilde{G}_k + U_i^k * v_k^1(x) H_S^-(x) + \left( U_i^k * v_k^0(x) H_S^-(x) \right)_{,t} + \\ &+ U_i^k * p_k \delta_S(x) H(t) + C_{kj}^{ml} U_i^k * \left( v_j^s n_m \delta_S(x) H(t) \right)_{,l} \end{aligned} \quad (6.24)$$

где "\*" обозначает полную свертку по  $(x,t)$ :

$$f(x,t) * g(x,t) = H(t) \int_0^t d\tau \int_{R^N} f(x-y, \tau) g(y, t-\tau) dV(y)$$

переменная  $x$  под звездочкой соответствует свертке только по  $x$ . Последнюю свертку в (6.24) можно преобразовать, пользуясь правилами дифференцирования сверток и обобщенных функций

$$C_{kj}^{ml} \partial_t V_i^k * \left( v_j n_m \delta_S(x) H(t) \right)_{,l} = C_{kj}^{ml} V_i^k \text{,} \text{,} \text{,} * \left( v_j n_m \delta_S(x) H(t) \right)_{,l} =$$

$$\begin{aligned}
&= C_{kj}^{ml} V_{i \rightarrow l}^k * (v_{j \rightarrow t} n_m \delta_S(x) H(t) + v_j^0(x) n_m \delta_S(x) \delta(t)) = \\
&= C_{kj}^{ml} V_{i \rightarrow l}^k * v_{j \rightarrow t} n_m \delta_S(x) H(t) + C_{kj}^{ml} V_{i \rightarrow l}^k * v_j^0(x) n_m \delta_S(x)
\end{aligned}$$

Подставим это соотношение в (6.24). В результате получим правую часть (6.23). Покажем, что (6.24) является обобщенным решением (6.12). Действительно, если  $U_i^k(x)$  – фундаментальное решение (6.12), решение для произвольной  $\hat{F}_i$  может быть представлено в виде свертки:

$$\hat{\omega}_j = -U_j^k * \hat{F}_k$$

Подставив это в (6.12), получим

$$L_{ij} \hat{\omega}_j = L_{ij} (-U_j^k * \hat{F}_k) = -(L_{ij} U_j^k) * \hat{F}_k = \delta_{ik} \hat{F}_k = \hat{F}_i$$

Поскольку для  $\forall \varphi \in D_M(R^{N+1})$

$$\begin{aligned}
(\hat{\omega}_i, \varphi_i) &= (-U_i^k * \hat{F}_k, \varphi_i) = (-U_i^k * L_{kj} \hat{v}_j, \varphi_i) = \\
&= (-L_{kj} U_i^k * \hat{v}_j, \varphi_i) = (\delta_{ij} \delta(x, t) * \hat{v}_j, \varphi_i) = (\hat{v}_i, \varphi_i)
\end{aligned}$$

отсюда следует, что  $\hat{\omega} = \hat{v}$  и утверждение теоремы. В силу леммы дю Буа – Реймона [5]  $\omega_i$  является классическим решением (6.12).

Полученная формула по известным начальным (6.20) и граничным (6.21) значениям восстанавливает решение в области, поэтому ее можно назвать *аналогом формулы Сомильяны* для решений (6.12). Она является обобщенным решением поставленных задач и может использоваться при  $\forall \hat{G}_i$  в том числе и сингулярных, что характерно для физических задач.

#### **6.4 Краткие выводы**

Разработан метод обобщенных функций для решения краевых задач динамики пьезоупругих сред при нестационарных воздействиях. Построены обобщенные решения уравнений движения таких сред в пространстве обобщенных функций, аналоги формул Сомильяны, Гаусса в пространстве обобщенных функций.

## ГЛАВА 7

### ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ СВЯЗАННЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЫ М.БИО

Исследование движения транспорта в тоннелях, транспортируемых грузов и жидкостей в трубопроводах приводит к модельным задачам о действии подвижных нагрузок в цилиндрических полостях, расположенных в сплошной среде. При этом скорость их движения существенно влияет на тип дифференциальных уравнений, параметрически зависящих от отношения скорости движения к скоростям распространения возмущений в среде.

В разделе рассматривается однородная изотропная двухкомпонентная среда М. Био в случае бегущих нагрузок, движущихся с постоянной скоростью вдоль оси. Получены условия на фронтах в пространстве подвижных координат. Построены фундаментальные решения уравнений динамики анизотропных сред в классе бегущих решений во всем диапазоне скоростей, для чего используется интегральное преобразование Фурье.

#### 7.1 Уравнения движения среды Био. Определяющие соотношения

Рассматривается однородная изотропная двухкомпонентная среда М. Био, уравнения движения которой в случае отсутствия вязкости жидкости описываются следующей системой гиперболических уравнений второго порядка в  $N+1$ - мерном пространстве [72,73]: [35,36]:

$$\begin{aligned}
 (\lambda + \mu)u_{j,ji}^s + \mu u_{i,ji}^s + Qu_{j,ji}^f + G_i^s &= \rho_{11}u_i^s + \rho_{12}\dot{u}_i^f \\
 Qu_{j,ji}^s + Ru_{j,ji}^f + G_i^f &= \rho_{12}u_i^s + \rho_{22}\dot{u}_i^f, \quad (x,t) \in R^3 \times [0,\infty)
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

где  $u_i^s(x,t)$  – компоненты вектора перемещений упругого скелета в точке  $x \in R^3$  в момент времени  $t$ ,  $u_i^f(x,t)$  – компоненты вектора перемещений

жидкости,  $G_i^s, G_i^f$  – объемные силы, действующие соответственно на твердую и жидкую компоненты. Константы среды Био  $\lambda, \mu, Q, R$  имеют размерность напряжений, физико–механические константы  $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{22}$  имеют размерность плотности и связаны с плотностью масс частиц, слагающих скелет  $\rho_s$  и жидкости  $\rho_f$  соотношениями:  $\rho_{11} = (1 - m)\rho_s - \rho_{12}$ ,  $\rho_{22} = m\rho_f - \rho_{12}$ , где  $m$  – пористость среды. Константа присоединенной плотности  $\rho_{12}$  связана с дисперсией отклонения микроскоростей частиц жидкости в порах от средней скорости потока жидкости  $\dot{u}_i^f$  и зависит от геометрии пор,  $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$  (здесь и ниже по одноименным индексам проводится суммирование от 1 до 3).

Поскольку для констант среды М.Био справедливо  $\lambda + 2\mu > 0$ ,  $R > 0$ ,  $Q > 0$ ,  $\rho_{11} > 0$ ,  $\rho_{22} > 0$ ,  $\rho_{12} < 0$ , тогда справедливо  $2Q\rho_{12} + (\lambda + 2\mu)\rho_{22} - R\rho_{11} < 0$ . В силу положительной определенности кинетической энергии и упругого потенциала имеем  $\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2 > 0$ ,  $(\lambda + 2\mu)R - Q^2 > 0$ .

Среда М. Био характеризуется тремя звуковыми скоростями. Две из них  $c_1, c_2$  описывают скорость распространения продольных волн 1-го и 2-го рода, а третья  $c_3$  – поперечную волну ( $c_2 < c_3 < c_1$ ):

$$c_{1,2}^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)\rho_{22} + R\rho_{11} - 2Q\rho_{12}}{2(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)} \pm \frac{\sqrt{((\lambda + 2\mu)\rho_{22} - R\rho_{11})^2 + 4((\lambda + 2\mu)\rho_{12} - Q\rho_{11})(R\rho_{12} - Q\rho_{22})}}{2(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)}, \quad (7.2)$$

$$c_3 = \sqrt{\frac{\mu\rho_{22}}{\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2}}, \quad (7.3)$$

верхний знак в (3.2) соответствует  $c_1$ , а нижний –  $c_2$ . Для реальных пористых сред имеет место неравенство  $c_1 > c_3 > c_2$ , т.е. объемная волна 2-го рода распространяется в среде медленнее, чем волны 1-го рода и сдвиговые. Скорости связаны между собой соотношениями вида:

$$c_1^2 + c_2^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)\rho_{22} + R\rho_{11} - 2Q\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2},$$

$$c_1^2 c_2^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)R - Q^2}{\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2}$$

Введем следующие коэффициенты  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  :

$$\zeta_1 = \frac{\lambda + 2\mu - \rho_{11}a_1^2}{\rho_{12}a_1^2 - Q} \equiv \frac{Q - \rho_{12}a_1^2}{\rho_{22}a_1^2 - R},$$

$$\zeta_2 = \frac{R - \rho_{22}a_2^2}{\rho_{12}a_2^2 - Q} \equiv \frac{Q - \rho_{12}a_2^2}{\rho_{11}a_2^2 - \lambda - 2\mu}, \quad \zeta_3 = -\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}} \quad (7.4)$$

Для рассматриваемой среды связь между напряжениями и деформациями имеют вид обобщенного закона Гука:

$$\sigma_{ij} = \mu(u_{i,j}^s + u_{i,j}^f) + (\lambda u_{k,k}^s + Q u_{k,k}^f) \delta_{ij},$$

$$\sigma = -mp = Q u_{k,k}^s + R u_{k,k}^f \quad (7.5)$$

где  $p$  – давление жидкости в порах,  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений в упругом скелете. При нарушении связи между упругим скелетом и жидкостью:

$$Q \rightarrow 0, \quad \rho_{12} \rightarrow 0 \quad (7.6)$$

имеем

$$c_3 \rightarrow \sqrt{\mu / \rho_{11}}, \quad c_1 \rightarrow c_s, \quad \text{а } c_2 \rightarrow c_f, \quad (7.7)$$

где  $c_s = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho_{11}}$  – скорость продольных волн в сухом пористом скелете,

$c_f = \sqrt{R / \rho_{22}}$  – скорость продольных волн в жидкости, а также

$\zeta_1 \rightarrow 0, \quad \zeta_2 \rightarrow 0, \quad \zeta_3 \rightarrow 0$  . Будем называть эти скорости *звуковыми* в среде Био.

В дальнейшем для удобства обозначений введем вектор

$$\bar{u} = \{\bar{u}^s, \bar{u}^f\} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\} \quad (7.8)$$

размерности 6, полагая  $u_i$  компонентами перемещения твердой фазы для  $i = \overline{1,3}$  и жидкости для  $i = \overline{4,6}$ . Аналогично введем вектор массовых сил

$$\bar{G} = \{\bar{G}^s, \bar{G}^f\} = \{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6\}.$$

## 7.2 Транспортные уравнения М. Био. Фундаментальные решения уравнений движения среды М. Био в классе бегущих решений.

Для построения фундаментальных решений  $U_{ik}$  уравнений динамики двухкомпонентной среды М. Био рассмотрим систему уравнений (7.9) при действии бегущих нагрузок в виде сосредоточенных импульсных функций:  $G_{si}(x') = \delta_{ij}\delta(x')$ ,  $G_{fi}(x') = \delta_{ij}\delta(x')$ . В этом случае рассматриваемая система уравнений примет следующий вид

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)U_{ik,kj} + \mu U_{ij,kk} + QU_{i(k+3),kj} - c^2 \rho_{11} U_{ij,33} - c^2 \rho_{12} U_{i(j+3),33} + \delta_{ij} \delta(x') &= 0 \\ QU_{ik,kj} + RU_{i(k+3),kj} - c^2 \rho_{12} U_{ij,33} - c^2 \rho_{22} U_{i(j+3),33} + \delta_{i(j+3)} \delta(x') &= 0 \end{aligned} \quad (7.9)$$

здесь всюду по одноименным индексам проводится суммирование в указанных выше пределах их изменения от 1 до  $N$ , хотя размерность тензора  $U_{ij}$  -  $(2N \times 2N)$ . Компоненты тензора имеют следующий физический смысл: при  $1 \leq j \leq N$  это  $j$ -ые компоненты перемещений твердой фазы, при  $N+1 \leq j \leq 2N$  - это  $(j-N)$ -ые компоненты перемещений жидкости от действия сосредоточенной силы вдоль  $i$ -ой оси координат (при  $1 \leq i \leq N$ ) на твердую фазу или от действия сосредоточенной силы вдоль  $(i-N)$ -ой оси координат (при  $N+1 \leq i \leq 2N$ ) на жидкость.

Используя к последней системе уравнений обобщенное преобразование Фурье по пространственным координатам, получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & -(\lambda + 2\mu)\xi_k \xi_j \tilde{U}_{ik} - \mu \xi^2 \tilde{U}_{ij} - Q \xi_k \xi_j \tilde{U}_{i(N+k)} + c^2 \xi_N^2 (\rho_{11} \tilde{U}_{ij} - \rho_{12} \tilde{U}_{i(N+j)}) + \delta_{ij} = 0 \\ & -\xi_k \xi_j (Q \tilde{U}_{ik} + R \tilde{U}_{i(N+k)} + c^2 \xi_N^2 (\rho_{12} \tilde{U}_{ij} + \rho_{22} \tilde{U}_{i(N+j)})) + \delta_{i(N+j)} = 0, \end{aligned} \quad (7.10)$$

где  $\xi_k$  – параметры преобразования Фурье по координатам,  $\xi^2 = \xi_k \xi_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ ,  $j = \overline{1, N}$ ,  $i = \overline{1, 2N}$ . Для определения  $\tilde{U}_{ij}$  умножим уравнения (7.9) на  $\xi_j$  и свернем по индексу  $j$ . Обозначая  $\tilde{e}_i = \xi_j \tilde{U}_{ij}$ ,  $\tilde{E}_i = \xi_j \tilde{U}_{i(N+j)}$  – изображения объемных деформаций твердой и жидкой фаз, придем к системе уравнений

$$\begin{aligned} & (\rho_{11} \omega^2 - (\lambda + 2\mu) \xi^2) \tilde{e}_i + (\rho_{12} c^2 \xi_N^2 - Q \xi^2) \tilde{E}_i = \xi_j \delta_{ij}, \\ & (\rho_{12} \omega^2 - Q \xi^2) \tilde{e}_i + (\rho_{22} c^2 \xi_N^2 - R \xi^2) \tilde{E}_i = \xi_j \delta_{i(N+j)}, \end{aligned}$$

решая которую, найдем

$$\begin{aligned} \tilde{e}_i &= \frac{-\xi_i}{(\rho_{11} \rho_{22} - \rho_{12}^2)(a_1^2 - a_2^2)} \left( \frac{\rho_{22}(a_1^2 - a_f^2)}{a_1^2 \xi^2 - c^2 \xi_N^2} - \frac{\rho_{22}(a_2^2 - a_f^2)}{a_2^2 \xi^2 - c^2 \xi_N^2} \right) \quad i = \overline{1, N}, \\ \tilde{e}_i &= \frac{\xi_{i-N}}{(\rho_{11} \rho_{22} - \rho_{12}^2)(a_1^2 - a_2^2)} \left( \frac{\rho_{12}(a_1^2 - Q)}{a_1^2 \xi^2 - c^2 \xi_N^2} - \frac{\rho_{12}(a_2^2 - Q)}{a_2^2 \xi^2 - c^2 \xi_N^2} \right) \quad i = \overline{N+1, 2N}, \\ \tilde{E}_i &= \frac{\xi_i}{(\rho_{11} \rho_{22} - \rho_{12}^2)(a_1^2 - a_2^2)} \left( \frac{\rho_{12}(a_1^2 - Q)}{a_1^2 \xi^2 - c^2 \xi_N^2} - \frac{\rho_{12}(a_2^2 - Q)}{a_2^2 \xi^2 - c^2 \xi_N^2} \right) \quad i = \overline{1, N} \\ \tilde{E}_i &= \frac{-\xi_{i-N}}{(\rho_{11} \rho_{22} - \rho_{12}^2)(a_1^2 - a_2^2)} \left( \frac{\rho_{11}(a_1^2 - a_s^2)}{a_1^2 \xi^2 - c^2 \xi_N^2} - \frac{\rho_{11}(a_2^2 - a_s^2)}{a_2^2 \xi^2 - c^2 \xi_N^2} \right) \quad i = \overline{N+1, 2N} \end{aligned}$$



Подставляя (7.11) в (7.9) и пользуясь соотношениями (7.7) - (7.8), найдем тензор Грина в пространстве изображений Фурье:

$$\bar{U}_{kj} = \frac{c_3^2}{\mu} \left( \frac{b_{k3} \delta_{kj}}{c_3^2 (\xi^2 - M_3^2 \xi_3^2)} - \frac{\xi_k \xi_j}{c^2 \xi_3^2} \sum_{l=1}^3 \frac{b_{kl}}{\xi^2 - M_3^2 \xi_3^2} \right) \text{ при } k = \overline{1,3}, j = \overline{1,6}$$

$$\bar{U}_{kj} = \bar{U}_{jk} \text{ при } k = \overline{4,6}, j = \overline{1,3} \quad (7.11)$$

$$\bar{U}_{kj} = \frac{\delta_{kj}}{\rho_{22} c^2 \xi_3^2} + \frac{c_3^2}{\mu} \left( \frac{d_3 \delta_{kj}}{c_3^2 (\xi^2 - M_3^2 \xi_3^2)} - \frac{\xi_{k-3} \xi_{j-3}}{c^2 \xi_3^2} \sum_{l=1}^3 \frac{d_l}{\xi^2 - M_l^2 \xi_3^2} \right),$$

$$\text{при } k = \overline{4,6}, j = \overline{4,6}$$

где

$$b_{k1} = \frac{c_1^2 - c_f^2}{c_2^2 - c_f^2}, \quad b_{k2} = \frac{c_2^2 - c_f^2}{c_2^2 - c_f^2}, \quad b_{k3} = -1, \quad k = \overline{1,3}$$

$$b_{k1} = \zeta_1 \frac{c_1^2 - c_f^2}{c_2^2 - c_f^2}, \quad b_{k2} = -\zeta_2 \frac{\rho_{11} c_2^2 - c_s^2}{\rho_{22} c_1^2 - c_2^2}, \quad b_{k3} = -\zeta_3, \quad k = \overline{4,6}$$

$$d_1 = \frac{\rho_{11} c_1^2 - c_s^2}{\rho_{22} c_1^2 - c_2^2}, \quad d_2 = -\frac{\rho_{11} c_2^2 - c_s^2}{\rho_{22} c_1^2 - c_2^2}, \quad d_3 = -\zeta_3, \quad k = \overline{4,6}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$b_{k1} = \frac{a_1^2 - a_f^2}{a_2^2 - a_f^2}, \quad b_{k2} = \frac{a_2^2 - a_f^2}{a_2^2 - a_f^2}, \quad b_{k3} = -1, \quad k = \overline{1,3},$$

$$b_{k1} = \zeta_1 \frac{a_1^2 - a_f^2}{a_2^2 - a_f^2}, \quad b_{k2} = -\zeta_2 \frac{\rho_{11} a_2^2 - a_s^2}{\rho_{22} a_1^2 - a_2^2}, \quad b_{k3} = -\zeta_3, \quad k = \overline{4,6},$$

$$d_1 = \frac{\rho_{11} a_1^2 - a_s^2}{\rho_{22} a_1^2 - a_2^2}, \quad d_2 = -\frac{\rho_{11} a_2^2 - a_s^2}{\rho_{22} a_1^2 - a_2^2}, \quad d_3 = -\zeta_3, \quad k = \overline{4,6},$$

Обозначим  $M_l = c/c_l$  ( $l = \overline{1,3}$ ) - числа Маха,  $m_l = \sqrt{1 - M_l^2}$ . Назовем  $c$  - скорость подвижных нагрузок *дозвуковой*, если  $c < c_2$ , т.е.  $M_l < 1$ ; *сверхзвуковой*, если  $c > c_1$ ,  $M_l > 1$ . В случае, когда величина  $c$  находится между значениями скоростей (7.5), имеет место *межзвуковая (трансзвуковая)* скорость. Поскольку вид фундаментальных решений зависит значений числа Маха, перепишем (7.12) в виде

$$\tilde{U}_{kj} = \frac{a_3^2}{\mu} \left( \frac{b_{k3} \delta_{kj}}{a_3^2 (\xi^2 - M_3^2 \xi_N^2)} - \frac{\xi_k \xi_j}{c^2 \xi_N^2} \sum_{l=1}^3 b_{kl} \frac{1}{\xi^2 - M_l^2 \xi_N^2} \right)$$

при  $k = \overline{1, N}, j = \overline{1, 2N}$ ,

$$\tilde{U}_{kj} = \tilde{U}_{kj} \text{ при } k = \overline{N+1, 2N}, j = \overline{1, N} \quad (7.12)$$

$$\tilde{U}_{kj} = \frac{\delta_{kj}}{\rho_{22} c^2 \xi_N^2} + \frac{a_3^2}{\mu} \left( \frac{d_3 \delta_{kj}}{a_3^2 (\xi^2 - M_3^2 \xi_N^2)} - \frac{\xi_{k-N} \xi_{j-N}}{c^2 \xi_N^2} \sum_{l=1}^3 d_l \frac{1}{\xi^2 - M_l^2 \xi_N^2} \right)$$

при  $k = \overline{N+1, 2N}, j = \overline{N+1, 2N}$

### 7.2.1 Фундаментальные решения уравнений движения среды М. Био при транспортных нагрузках в случае дозвуковых скоростей.

Пусть  $M_l < 1$ , т.е.  $c < c_2$ . Найдем оригиналы изображения Фурье фундаментальных решений. Обозначим  $\tilde{f}_0 = \frac{1}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + m \xi_3^2}$ . Его оригинал известен [92]. Обозначим через  $f_2$  оригинал функции  $\tilde{f}_0 / (-i \xi_3)^2$ . В пространственном случае ( $N = 3$ ) функции  $f_k$  имеют вид [20,97]

$$f_{0l} = \frac{1}{4\pi\sqrt{m_l^2 r^2 + x_3^2}}, \quad r = \sqrt{x_k x_k}, \quad k = 1, 2$$

$$f_{2l} = \left( |x_3| \ln \frac{(|x_3| + \sqrt{m_l^2 r^2 + x_3^2})}{m_l r} - \sqrt{m_l^2 r^2 + x_3^2} \right)$$

Используя свойство преобразования Фурье, получим

$$U_{kj} = \frac{a_3^2}{\mu} \left[ b_{k3} \delta_{kj} f_{03}(r, x_3, m_3) - \left( \sum_{l=1}^3 b_{kl} f_{2l}(r, x_3, m_l) \right)_{,kj} / c^2 \right], \quad k = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, 2N}$$

$$U_{jk} = U_{kj}, \quad k = \overline{N+1, 2N}, \quad j = \overline{1, N} \quad (7.13)$$

$$U_{kj} = \frac{-\pi \delta_{kj} |x_3|}{\rho_{22} c^2} + \frac{a_3^2}{\mu} \left[ d_3 \delta_{kj} (m_l^2 r^2 + x_3^2)^{-1/2} / 4\pi a_3^2 - \left( \sum_{l=1}^3 d_l^2 f_{2l}(r, x_3, m_l) \right)_{,k-3, j-3} / c^2 \right],$$

$$k = \overline{N+1, 2N}, \quad j = \overline{N+1, 2N}$$

здесь использованы обозначения  $f_{,ij} = \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$ . Вычисляя необходимые производные и подставляя их в (7.13), получим тензор фундаментальных решений:

$$U_{kj} = \frac{c_3^2}{4\pi} \left\{ \frac{b_{k3} \delta_{kj} \sqrt{m_3^2 r^2 + x_3^2}}{c_3^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{c^2} \sum_{l=1}^3 b_{kl} \left( x_3^2 x_k x_j / r^4 - x_3 (\delta_{k3} x_j + \delta_{j3} x_k) / r^2 + \delta_{k3} \delta_{j3} \right) \sqrt{m_l^2 r^2 + x_3^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\left( \sqrt{m_l^2 r^2 + x_3^2} - m_l r \right) \left( \delta_{kj} r^2 - x_k x_j \right)}{r^2} \right\}, \quad k = 1, 2, 3, \quad j = \overline{1, 6} \quad (7.14)$$

$$U_{jk} = U_{kj}, \quad k = 4,5,6, \quad j = 1,2,3$$

$$U_{kj} = -\frac{\mu\delta_{kj}|x_3|}{4\pi r\rho_{22}} + \frac{c_3^2}{4\pi} \left\{ \frac{d_3\delta_{kj}\sqrt{m_3^2 r^2 + x_3^2}}{c_3^2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{c^2} \sum_{l=1}^3 d_l \left[ (x_3^2 x_k x_j / r^4 - x_3(\delta_{k3} x_j + \delta_{j3} x_k) / r^2 + \delta_{k3} \delta_{j3}) \sqrt{m_l^2 r^2 + x_3^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(\sqrt{m_l^2 r^2 + x_3^2} - m_l r)(\delta_{kj} r^2 - x_k x_j)}{r^2} \right] \right\}, \quad k = 4,5,6, \quad j = 4,5,6$$

При  $R \rightarrow 0$  фундаментальные решения  $U_{jk} \approx \text{const} / R$ .

### 7.2.2 Фундаментальные решения уравнений движения среды М. Био при транспортных нагрузках в случае сверхзвуковых скоростей.

При  $c > c_l$ ,  $\dot{\xi}$  используем оригиналы функций  $\tilde{g}_{0l} = (\xi_1^2 + \xi_2^2 - m_l \xi_3^2)^{-1/2}$ , являющуюся трансформантой Фурье фундаментального решения уравнения:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - m^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) g_{0l} + \delta(x) = 0$$

Замена переменных  $y_1 = x_1$ ,  $y_2 = x_2$ ,  $y_3 = x_3 / m_l$  приводит последнее уравнение к волновому уравнению, фундаментальное решение которого хорошо известно [51]. Возвращаясь к исходным переменным, получим оригиналы функции для заданных  $m_l$  и их первообразных  $\bar{g}_{0l} / (-i\xi_3)^2$  [26]:

и их первообразных  $\tilde{g}_0 / (-i\xi_3)^2$  [20,97]:

$$g_{0l} = \frac{H(x_3 - m_l r)}{2\pi \sqrt{x_3 - m_l^2 r^2}}, \quad r = \sqrt{x_k x_k}, \quad k = 1, 2$$

$$g_{2l} = -\frac{H(x_3 - m_l r)}{2\pi} \left( |x_3| \ln \frac{\left( |x_3| + \sqrt{x_3 - m_l^2 r^2} \right)}{m_l r} - \sqrt{x_3 - m_l^2 r^2} \right)$$

Используя свойство преобразования Фурье и вычисляя соответствующие производные, получим тензор фундаментальных решений:

$$U_{kj} = \frac{a_3^2}{\mu} \left[ \frac{b_{k3} \delta_{kj} H(x_3 - m_l r)}{2\pi a_3^2 \sqrt{x_3 - m_l^2 r^2}} - \right.$$

$$\left. - \left( \sum_{l=1}^3 b_{kl} H(x_3 - m_l r) (x_3^2 - m_l^2 r^2)^{-1/2} (x_3^2 x_k x_j / r^4 - x_3 (\delta_{k3} x_k + \delta_{j3} x_j) / r^2 + \delta_{k3} \delta_{j3}) - \right. \right.$$

$$\left. \left. \left( (x_3^2 - m_l^2 r^2)^{-1/2} H(x_3 - m_l r) (\delta_{kj} - x_k x_j / r^2) / r^2 \right) \right] / 2\pi c^2, \quad k = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,6}$$

$$U_{jk} = U_{kj}, \quad k = \overline{4,6}, \quad j = \overline{1,3}$$

$$U_{kj} = \frac{-\pi \delta_{kj} |x_3|}{\rho_{22} c^2} + \frac{a_3^2}{\mu} \left\{ d_3 \delta_{dkj} (x_3^2 - m_3^2 r^2)^{-1/2} / 2\pi a_3^2 - \right.$$

$$\left. - \left( \sum_{l=1}^3 d_l H(x_3 - m_l r) (x_3^2 - m_l^2 r^2)^{-1/2} (x_3^2 x_k x_j / r^4 - x_3 (\delta_{k3} x_k + \delta_{j3} x_j) / r^2 + \delta_{k3} \delta_{j3}) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - (x_3^2 - m_l^2 r^2)^{-1/2} H(x_3 - m_l r) (\delta_{ij} - x_k x_j / r^2) / r^2 \right\} / 2\pi c^2, \quad k = \overline{4,6}, \quad j = \overline{4,6}$$

### 7.2.3 Фундаментальные решения уравнений движения среды М. Био при транспортных нагрузках в случае трансзвуковых скоростей.

В этом случае  $c = c_l$ ,  $M_i = 1$ , используются оригиналы функций  $\tilde{h}_k(r, x_3) = 1/(-i\xi_3)^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2)$ ,  $k = \overline{0,2}$  [20,97]:

$$h_0(r, x_3) = \delta(x_3) \ln r^{-1} / 2\pi, \quad h_2(r, x_3) = H(x_3) |x_3| \ln r / 2\pi$$

В случае трансзвуковых скоростей тензор фундаментальных решений имеет вид:

$$\text{для } k = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,6} \quad U_{kj} = \frac{a_3^2}{2\pi\mu} \left\{ \frac{b_{k3} \delta_{kj} \delta(x_3) \ln r^{-1}}{a_3^2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{c^2} \sum_{l=1}^3 b_{kl} \left[ H(x_3) (x_3 (2x_k x_j / r^2 - \delta_{kj}) - (\delta_{k3} x_j + \delta_{j3} x_k) / r) / r - \delta_{k3} \delta_{j3} \delta(x_3) \ln r \right] \right\}$$

$$U_{jk} = U_{kj}, \quad k = \overline{4,6}, \quad j = \overline{1,3}$$

$$\text{для } k = \overline{4,6}, \quad j = \overline{4,6} \quad U_{kj} = \frac{-\pi a_3^2 x_3}{\rho_{22} c^2} + \frac{a_3^2}{\mu} \left\{ \frac{d_3 \delta_{kj} \delta(x_3) \ln r^{-1}}{a_3^2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{c^2} \sum_{l=1}^3 d_{l1} \left[ H(x_3) (x_3 (2x_k x_j / r^2 - \delta_{kj}) - (\delta_{k3} x_j + \delta_{j3} x_k) / r) / r - \delta_{k3} \delta_{j3} \delta(x_3) \ln r \right] \right\}$$

Фундаментальные решения уравнений движения для изотропной двух-компонентной среды М. Био в плоском и пространственном случаях построены в [76]. Для произвольных регулярных массовых сил  $G_k(x, t)$  решения транспортных уравнений Био имеют вид интегральной свертки

$$u_i = \int_{R^3} U_{ik}(x-y)G_k(y)dV(y)$$

При сингулярных массовых силах свертку следует брать согласно определению свертки обобщенных функций [19].

Тензор Грина и построенные решения позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние водонасыщенных сред при действии самых разнообразных массовых сил. При решении транспортных краевых задач для среды Био он необходим для построения ядер разрешающих сингулярных граничных интегральных уравнений, аналогично транспортным краевым задачам для упругих сред [10].

### 7.3 Обобщенные решения краевых задач для среды М. Био. Условия на волновых фронтах

Обозначим через  $D'_N(R^{N+1})$  пространство обобщенных функций  $\hat{f}(x,t)$ , определенных на пространстве  $D_N(R^{N+1})$  – финитных бесконечно дифференцируемых функций  $\varphi(x,t) = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ .

Пусть  $u_s, u_f$  – решение (7.1), непрерывное, дважды дифференцируемое почти всюду, за исключением характеристической поверхности  $F$ , неподвижной в  $R^{N+1}$ , и подвижной в  $R^N$  (волновой фронт  $F_t$ ), на которой производные могут иметь скачки. Уравнение для такой поверхности  $F$  подобно характеристическому уравнению системы (12) и имеет вид:

$$\det \begin{pmatrix} (\lambda + \mu)n_k n_j + \mu n_k n_k - \rho_{11} \delta_{ij} n_t^2 & Q n_k n_j - \rho_{12} \delta_{ij} n_t^2 \\ Q n_k n_j - \rho_{12} \delta_{ij} n_t^2 & R n_k n_j - \rho_{22} \delta_{ij} n_t^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$i = \overline{1, 2N}, \quad j, k = \overline{1, N}$$

Здесь  $(n, n_t)$  – вектор нормали к  $F$  в  $R^{N+1}$ ,  $n$  – единичный волновой вектор в  $R^N$ , направленный в сторону распространения волнового фронта  $F_t$ . Предполагается, что поверхность  $F$  кусочно-гладкая с непрерывной нормалью на ее гладкой части. Скорость движения поверхности  $F$  в пространстве  $R^N$ , как известно, равна

$$c = -n_{\triangleright t} / \|n\|_{R^N} \quad (7.14)$$

Так же, как было сделано выше, решение  $u(x, t)$ , рассматриваемое как регулярная обобщенная функция, обозначим через  $\hat{u}_s(x, t) = u_s(x, t)$ ,  $\hat{u}_f(x, t) = u_f(x, t)$ .

Аналогично  $\hat{G}_s(x, t) = G_s(x, t)$ ,  $\hat{G}_f(x, t) = G_f(x, t)$ .

Пусть  $\hat{u}_s, \hat{u}_f$  – решение (7.1) в пространстве  $D'_N(R^{N+1})$ . Такое решение будем называть *обобщенным решением (7.1)* или *решением в обобщенном смысле*. Обозначим  $[f]_{F_t}$  – скачок  $f$  на волновом фронте  $F_t$ .

**Т е о р е м а 1.** *Если  $u_s(x, t), u_f(x, t)$  удовлетворяет уравнению (7.1) почти всюду, за исключением волновых фронтов, на которых выполняются условия на скачки:*

$$[u_{si}]_{F_t} = 0, \quad [u_{fi}]_{F_t} = 0 \quad (7.15)$$

$$\left[ \mu u_{si \triangleright k} v_k + (\lambda + \mu) u_{sj \triangleright j} v_j + Q u_{ff \triangleright j} v_j + c(\rho_{11} u_{si \triangleright t} + \rho_{12} u_{fi \triangleright t}) \right]_{F_t} = 0$$

*то  $\hat{u}_s(x, t), \hat{u}_f(x, t)$  – являются обобщенными решениями (7.1).*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** С учетом правил дифференцирования обобщенных функций, подставим обобщенные функции  $\hat{u}_s(x, t), \hat{u}_f(x, t), \hat{G}_s(x, t), \hat{G}_f(x, t)$  и их соответствующие производные в (7.1). Эти функции будут удовлетворять (7.1), если правая часть полученного выражения при соответствующей подстановке равна нулю.



С учетом правил дифференцирования обобщенных функций, подставим обобщенные функции  $\hat{u}_s(x,t)$ ,  $\hat{u}_f(x,t)$ ,  $\hat{G}_s(x,t)$ ,  $\hat{G}_f(x,t)$  и их соответствующие производные в (7.1). В результате получим следующие выражения

$$\begin{aligned}
& \mu u_{si \triangleright jj} + (\lambda + \mu) u_{si \triangleright ji} + Q u_{ff \triangleright ji} + G_{si} - \rho_{11} u_{si \triangleright tt} - \rho_{12} u_{fi \triangleright tt} = \\
& \mu \left\{ \left( [u_{si}]_F n_j \delta_F \right)_{\triangleright j} + [u_{si \triangleright j}]_F n_j \delta_F \right\} + (\lambda + \mu) \left\{ \left( [u_{sj}]_F n_j \delta_F \right)_{\triangleright i} + [u_{sj \triangleright j}]_F n_i \delta_F \right\} + \\
& + Q \left\{ \left( [u_{ff}]_F n_j \delta_F \right)_{\triangleright i} + [u_{ff \triangleright j}]_F n_i \delta_F \right\} - \rho_{11} \left( [u_{si}]_F n_t \delta_F \right)_{\triangleright t} - \\
& - \rho_{11} [u_{si \triangleright t}]_F n_t \delta_F - \rho_{12} \left( [u_{fi}]_F n_t \delta_F \right)_{\triangleright t} - \rho_{12} [u_{fi \triangleright t}]_F n_t \delta_F \\
& Q u_{sj \triangleright ji} + R u_{ff \triangleright ji} + G_{fi} - \rho_{12} u_{si \triangleright tt} - \rho_{22} u_{fi \triangleright tt} = \tag{7.16} \\
& Q \left( [u_{sj}]_F n_j \delta_F \right)_{\triangleright i} + Q [u_{sj \triangleright j}]_F n_i \delta_F + R \left( [u_{ff}]_F n_j \delta_F \right)_{\triangleright i} + \\
& R [u_{ff \triangleright j}]_F n_i \delta_F - \rho_{12} \left( [u_{si}]_F n_t \delta_F \right)_{\triangleright t} - \rho_{12} [u_{si \triangleright t}]_F n_t \delta_F + \\
& - \rho_{22} \left( [u_{fi}]_F n_t \delta_F \right)_{\triangleright t} - \rho_{22} [u_{fi \triangleright t}]_F n_t \delta_F
\end{aligned}$$

здесь  $\alpha(x,t)\delta_F(x,t)$  сингулярная обобщенная функция – простой слой на  $F$  с плотностью  $\alpha$  :

$$(\alpha(x,t)\delta_F(x,t), \varphi(x,t)) = \int_F \alpha_i(x,t) \varphi_i(x,t) dS(x,t), \quad \forall \varphi(x,t) \in D_M(R^{N+1}),$$

$dS(x,t)$  – дифференциал площади поверхности в точке  $(x,t)$ ;  
 $(v, v_t) = (v_1, \dots, v_N, v_t)$  – единичный вектор, нормальный к характеристической поверхности  $F$ .

Функции  $\hat{u}_s(x,t)$ ,  $\hat{u}_f(x,t)$ ,  $\hat{G}_s(x,t)$ ,  $\hat{G}_f(x,t)$  будут удовлетворять уравнениям (7.1) в обобщенном смысле, если правая часть выражения (7.16) равна нулю:

$$[u_{si}]_F = 0, \quad [u_{fi}]_F = 0 \quad (7.17)$$

$$[\mu u_{i,j}^s n_j + ((\lambda + \mu)u_{j,j}^s + Qu_{j,j}^f) n_i - c^2(\rho_{11}u_{i,3}^s + \rho_{12}u_{i,3}^f) n_3]_{F_i} = 0, \quad (7.18)$$

$$[(Qu_{j,j}^s + Ru_{j,j}^f) n_i - c^2(\rho_{12}u_{i,3}^s + \rho_{22}u_{i,3}^f) n_3]_{F_i} = 0, \quad (7.19)$$

$$i=1,2,4.$$

В силу (7.14) условия (7.17) на соответствующем подвижном волновом фронте  $F_i$  примут вид (7.15). Теорема доказана.

Здесь  $n_j$  – компоненты единичной нормали к волновому фронту. При сверхзвуковых скоростях движения таких фронтов будет три. Первые два передних фронта связаны объемными деформациями в упругом скелете и жидкой компоненте, третий фронт – со сдвиговыми деформациями пористого скелета.

Условия (7.17) – это условия сплошности среды, в модели которой предполагается непрерывность перемещений скелета и жидкости. Из двух других условий следует, что на фронтах ударных волн напряжения в твердой и жидкой компонентах среды Био будут иметь скачки. Условия (7.10) и (7.11) – это законы сохранения импульса для твердой и жидкой компоненты. Это значительно усложняет построение решений уравнений движения среды Био при сверхзвуковых нагрузках, в отличие от дозвуковых, где решения непрерывны и дифференцируемы.

Заметим, что транспортные уравнения Ламе для упругой среды содержат только два числа Маха, определяющих отношение скорости транспортной нагрузки к двум скоростям распространения упругих волн в среде.

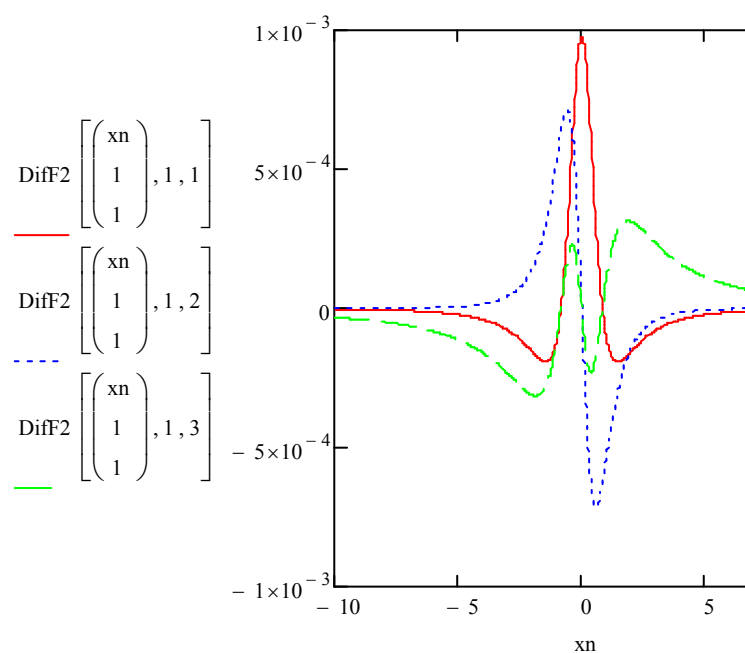
Записать транспортные уравнения среды Био с использованием трех чисел Маха в данном случае не удастся, т.к. зависимость звуковых скоростей

от упругих параметров здесь намного сложнее, чем в среде Био. Однако числа Маха выделяются при построении фундаментальных решений этой системы уравнений.

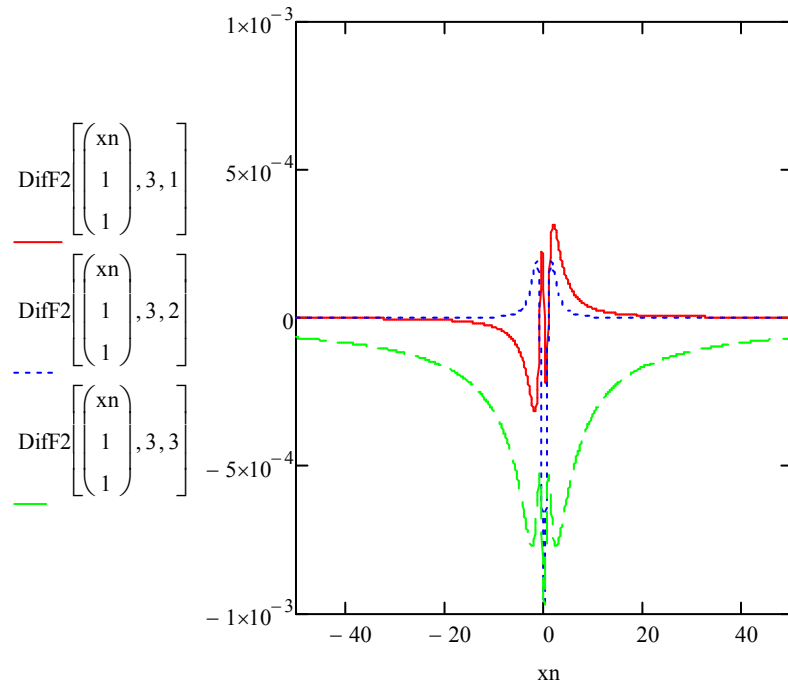
#### 7.4 Волновая динамика двухкомпонентной среды Био при дозвуковых скоростях нагрузки

Компьютерная реализация тензора Грина проведена в системе Mathcad-14. На рисунках 7.1 – 7.4 представлены результаты расчетов компонент при действии дозвуковой нагрузки в направлении оси  $x_1$  для для среды Био с безразмерными параметрами:

$$\lambda = \mu = 1, \quad Q = 1, \quad R = 1, \quad \rho_{11} = 3, \quad \rho_{22} = 1, \quad \rho_{12} = 0,2 .$$

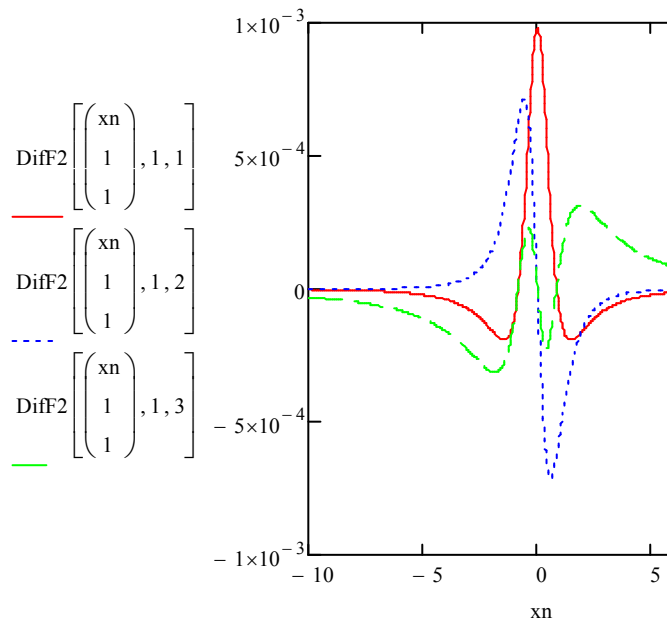


а

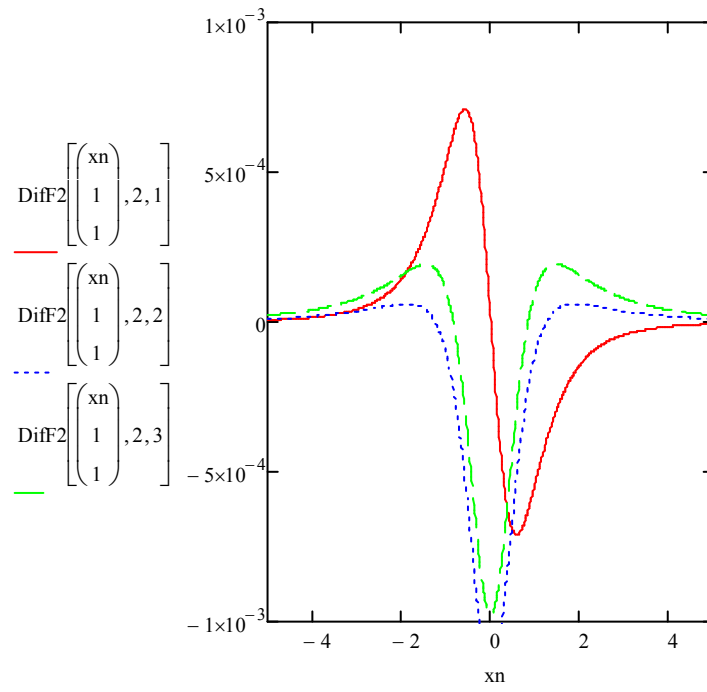


б

Рисунок 7.1 -  $U_{11}, U_{12}, U_{13}, U_{31}, U_{32}, U_{33}$  при действии силы в твердой компоненте



а



б

Рисунок 7.2 -  $U_{44}, U_{45}, U_{46}, U_{54}, U_{55}, U_{56}$  при действии силы в жидкой компоненте

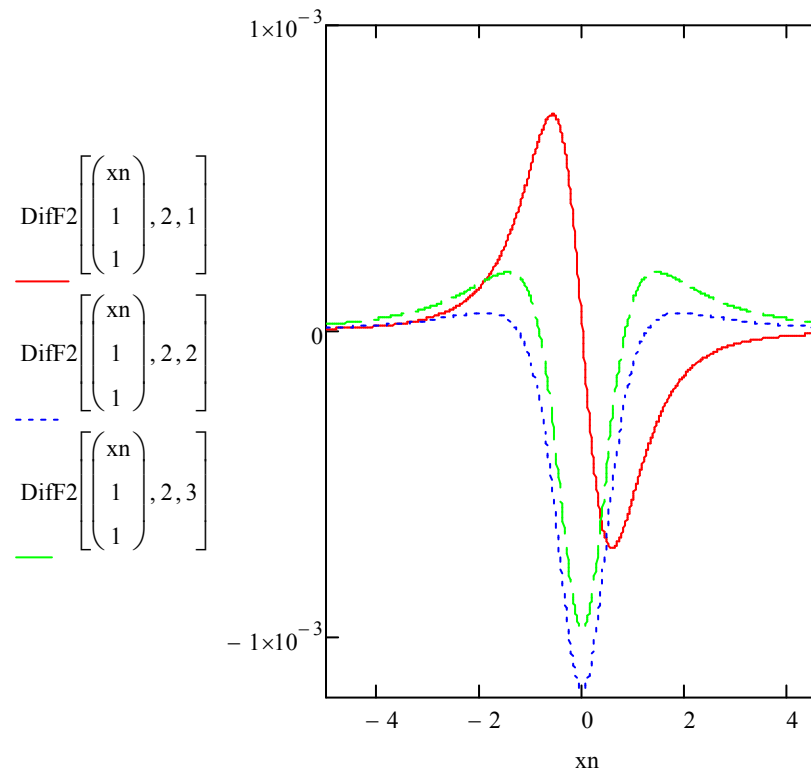


Рисунок 7.3 -  $U_{21}, U_{22}, U_{23}$  при действии нагрузки в твердой компоненте

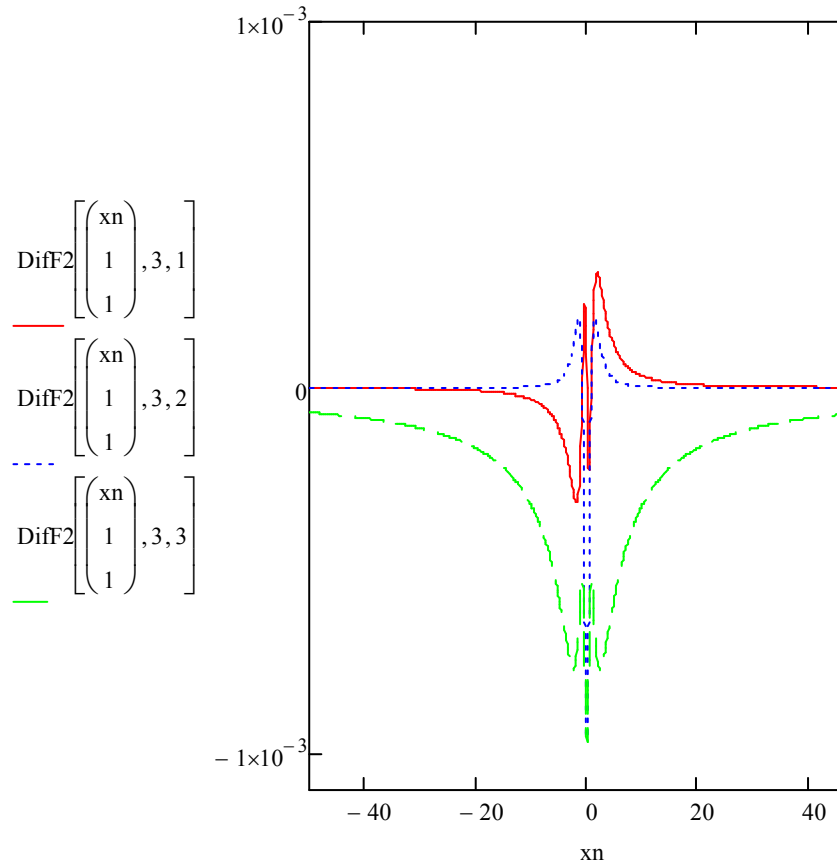


Рисунок 7.4 -  $U_{64}, U_{65}, U_{66}$  при действии нагрузки в жидкости

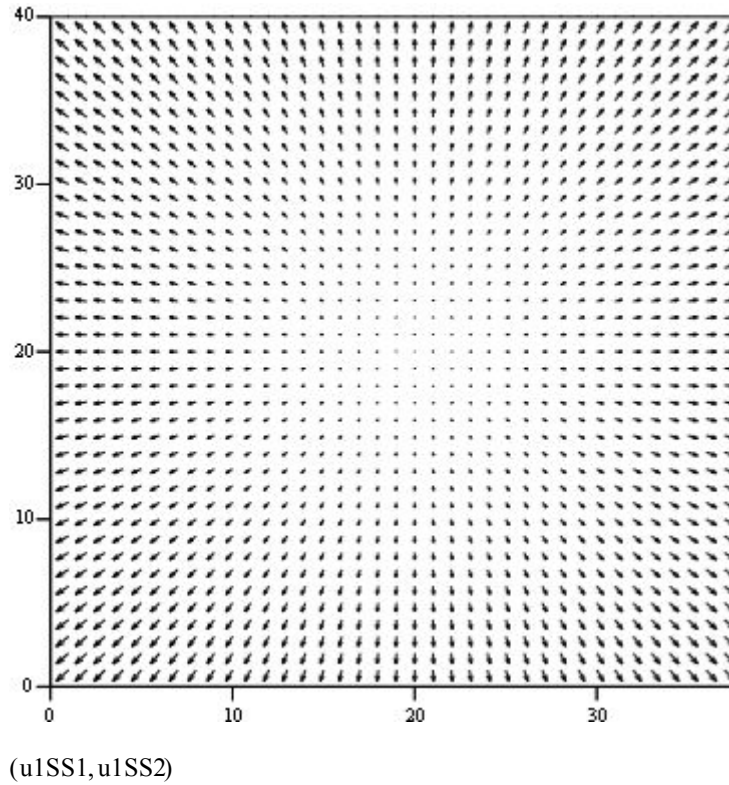


Рисунок 7.5 - Проекция векторного поля перемещений твердой компоненты при действии нагрузки в твердой фазе на плоскость  $(x_1, x_2)$

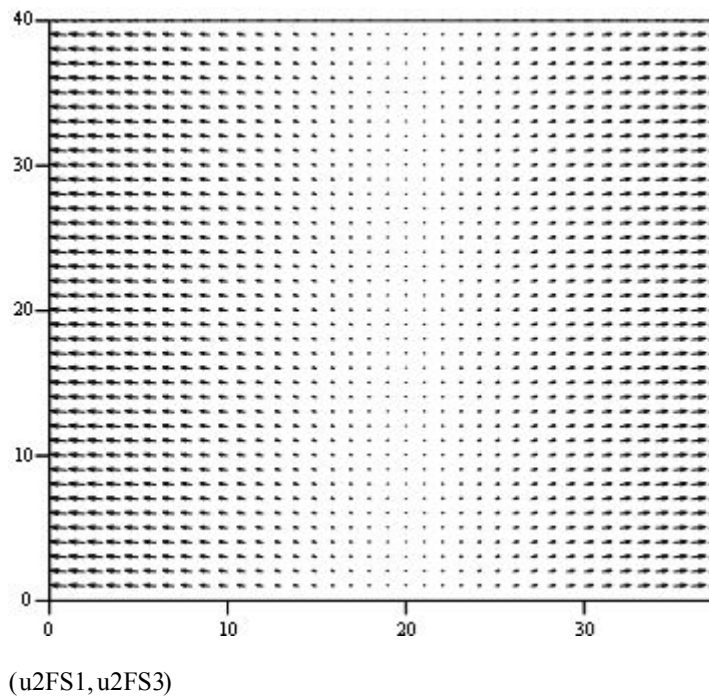
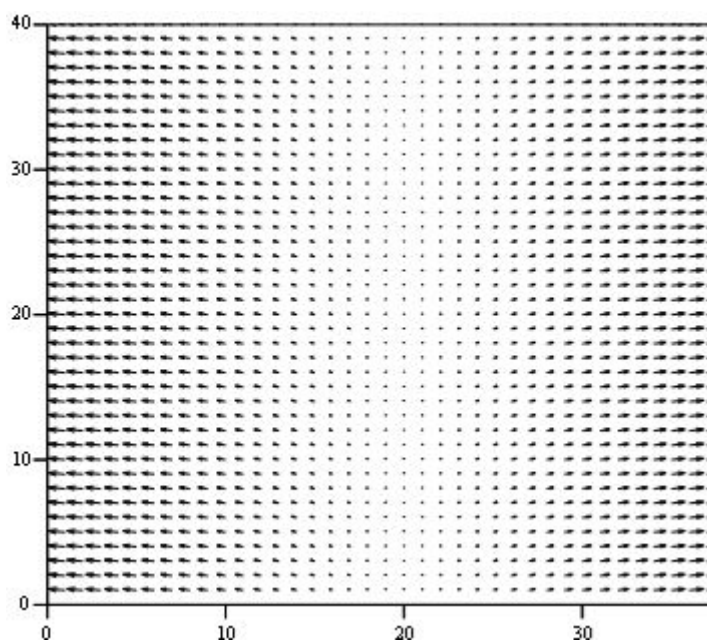
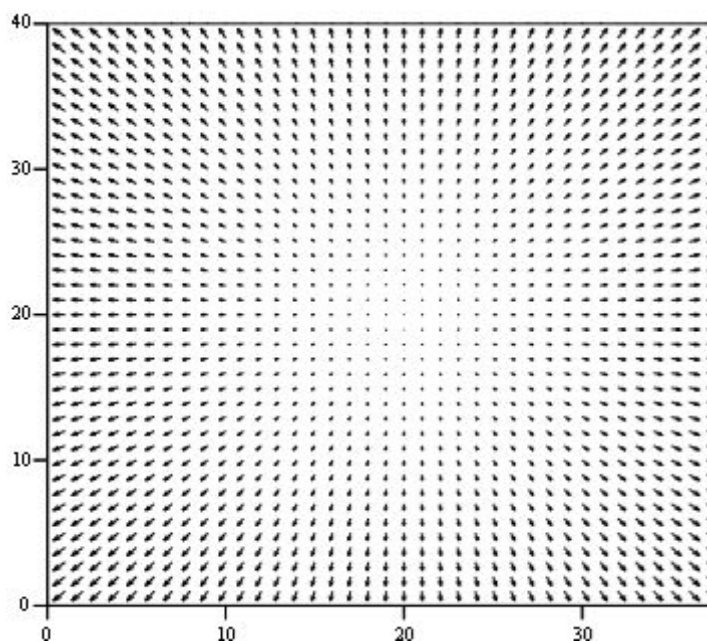


Рисунок 7.6 - Проекция векторного поля перемещений твердой компоненты при действии дозвуковой нагрузки в жидкости на плоскость  $(x_2, z)$



(u7SF1, u7SF3)

Рисунок 7.7 - Проекция векторного поля перемещений жидкости при действии дозвуковой нагрузки в твердой фазе на плоскость  $(x_1, z)$



(u8FF1, u8FF2)

Рисунок 7.8 - Проекция векторного поля перемещений жидкости при действии дозвуковой нагрузки в жидкости на плоскость  $(x_1, x_2)$



Так, рисунок 7.1 показывает распределение перемещений твердой компоненты  $U_{11}, U_{12}, U_{13}$  (а) и  $U_{31}, U_{32}, U_{33}$  (б) при действии нагрузки в твердой компоненте среды. Первый индекс указывает направление силы, второй – координату перемещений.

Перемещения жидкости  $U_{44}, U_{45}, U_{46}$  (а) и  $U_{54}, U_{55}, U_{56}$  (б) при действии нагрузки в жидкой компоненте среды в направлении оси  $x_1$  представлены на рисунке 7.2:

Перемещения твердой компоненты  $U_{21}, U_{22}, U_{23}$  при действии нагрузки в твердой компоненте отражены на рисунке 7.3, а перемещения жидкой компоненты  $U_{64}, U_{65}, U_{66}$  при действии нагрузки в жидкости – на рисунке 7.4.

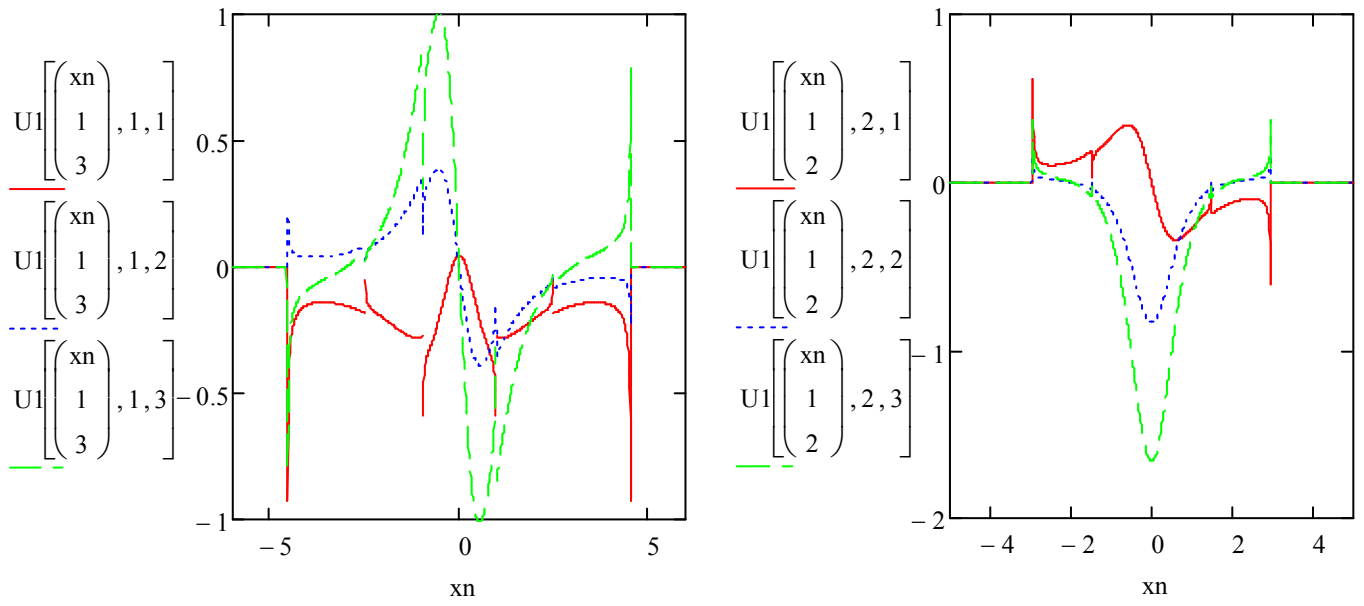
На рисунках 7.5 - 7.8 представлены проекции векторных полей перемещений твердой компоненты при действии дозвуковой нагрузки в твердой фазе на плоскость  $(x_1, x_2)$  (рисунок 7.5) и в жидкости на плоскость  $(x_2, z)$  (рис. 7.6). На рисунке 7.7 показаны проекции векторных полей перемещений жидкости при действии дозвуковой нагрузки в твердой фазе на плоскость  $(x_1, z)$ , рисунок 7.8 представляет проекции векторного поля перемещений жидкости при действии дозвуковой нагрузки в жидкости на плоскость  $(x_1, x_2)$ .

Построенный в проекте тензор Грина позволяет строить решения уравнений движения двухкомпонентной водонасыщенной среды при действии произвольных нагрузок, распределенных как по времени, так и по пространству. Его нужно использовать при решении транспортных краевых задач динамики водонасыщенных сред в окрестности транспортных тоннелей с произвольным профилем сечения.

## 7.5 Волновая динамика двухкомпонентной среды Био при сверхзвуковых скоростях нагрузки

Проведена компьютерная реализация тензора Грина двухкомпонентной среды Био при сверхзвуковых скоростях в системе MathCad. На рисунках представлены графики изменения компонент тензора вдоль прямых в плоскостях, перпендикулярных оси  $Z$ , и параллельных этой оси. Расчеты проведены для среды с условными параметрами:  $\lambda = \mu = 1$ ,  $Q = 1$ ,  $R = 1$ ,  $\rho_{11} = 2.5$ ,  $\rho_{22} = 1$ ,  $\rho_{12} = 0.15$  при скорости транспортной нагрузки  $V=1.5$ . При этом числа Маха соответственно равны:  $M_1 = 1.189$ ,  $M_2 = 1.5$ ,  $M_3 = 2.361$ .

На рисунках 7.9, 7.10 представлены компоненты тензора, описывающие движение твердой компоненты среды Био. Отчетливо наблюдаются фронты трех волн (рис. 7.10), связанные с приходом с приходом первой, второй и третьей звуковой волны. Аналогично это наблюдается и для жидкой компоненты (см. рис. 7.12). В поперечном сечении к оси  $Z$ , фронты ударных волн образуют три концентрические окружности, вне которых среда покоится. На рисунках 7.3 и 7.11 крайние скачки слева и справа отмечают интервал, внутри которого происходит движение твердой и жидкой компоненты среды, а вне этого интервала перемещения нулевые: среда покоится. Внутри интервала наблюдаем скачки перемещений на фронтах ударных волн. Причем число фронтов зависит от того, в какой зоне находится точка наблюдения, которая движется по прямой, пересекая зону возмущений. Чем больше  $z$ , тем глубже отрезок наблюдения пересекает конус возмущений, поэтому в разрезе можем наблюдать следы 1 фронта (рис. 7.11), двух фронтов (рис. 7.9б) и трех фронтов (рис. 7.9 а).



а
б  
 Рисунок 7.9 - Компоненты тензора Грина  $U_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ )  
 при  $x = (xn, 1, d) : d = 3(a), 2(b)$

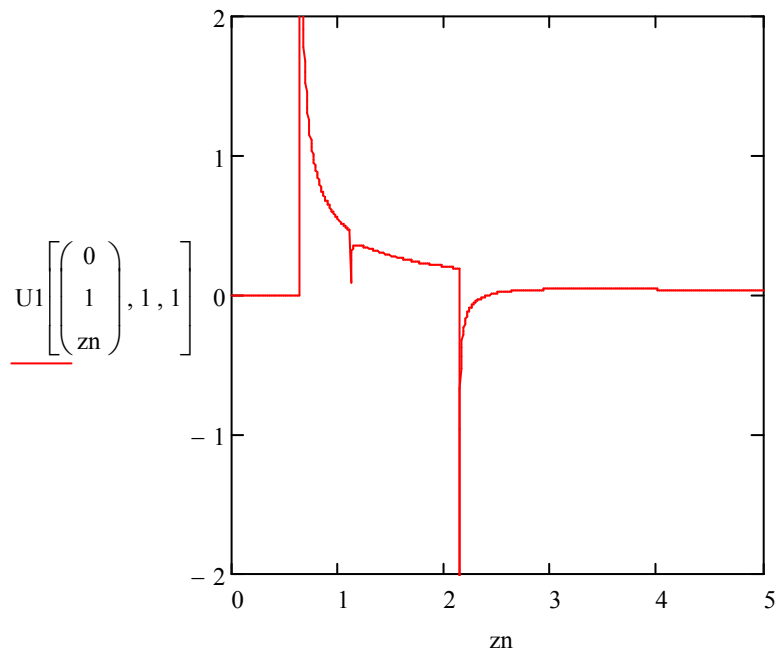
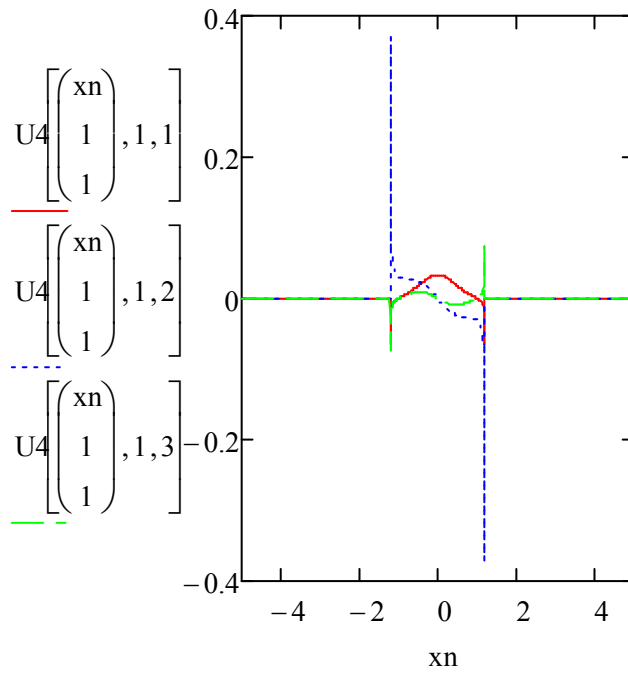
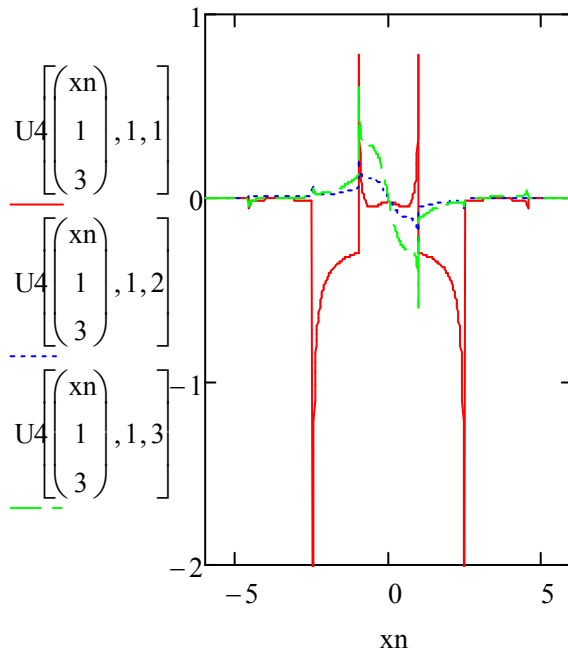


Рисунок 7.10 - Компонента тензора Грина  $U_{11}$  при  $x = (0, 1, zn)$



а

б

Рисунок 7.11 - Компоненты тензора Грина  $U_{ij}$  ( $i, j = 4, 5, 6$ ) при  $x = (xn, 1, d) : d = 3(a), 1(b)$

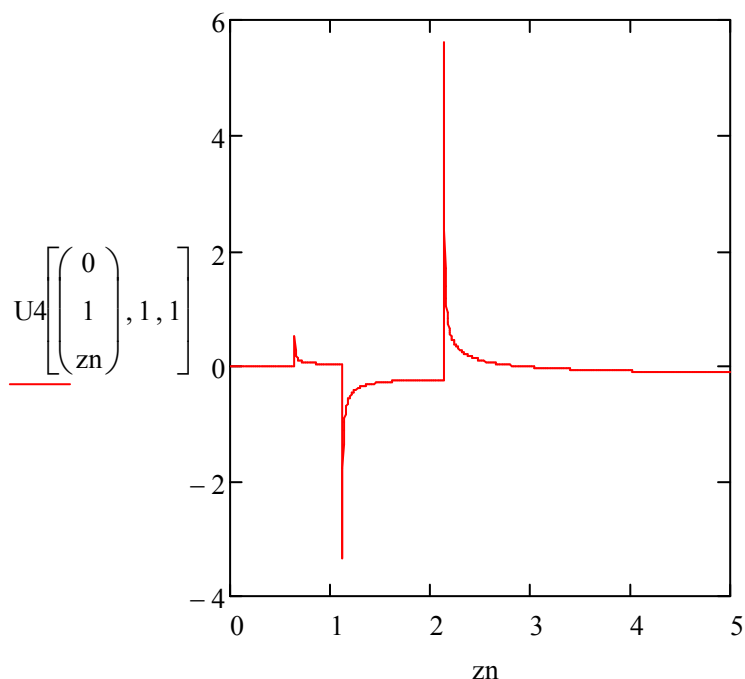


Рисунок 7.12 - Компонента тензора Грина  $U_{44}$  при  $x = (0,1,zn)$

## 7.6 Краткие выводы

Исследуется динамика двухкомпонентной среды М.Био при действии сосредоточенных на оси движущихся нагрузок. Рассмотрены фундаментальные и обобщенные решения системы уравнений М.Био при до-, транс- и сверхзвуковых скоростях движения. Проведена компьютерная реализация фундаментальных решений в системе Mathcad, приведены результаты численных расчетов, рисующие дифракционную картину смещений скелета массива и жидкости в его порах в окрестности движущейся нагрузки с дозвуковой скоростью. Проведена компьютерная реализация расчета тензора Грина при сверхзвуковых скоростях движения, приведены результаты расчетов, иллюстрирующие ударные волны в среде Био при сверхзвуковых скоростях. Отметим, что построение таких решений является необходимым для решения задач дифракции сейсмических волн на подземных сооружениях.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе разработаны методы решения уравнений движения и краевых задач динамики деформируемого твердого тела для исследования волновых процессов в деформируемых твердых средах с усложненными свойствами. Это направление относится к актуальным проблемам механики и математической физики и тесно связано с решением разнообразных инженерно-технических задач. В работе получены следующие результаты.

- На основе преобразования Фурье и Лапласа обобщенных функций разработан метод построения фундаментальных решений уравнений движения упругих анизотропных сред, построены тензора Грина для уравнений движения анизотропных сред (при плоской и пространственной деформации), тензора фундаментальных напряжений, и их первообразные по времени, исследованы их асимптотические свойства.
- На основе численных экспериментов изучено влияние степени анизотропии породного массива на характер его напряженно-деформированного состояния при действии сосредоточенных импульсных источников. Расчеты проведены для сред со слабой и сильной анизотропией упругих свойств. Показано, что в первом случае топологический тип волновых фронтов подобен расширяющимся сферам. Во втором случае появляются сложные волновые фронты и лакуны – подвижные невозмущенные области, ограниченные волновыми фронтами и расширяющиеся с течением времени. Это явление связано с волноводными свойствами сильно анизотропной среды, которые резко выражены в направлениях с преобладающей жесткостью и ослаблены в тех, где жесткость мала.
- Разработана математическая модель динамики породного массива при действии источника возмущений вблизи его дневной поверхности с учетом его анизотропии в случае плоской деформации. Построены трансформанты тензора Грина первой и второй краевой задачи динамики для анизотропной полуплоскости.

- Разработан метод обобщенных функций для решения краевых задач динамики анизотропных упругих и пьезоупругих сред при нестационарных воздействиях, а также в случае стационарных колебаний анизотропных упругих тел. Построены обобщенные решения уравнений движения таких сред в пространстве обобщенных функций, аналоги формул Сомильяны, Гаусса в пространстве обобщенных функций.
- Построены сингулярные граничные интегральные уравнения для решения поставленных начально-краевых задач динамики анизотропных сред.
- На основе теории обобщенных функций получены законы сохранения энергии, условия сохранения импульса на фронтах, которые связывают скачок скоростей на фронте волны со скачком напряжений.
- Построены фундаментальные и обобщенные решения уравнений движения двухкомпонентной среды Био, позволяющей учесть водонасыщенность грунтового массива при транспортных нагрузках во всем диапазоне скоростей от дозвуковых до сверхзвуковых. Для сверхзвуковых нагрузок получены условия на фронтах волн.

Разработанные методы решения краевых задач можно использовать для исследования волновых процессов, сопровождаемых ударными волнами, которые описываются системами гиперболического и смешанного типа. Решение подобных задач необходимо для изучения процессов распространения и дифракции волн в земной коре, наземных сооружениях для определения их напряженно-деформированного и теплового состояния при действии различных динамических, тепловых, и транспортных нагрузок. Эти исследования и разработанные программы можно использовать для определения прочностных свойств конструктивных элементов машин и механизмов, различных сооружений и конструкций в строительстве, машиностроении при динамических и тепловых воздействиях различной природы.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдукадыров С.А., Пинчукова Н.И., Степаненко Н.В. Об одном способе численного решения уравнений динамики упругих сред и конструкций// ФТПРПИ, 1984, N 6, с. 34–41.
2. Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Дильдабаев Ш.А., Закирьянова Г.К. Регулярное представление формул Кирхгофа и Сомильяны для нестационарной динамики анизотропных сред на волновых фронтах// Вестник АН КазССР 1991, № 3, с.58-62.
3. Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Жанбырбаев Н.Б. Граничные интегральные уравнения в динамических задачах теории упругости// Вестник АН КазССР, 1985, N 9, с. 46–50.
4. Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Дильдабаев Ш.А., Жанбырбаев Н.Б. Метод граничных интегральных уравнений в задачах динамики упругих многосвязных тел. Алма-Ата: "Гылым". 1992. 227с.
5. Айталиев Ш.М., Каюпов М.А. Метод граничных элементов для решения плоской задачи теории упругости анизотропного тела.// Изв. АН КазССР, сер. физ.–мат., 1980, N 5, с. 6–12.
6. Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К., Баймаханов И.Б., Махметова Н.М. МКЭ: сейсмонапряженное состояние парных тоннелей/ Численные методы решения задач механики деформируемого твердого тела. Караганда. с. 3–15.
7. Александров А.Я. Решение основных трехмерных задач теории упругости для тел произвольной формы путем численной реализации метода граничных интегральных уравнений// ДАН СССР, 1973, т.208, N 2. с. 291–294.
8. Александров А.Я., Зиновьев Б.М. О вычислении сингулярных интегралов при численном решении задач теории упругости методом граничных интегральных уравнений// ДАН СССР, 1981, т. 257. N 6. с. 1328–1332.
9. Александров А.Я., Зиновьев Б.М., Карманова Т.Ф. Численная реализация метода интегральных уравнений при решении плоских задач теории упру-



гости для ортотропных сплошных тел и тел с разрезами.// Изв. АН СССР, МТТ, 1983, N 6, с. 64–81.

10. Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К. Динамические аналоги формул Сомильяны для нестационарной динамики упругих сред с произвольной степенью анизотропии. // Прикладная механика и математика. 1994. Т.58. №2. С.197-202.

11. Алексеева Л.,А. Аналоги формул Кирхгофа и Сомильяны в плоских задачах эластодинамики//Прикладная математика и механика. Т.55. Вып.2. 1991. С.298-308.

12. Алексеева Л.,А. ГИУ начально-краевых задач для решений волнового уравнения// Дифференциальные уравнения. 1992. Т.28. N8. С.1451-1454.

13. Алексеева Л.,А. Метод обобщенных функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения // Математический журнал. Т.6. №1(19). 2006. С.16-32.

14. Алексеева Л.А. ГИУ начально-краевых задач для волнового уравнения// Дифференциальные уравнения.1992.т.28.№8. С.1451-1454;

15. Алексеева Л.А. Дифракция волн на системе протяженных подземных выработок неглубокого заложения// Вестник АН КазССР, 1987, N2. С.46–52.

16. Алексеева Л.А. Метод обобщенных функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения// Математический журнал. 2006. т.6. №1(19). С.16-32;

17. Алексеева Л.А. Стационарная дифракция волн на круговом отверстии в упругой полуплоскости// Прикладная математика и механика. Т.49, вып.2, 1985. С.299–306.

18. Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К. Динамические аналоги формулы Сомильяны для нестационарной динамики упругих сред с произвольной степенью анизотропии //ПММ, 1994, т.58, №2, с.170-175

19. Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К. Матрица Грина для строго гиперболических систем с производными второго порядка // Дифференциальные уравнения, 2001, т.37, №4, с.488-494
20. Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К. Метод обобщенных функций в задачах динамики анизотропных упругих сред // Межд. научн. конф «Актуальные проблемы математики и математического моделирования», Тезисы докл. Алматы 1-5 июня 2015, с.331-333
21. Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К. Начально-краевые задачи для гиперболических систем математической физики // Межд. конф. Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ. Москва, 23-29 мая 2005 г. Тезисы докладов. с. 24.
22. Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К. Нестационарные аналоги формул Грина и Гаусса для решений гиперболических систем // Сб. тез межд. конф. «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посв. памяти И.Г. Петровского совм. заседание Моск. матем. общ и семинара, 21-26 мая 2007г., г.Москва, с.346
23. Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К. Нестационарные уравнения движения анизотропных сред в пространстве обобщенных функций. Формулы Кирхгофа и Сомильяны // Известия АН Каз ССР. Сер. физ.-мат. № 1, 1991, с.70-74.
24. Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К. Обобщенные решения начально-краевых задач для гиперболических систем второго порядка // ЖВММФ, 2011, том 51, № 7, с. 1280–1293
25. Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К. Фундаментальные решения и граничные интегральные уравнения начально-краевых задач для систем гиперболических уравнений второго порядка // Межд. конф. “Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (АМАДЕ)”, 14-18 сентября 1999г., Минск, Беларусь, тез. докл. с.23-24

26. Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К., Шершнева В.В. Метод граничных интегральных уравнений в динамике сред с усложненными свойствами //Сб: Матер. научной сессии ОФМН, посв. пробл. развития механики и машиностроения в Казахстане, Алматы, 1993, с.9-18.
27. Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К., Шершнева В.В. Методы теории обобщенных функций при построении граничных интегральных уравнений динамики деформируемых твердых тел //IV междунар. конференция “Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике” (РФ, Казань, 3-7.07.95).
28. Алексеева Л.А., Курманов Е.Б., Закирьянова Г.К. Волновая динамика среды Био при транспортных нагрузках, движущихся с дозвуковой скоростью // Тезисы докл. междунар. научной конф «Актуальные проблемы математики и математического моделирования», Алматы, 1-5 июня 2015, с.329-330
29. Башелешвили М.О., Натрошвили Д.Г. Динамические задачи теории упругости для однородной анизотропной среды. // Тр. Тбил. унив., 1978, N 204, с. 29–46.
30. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.:Мир. 1984. 494с.
31. Бреббия К., Уокер С. Применение граничных элементов в технике. М., 1982. 248 с.
32. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М., 1977, 288 с.
33. Будаев В.В., Петрашень Г.И. Об исследовании в окрестности фронтов упругих волн, возбуждаемых точечным источником при дифракции от полубесконечного экрана. // ЖТФ АН СССР, 1979, N 9, с. 2010–2013.
34. Будаев В.С. К плоской задаче Лэмба для анизотропного полупространства. // Изв. АН СССР, МТТ, 1975, N 3.
35. Будаев В.С. Корректные задачи и условия на бесконечности для системы уравнений установившихся колебаний упругих анизотропных сред. / Ма-

тер. VI Всес. симп. по распротр. упругих и упругопластических волн. Фрунзе, 1975.

36. Будаев В.С. Об одной краевой задаче динамической теории упругих анизотропных сред.// Журн. прикл. мех. и техн. физики, 1974, N3, 121–126.

37. Будаев В.С. Распространение колебаний от источника типа сосредоточенного импульса в анизотропной среде.// Прикл. мех., 1973, N 2, с. 67–73.

38. Будаев В.С. Упругие волны в кристаллах и анизотропных средах.// Журн. прикл. мех. и техн. физики, 1974, N6, с. 143–150.

39. Бурчуладзе Т.В. К теории граничных задач колебания упругого тела.// Тр. Тбил. унив., 1957, вып. 64, с. 215–240.

40. Бурчуладзе Т.В., Гегелиа Т.Г. Развитие метода потенциала в теории упругости. Тбилиси. 1985. 226 с.

41. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М. 1970, 379 с.

42. Верюжский Ю.В. Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики. Киев. 1978. 183 с.

43. Владимиров В. С, Обобщенные функции в математической физике, изд-во «Наука», М., 1976.

44. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1981. 512с.

45. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции, т. I– IV, Физматгиз, М., 1958—1961.

46. Гельфанд И.М.,Шилов Г.Е.Обобщенные функции и действия над ними.М.1958.439 с.

47. Годунов С. К., Уравнения математической физики, изд-во «Наука», М., 1971.

48. Годунов С. К., Уравнения математической физики, изд-во «Наука», М., 1971.

49. Гузь А.И., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. Киев. Наукова думка. 1978. 307с.
50. Дёч Г., Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и 2–преобразования, изд–во «Наука», М., 1971.
51. Дильдабаев Ш.А. Нестационарная дифракция упругих волн на полостях ( горных выработках). Автореф. канд. дисс. Алма–Ата. АН КазССР. Институт математики и механики. 1988. 119 с.
52. Дильдабаев Ш.А., Закирьянова Г.К. Фундаментальные решения первой и второй краевых задач динамики для упругой анизотропной полуплоскости// Изв. НАН РК, сер. Физ-мат., 1993, №5, с.65 -70.
53. Диткин В. А., Прудников А. П., Интегральные преобразования и операционное исчисление, 2–е изд., изд–во «Наука», М., 1974.
54. Дуйшеналиев Т.Б., Закирьянова Г.К. Метод граничных интегральных уравнений в стационарных задачах для анизотропной упругой среды // Материаловедение. –2013. –№2. – с. 146-149
55. Дуйшеналиев Т.Б., Закирьянова Г.К. О единственности решений краевых задач динамики анизотропных упругих сред при антиплоской деформации с учетом ударных волн // IV межд. научн. конф. «Актуальные проблемы механики и машиностроения», Алматы, 2014, с.268-275
56. Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А. Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. Алма-Ата: Наука. 1989. 240с.
57. Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К. Сейсмонапряженное состояние подземных сооружений в анизотропном слоистом массиве. Алма–Ата, 1980. 212 с.
58. Жанбырбаев Н.Б. Метод граничных интегральных уравнений в задачах нестационарного воздействия на подземные сооружения. Автореф.канд. дисс. Алма–Ата. АН КазССР. Институт математики и механики. 1985.22с.
59. Жанбырбаев Н.Б. О применении метода граничных интегральных уравнений к нестационарным задачам теории упругости// Изв. АН КазССР. Сер. физ.–мат., 1985. N 3. С.35–38.

60. Закирьянова Г.К. Метод обобщенных функций в начально-краевых задачах для гиперболических систем //IV Межд. Конгресс по прикладной и индустриальной математике INPRIM-2000, Новоси-бирск, 26.06-1.07, ч.2, с. 8.
61. Закирьянова Г.К. Обобщенные решения начально-краевых задач для пьезоупругих сред // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, Нижний Новгород, 22-28 августа 2006 г., тез.докл. с. 360
62. Закирьянова Г.К. Волновые процессы в ортотропной среде при действии импульсных источников // Тезисы международной научной конференции «Алгебра, анализ, дифференциальные уравнения и их приложения», посвященной 60-летию академика НАН РК Джумадильдаева А.С. Алматы, 8-9 апреля 2016 г., с 219-221
63. Закирьянова Г.К. Волны от сосредоточенных источников в анизотропной среде // Материалы межд. научно–практической конф. «Проблемы геомеханики и преподавания естественных дисциплин».–Алматы, 2012. –с.155-159
64. Закирьянова Г.К. Граничные интегральные уравнения в задачах динамики анизотропных сред //Тезисы докл. VIII Международной конференции ДОФПС, Ташкент, 25-27 мая 1994г. с.6.
65. Закирьянова Г.К. Граничные интегральные уравнения начально-краевых задач для анизотропных упругих сред //Восьмой Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, Пермь, 23-29 авг. 2001, с.268-269  
Аннотации докл
66. Закирьянова Г.К. Граничные интегральные уравнения основных краевых нестационарных задач анизотропной среды// Вестник АН КазССР, 1993, №5 деп № 1146 -В93 от 2.04.93
67. Закирьянова Г.К. Динамика анизотропных сред при взрывных воздействиях // Материаловедение. – 2013. – №2. – с. 149-152
68. Закирьянова Г.К. Динамика анизотропных сред при действии импульсных сосредоточенных источников // Материалы IV межд. научн. конф. «Актуальные проблемы механики и машиностроения», Алматы, 2014, с.291-298

69. Закирьянова Г.К. Динамические аналоги формул Грина, Гаусса начально-краевых задач для гиперболических уравнений // Математический журнал, 2010, Т.10, № 3(37), с.45–50

70. Закирьянова Г.К. Динамический аналог формулы Грина для решения краевых задач для упругих и пьезоупругих сред // Межд. научная конф. “Современные проблемы дифференциальных уравнений, теории операторов и космических техно-логий”, 20-22 сентября 2006г, Алматы, Казахстан, тез.докл. с.45-46

71. Закирьянова Г.К. Динамический аналог формулы Сомильяны для решения нестационарных краевых задач в пьезоупругих средах // ЖПЭОС, 2010, Вып.12, Т.1, с.54–60

72. Закирьянова Г.К. Импульсные источники в анизотропной среде // Труды межд.научн конф. "Теория функций, информатика, дифференц. уравнения и их приложения", посв. 80-летию акад. НАН РК Н.К.Блиева 15-16 октября 2015 года. Алматы. Казахстан. С.127-130

73. Закирьянова Г.К. Краевые задачи для систем смешанного типа //Межд. конф. “Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (АМАДЕ)”, 13-19 сентября 2006г., Минск, Беларусь, тез.докл.с.54-55

74. Закирьянова Г.К. Метод граничных интегральных уравнений в краевых задачах для эллиптических систем второго порядка // Труды межд.конф. «Дифференциальные уравнения и их приложения», Алматы, 2002. с.112-115

75. Закирьянова Г.К. Метод граничных интегральных уравнений в начально - краевых задачах для гиперболических уравнений // Межд. конф. «Актуальные проблемы современной математики, информатики и механики-II», посв. 100-летию акад О.А. Жаутыкова, 100-летию член-корр. Е.И. Кима и 75-летию акад. У.М. Султангазина. Алматы, 28–30.09 2011. Тезисы. с. 170-171

76. Закирьянова Г.К. Метод граничных интегральных уравнений для решения стационарных краевых задач // Труды Межд.науч-практ. конф"Механика и строительство транспортных сооружений", посв. 75-летию.

Заслуж.деят.науки и техн. Казахстана, акад. НАН РК Айталиева Ш.М. Алматы, 2010, с.68–72

77. Закирьянова Г.К. Метод интегральных уравнений в динамических задачах для анизотропной полуплоскости //Юбилейная научная конфер, посв. 50-летию развития математики в АН Казахстана Алматы, 1995, 25-29.09. с.100.Тезисы доклада

78. Закирьянова Г.К. Нестационарные краевые задачи для пьезоупругих сред // Межд. конф. Проблемы современной математики и механики. Тезисы докладов, Алматы, 20-22 сентября 2005, с. 168-169

79. Закирьянова Г.К. Обобщенные решения краевых задач стационарных колебаний анизотропной упругой среды // Изв.НАН РК сер физ-мат 2010, № 3 с.103–106

80. Закирьянова Г.К. Обобщенные решения начально–краевых задач для пьезоупругих сред // Труды межд. науч-практ. конф. «Математическое и компьютерное моделирование экологических процессов и актуальные проблемы современного образования», т.1,Тараз, 2010, с. 37–42

81. Закирьянова Г.К. Обобщенные решения нестационарных краевых задач для упругой анизотропной среды // Матер. межд конф. «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посв. 100-летию акад. И.Н. Векуа, Новосибирск, 28 мая– 2 июня 2007г., с.509-510

82. Закирьянова Г.К. Обобщенные решения нестационарных краевых задач для гиперболического уравнения // Вестник НИИ развития путей сообщения №3 (28) 2009 г, с. 44–50

83. Закирьянова Г.К. Обобщенные решения стационарных краевых задач для упругой анизотропной среды // III Межд.науч.конф. «Соврем. проблемы механики», посв 70-летию акад. МАТ РФ Масанова Ж.К, 2008. Тезисы докл. с.56



84. Закирьянова Г.К. Регулярное представление формул Кирхгофа и Сомильяны для нестационарной динамики анизотропных сред на контуре // Вестник АН КазССР. 1992. №3. С.79-84.

85. Закирьянова Г.К. Граничные интегральные уравнения основных краевых нестационарных задач анизотропной среды. // Известия АН КазССР, 1993, №5 деп № 1146 -В93 от 2.04.93.

86. Закирьянова Г.К. Ударные волны в анизотропной среде при действии импульсных сосредоточенных источников //Высокие технологии, образование, промышленность. Том 3. Сб. статей 11 межд. научно-практ. конф. "Фундаментальные и прикладные исследования, разработка и применение высоких технологий в промышленности" 27-29.04 2011, Санкт-Петербург, Россия. С. 143-150

87. Закирьянова Г.К. Фундаментальные и обобщенные решения уравнений динамики анизотропных сред // Тезисы докл. межд. научной конф «Актуальные проблемы математики и математического моделирования», Алматы 1-5 июня 2015, с. 342-344

88. Закирьянова Г.К. Фундаментальные и обобщенные решения уравнений движения двухкомпонентной среды при транспортных нагрузках // Труды межд. науч. конф. «Дифференциальные уравнения и математическая физика», – Алматы, 2014.–с.273–277

89. Закирьянова Г.К. Фундаментальные и обобщенные решения уравнений динамики ортотропных сред // Известия КГТУ им. И.Раззакова, 2014, №32, с.112-116

90. Закирьянова Г.К. Фундаментальные решения гиперболических уравнений // Межд. научная конф. “Суверенный Казахстан: 15-летний путь развития космической деятельности”, посвящ 70-летию акад. У.А. Султангазина 4-6 октября 2006г., Алматы, Казахстан, сб. докл. с.53-56

91. Закирьянова Г.К. Фундаментальные решения уравнений движения среды М.Био при транспортных нагрузках, движущихся с дозвуковой скоро-

стью // Труды межд. науч. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», посвященной памяти акад. М.Я. Леонова – Бишкек, 2012.–С.272-277

92. Кейлис–Борок В.И. Исследование дислокаций в очагах землетрясений./ Проблемы тектонофизики, М., 1960, 309 с.

93. Кейлис–Борок В.И. Исследование источников, приближенно эквивалентных очагам землетрясений.// Тр. Геофиз. ин-та АН СССР, 1950, N 9(136), с.

94. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М., 1978. 518 с.

95. Ковшов А.Н. Дифракция упругой волны на сферической полости. Численное решение// Изв. АН СССР, МТТ, 1979. N 2. с. 62–70.

96. Ковшов А.Н., Нещеретов И.И. О дифракции нестационарной поперечной волны на цилиндрической полости// Изв. АН СССР, МТТ, 1982. N 5. С. 72–77.

97. Кожаметов К.К., Кравченко О.Ф., Нурмамбетова Р.Д. Граничные интегральные уравнения анизотропного тела./ в сб. "Аналитические и численные методы решения задач математики и механики", Алма-Ата, 1984, с. 91–96.

98. Козаров М., Иванов Ц.П. Распространение на вълни в еластичен орто-тропен кръгов цилиндър. // Изв. Ин-та техн. мех., Бълг. АН, 1970, N 7, с. 27–44.

99. Копейкин Ю.Д. Интегральные уравнения пространственных задач статики упругого тела// Прикладная механика. 1965. Т. 1. Вып.5.

100. Космодамианский А.С., Сторожев В.И. "Динамические задачи теории упругости для анизотропной среды"

101. Космодамианский А.С., Сторожев В.И. "Динамические задачи теории упругости для анизотропной среды"

102. Космодамианский А.С., Сторожев В.И. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред. Киев: Наукова думка, 1985, 176 с.

103. Крауклис П.В., Молотков Л.А. Низкочастотные волны Лэмба в цилиндрических и сферических слоях, расположенных в упругой среде/Зап. научн. семина. ЛОМИ АН СССР. 1972. Т.25. С.101–110.
104. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. М. 1963. 472 с.
105. Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М., 1976. 664 с.
106. Курманалиев К.К. Дифракция плоской нестационарной волны на системе жестких включений. ФТПРПИ, 1985. N 5. с. 55–61.
107. Курманалиев К.К. Резонансные колебания системы жестких включений вблизи границы упругого полупространства/ Динамика неоднородных сред и взаимодействие волн с элементами конструкций. НГД СО АН СССР. Новосибирск. 1987. с. 114.
108. Кэди У. Пьезоэлектричество и его практические применения. М. 1949;
109. Л. Хёрмандер. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. М. 1986. Т.1. 462с.
110. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М. 1973. 736 с.
111. Лазарев М.И. Метод граничных интегральных уравнений, алгоритмы и их реализация. Пушино. 1984. 54 с.
112. Лазарян В. А., Конашенко С. И., Обобщенные функции в задачах механики, изд-во «Наукова думка», Киев, 1974.
113. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М. 1977, 360с.
114. Маликов Х.М. Волны в анизотропных средах, вызванные приложением давления к сферической и цилиндрической полости.// Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1964, N 1, с. 82–84.
115. Мардонов Б., Ибраимов О. Распространение цилиндрической волны в пористой среде// Изв. АН Уз. ССР. Сер. техн. наук, 1972, N4. С.69–72.

116. Масанов Ж.К., Баймаханов И.Б. Определение напряженного состояния тоннеля в транстропном массиве при заданной акселерограмме// Изв. АН КазССР, Сер. физ.–мат. 1986. N 5. с. 80–84.
117. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М. Физматгиз, 1962, 254 с.
118. Молотков А.А. О распространении упругих волн в средах, содержащих тонкие плоско–параллельные слои./ Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л., 1961, сб. 5, с. 240–280.
119. Молотков А.А., Баймагамбетов У. К вопросу об источнике в трансверсально–изотропной упругой среде./ Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л., 1982, N 22, с.5–13.
120. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М. 1968. 512 с.
121. Мэзон Ц. Пьезоэлектрические кристаллы и их применения в ультразвуке. М.1952;
122. Натрошвили Д.Г. О свойствах фундаментальных решений уравнения установившихся колебаний анизотропной упругой среды.// Сообщ. АН ГрузССР, 1981, т. 104, N 3, с. 557–560.
123. Новацкий В. Теория упругости. М. 1975, 872с.
124. Новожилов В.В. Теория упругости. Л. 1958.
125. Огурцов К.И., Пахоменко Л.С. Анализ упругих волн, возбужденных сосредоточенными источниками в анизотропной среде. // Распространение упругих и упругопластических волн, 1969, с. 114– 121.
126. Осипов И.О. К методу функционально–инвариантных решений для задач динамической теории упругости анизотропной среды.// Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1963, N3, с. 391–397.
127. Осипов И.О. К плоской задаче о точечном источнике колебаний типа мгновенного импульса внутри анизотропной среды./ Распространение упругих и упругопластических волн, 1969, с. 122–130.

128. Осипов И.О. К теории волн релеевского типа в анизотропном полупространстве.// ПММ, 1970, т. 34, N 4, с. 762–764.
129. Осипов И.О. Характер изменения скорости распространения упругих волн в анизотропных средах.// Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1962, N1, с. 3–11.
130. Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. М. 1977, 312 с.
131. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М: Наука. 1981. 688с.
132. Перлин П.И. Об одном методе вычисления двумерных интегралов и его применение к решению сингулярных уравнений пространственной задачи теории упругости/ Всесоюз. школа по теоретич. иссл. численных методов механики сплошных сред. Тезисы докл. Звенигород.1973. с. 37–39.
133. Перлин П.И. Применение регулярных представлений сингулярных интегралов к решению уравнений второй основной задачи теории упругости// ПММ. 1976. Т. 40. N 2. с. 366–371.
134. Перлин П.И., Ткачев В.А. Решение второй основной плоской задачи теории упругости анизотропного тела методом потенциала.// Изв. АН СССР, МТТ, 1986, N 4, с. 184–186.
135. Перлин П.И., Шафаренко Е.М., Штерншис А.З. Некоторые вопросы применения метода потенциала к решению пространственных задач теории упругости// Современные проблемы в авиации. М., 1982. с. 221–228.
136. Петрашень Г.И. Основы математической теории распространения упругих волн/ Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. XV111. Л. 1978. 248 с.
137. Петрашень Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: Наука. 1980. 280с.
138. Петрашень Г.И., Будаев Б.В. Плоская задача на нестационарную дифракцию от полубесконечного экрана в случае источника упругих волн.// Вестник ЛГУ, 1977, N 13, с.147–157.

139. Петрашень Г.И., Каштан Б.М., Ковтун А.А. О методах расчета волновых полей в анизотропных упругих средах.// Изв.АН СССР, Физика Земли, 1986, N 11, с. 10–18.
140. Петровский И.Г. О диффузии волн и лакунах для систем гиперболических уравнений.//Изв. АН СССР, сер. матем., 1944, т.8, N 3, с. 101–106.
141. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М: Наука, 1986, 328с.
142. Распространение объемных волн и методы расчета волновых полей в анизотропных упругих средах. Л., 1984, 282 с.
143. Рашидов Т., Мардонов Б. Волновое взаимодействие подземных сооружений с грунтом. // Докл. АН УзССР, 1988, N 4, с. 15–17.
144. Розенберг А. С, Яхинсон Б. И., Переходные процессы и обобщенные функции, изд-во «Наука», М., 1966.
145. Ройтфарб И.З., Чу Вьет Кыонг Численный метод решения пространственных динамических задач теории упругости на основе метода потенциала.//Соппротивление материалов и теория сооружений. Киев. 1986, вып. 29, с.32–38.
146. Садырин А.И. Алгоритм реализации трехмерных динамических задач на ЭВМ// Методы решения задач теории упругости и пластичности. Горький, 1972, N 6, С 108–117.
147. Свекло В.А. Упругие колебания анизотропного тела.// Уч. зап. ЛГУ, механика, 1945, вып. 17, с.
148. Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950.
149. Соскин А.Е., Перлин П.И. О численном решении задач теории упругости методом потенциала./ Труды МФТИ, XXV научн. конф. МФТИ, М., 1980, с. 14–18.
150. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. М. 1979, 832с.

151. Сунь Го–ин Краевые задачи динамики плоского ортотропного упругого тела.// Лисюэ сюэбао, Acta mech. Sinica, 1962, v.5, n. 4, p 254–259.
152. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань, 1986, 296с.
153. Успенский И.Н., Огурцов К.И. Сосредоточенные источники в трансверсально–изотропных средах./ в сб. " Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн", N 6, 1962, с. 75–83.
154. Федоров Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах. М. 1965, 388 с.
155. Фотиева Н.Н. Расчет крепи подземных сооружений в сейсмически активных районах. М., 1980, 222 с.
156. Хазанов С.Ю. Гармонические волны в ортотропном цилиндре. // ДАН СССР, 1975, т. 220, N 5, с. 1046–1049.
157. Цай И.П. О разделении переменных в уравнениях динамики теории упругости./ Тр. Ин–та матем. АН УзССР, 1961, вып. 23.
158. Шварц Л., Математические методы для физических наук, изд–во «Мир», М., 1965.
159. Alexeyeva L.A., Dildabayev Sh.A., Zhanbyrbaev A.B., Zakir'yanova G.K. Boundary Integral Equations Method in two-and three-dimensional probl. of elastodynamics// The Third World Congress on Computational Mechanics. Chiba, Japan. August 1-5, 1994. Extended Abstr. V.I, pp.848-849.
160. Alexeyeva L.A., Dildabayev Sh.A., Zhanbyrbaev A.B., Zakir'yanova G.K. Boundary Integral Equations Method in two-and three-dimensional problems of elastodynamics // Computational mechanics, 18 (1996) 2, pp.147-157.
161. Alexeyeva L.A., Dildabayev Sh.A., Zakir'yanova G.K., Zhanbyrbayev A.B. Boundary integral equations method in two- and three dimensional problems of electrostatics // Int. J. Computational mechanics. 1996. Vol.18. No.2. P.147-157.
162. Alexeyeva L.A., Kurmanov E.B., Zakir'yanova G.K. Dynamics of Two-Component Medium M. Biot For Subsonic Transport Load // EUROMECH Collo-

quium 574 Recent Trends In Modeling Of Moving Loads on Elastic Structures. Book of abstracts. Eskishehir, Turkey, 15-17 April, 2015, p.2

163. Alexeyeva L.A., Zakir'yanova G.K. Boundary Integral Equations for Hyperbolic System with Derivatives of Second Order. //I Turkish World Mathematics Symposium. 29 June-2July 1999, Elazig, Turkey. p. 105

164. Alexeyeva L.A., Zakir'yanova G.K. Discontinuous solutions of boundary value problems for hyperbolic systems //Труды Межд..конф. “Современное состояние и перспективы развития математики в рамках прогр. “Казахстан в третьем тысячелетии”, Алматы, 2001, с. 140-143

165. Alexeyeva L.A., Zakiryanova G.K. Dynamic analogues of Somigliana's formula for unsteady dynamics of elastic media with an arbitrary degree of anisotropy // J. Appl. Maths.& Mech. 1994. Vol.58. No2. PP. 367- 372;

166. Alexeyeva L.A., Zakir'yanova G.K. Generalized functions method for solving the nonstationary boundary value problems for strictly hyperbolic systems with second order derivatives // 10-th Int. ISAAC Congress. Programs & Abstracts.– Macau, 2015. – p.83

167. Alexeyeva L.A., Zakir'yanova G.K. Generalized solutions of boundary value problems of dynamics of anisotropic elastic media //5th European Solid Mechanics Conference (ESMC-5). August 17-22, 2003. Thessaloniki, Greece. P.16.

168. Alexeyeva L.A., Zakir'yanova G.K. Generalized Solutions of Boundary Value Problems of Dynamics of Anisotropic Elastic Media // Journal of the Mechanical Behavior of Materials, Vol. 16, Nos. 4-5, 2005, pp. 259-267

169. Alexeyeva L.A., Zakir'yanova G.K. Generalized Solutions of Initial–Boundary Value Problems for Second\_Order Hyperbolic Systems // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2011, Vol. 51, No. 7, pp. 1194–1207

170. Alexeyeva L.A., Zakir'yanova G.K. The Green Matrix for Strictly Hyperbolic Systems with Second-Order Derivatives //Differential Equations, Vol.37, No.4,2001, pp.517-523



171. Antosik P., Mikusin'ski J., Sikorski R., Theory of Distributions, Elsevier Scientific Publishing Co., PWN, Amsterdam — Warszawa, 1973; есть русский перевод: Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р., Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход, М., изд-во «Мир», 1976.

172. Avnessian V. Steady response of an axisymmetric body to obliquely incident seismic waves// Comput. Mech. 86: Theory and appl., Proc. Int. Conf., Tokyo, 1986, v.2, p. 61–66.

173. Beskos D.E. Boundary element method in dynamic analyses// Appl. mech. rev., 1987, v.40, n.1, p. 1–23.

174. Burridge R. The directions in which Rayleigh waves may be propagated on crystals// Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1970, v. 23, N 2, p. 217–224.

175. Cole D.M., Kosloff D.D., Minster J.B. A numerical boundary integral method for elastodynamics//Bull. Seism. Soc. Amer., 1978, 68, p. 1331–1357.

176. Cruse T.A., Rizzo F.J. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. 1// J. Math. Anal.Appl., 1968, v.22, n.1, p.244–259.

177. Daley P.F., Hron F SH– waves in layered transversely isotropic media – an asymptotic expansion approach// Bull. Seismol. Soc. Amer., 1979, v. 69, N 3, p. 689–711.

178. Daros C.H. and Antes H. Dynamic fundamental solutions for transversely isotropic piezoelectric materials of crystal class 6mm. // Int.J.Solids Structures, 37(11), p. 1639–1658

179. Greif R., Chou S. The propagation of radially symmetric stress waves in anisotropic nonhomogeneous elastic media// Trans. ASME, 1971, E38, n.1, p. 51–57.

180. Halperin I., Introduction to the Theory of Distributions, Toronto, 1952.

181. Halperin I., Introduction to the Theory of Distributions, Toronto, 1952.

182. Hormander I., Linear Partial Differential Operators, Springer– Verlag, Berlin — Gottingen — Heidelberg, 1964; есть русский перевод: Хёрмандер А., Ли-

нейные дифференциальные операторы с частными производными, изд-во «Мир», М., 1968.

183. Johnson William W. The propagation of Stonelay and Rayleigh waves in anisotropic elastic media.// Bull. Seismol. Soc. Amer., 1970, v. 60, n. 4, p. 1105–1122.

184. Kobayashi S. Some problems of the boundary integral equation method in elastodynamics// Boundary Elem. Proc. 5th Int. Conf., Hiroshima, 1983, p. 775–784.

185. Kobayashi S., Nishimura N. Green's functions solutions for semi-infinite transversely isotropic materials.// Int. J. Engineering Sci., 1979, v. 17, 545–551.

186. Lashat J.C., Watson J.O. Effective numerical treatment of boundary integral equations// Int. J. Num. Meth. Eng., 1976, v.10, p. 991–1005.

187. Manolis G.D., Beskos D.E. Dynamic stress concentration studies by boundary integral and Laplace transform// Int. J. Num. Meth. Eng., 1981, v.17, p. 573–599.

188. Martin Kogl A boundary Element Method for dynamic Analysis of anisotropic elastic, piezoelectric, and thermoelastic solids. Stuttgart. 2000;

189. Mengi S., Mc Niven H.D. Analysis of the transient exutation of a transversely isotropic rod. J. Acoust. Soc. Amer, 1971, v.50,n.1, Part 2, p.258–265.

190. Niwa Y., Kobayashi S., Azuma N. An analysis of transient stresses produced around cavities of arbitrary shape during the passage of travelling waves/ Memo. Faculty of Eng. Kyoto Univ., 1975, v.37, p. 28–46.

191. Pan Y.C., Chou T.V. Point force solution for infinite transversely isotropic solid.// J.Appl. Mech. Trans. ASME, 1976, v. 98(E), p. 608–612.

192. Pao Y.H., Mow C.C. Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentration. New-York, 1973, 694 p.

193. Payton R.G. Two-dimensional anisotropic elastic waves emanating from a point source.// Proc. Camb. Phil. Soc., 1971, v.70, p. 191–210.

194. Petrowsky I. On the diffusion of waves and the lacunas for hyperbolic equation. // Математ. сб., 1945, т. 17(59), вып. 3, с. 289–368.

195. Rizzo F.J., Shippy D.J. A method for stress determination in plane anisotropic bodies.// J. Composite Materials, 1970, v. 4, p. 36–61.
196. Schwartz I., Theorie des distributions, Vol. I—II. Hermann, Paris, 1950–1951.
197. Tomlin G.R. Numerical analysis of continuum problems of zoned anisotropic media./ Southamton Univ.,1972.
198. Vogel S.K., Rizzo F.J. An integral equation formulation of three dimensional anisotropic elastostatic boundary value problems.// J. Elasticity, 1973, v. 3, p. 203–216.
199. Zakir'yanova G.K. Generalized and fundamental solutions of M. Biot equations for moving loads // ISAAC 9-th Congress: abstracts. – Krakow, 2013. – pp. 227–228
200. Zakir'yanova G.K. Generalized functions methods in dynamics problems for piezoelectric medium // IV Congress of the TWMS Baku, Azerbaijan, 1-3 July, 2011. Abstracts, p.297
201. Zakir'yanova G.K. Generalized Solutions of Boundary Value Problems for Second Order Hyperbolic Systems // X Int. Conf. on Hyperbolic Problems: Theory, Numerics and Applications (Sept.2004 Osaka, Japan). Abstracts. 42-43pp.
202. Zakir'yanova G.K. Solution of motion equations for anisotropic elastic medium under action of concentrated sources // V Congress of the Turkic World Mathematicians, Kyrgyzstan, Issyk-Kul, 5-7 June, 2014. Abstracts. p.260
203. Zakir'yanova G.K. Dynamic analogues of Green and Gauss's formulas for unsteady dynamics of anisotropic elastic medium at antiplane deformation // ICAAM\_2016\_AIP
204. Zakir'yanova G.K. Fundamental solutions of hyperbolic system of second order for  $N = 2$ , and their graphical representations // 10-th Int. ISAAC Congress. Programs & Abstracts.– Macau, 2015. – p. 110

205. Zakir'yanova G.K. Fundamental solutions of second-order hyperbolic equations systems // Int. Conference on Generalized Functions. Book of Abstracts. Southampton, UK, 2014, p.56

206. Zakir'yanova G.K. Generalized Solutions of Boundary Value Problems for Second Order Hyperbolic Systems // Hyperbolic Problems: Theory, Numerics and Applications –II, Yokohama Publishers, 2006, pp. 409-416.

207. Zakir'yanova G.K. GF in non-stationary BVP for hyperbolic equations // The Abstract book of the conf. AMS 2015, 5-7 November, Antalya, Turkey. P.237

208. Zakir'yanova G.K. Integral equations of non-stationary dynamics for anisotropic half plane //1-ый Республиканский съезд по теоретической и прикладной механике, октябрь 1996, ч.2, с.212. Материалы

209. Zemanian A. H., Distribution Theory and Transform Analysis, McGraw–Hill, New York — Saint Louis — San Francisco —Toronto—London— Sydney, 1965.

210. Zemanian A. H., Distribution Theory and Transform Analysis, McGraw–Hill, New York — Saint Louis — San Francisco —Toronto—London— Sydney, 1965.