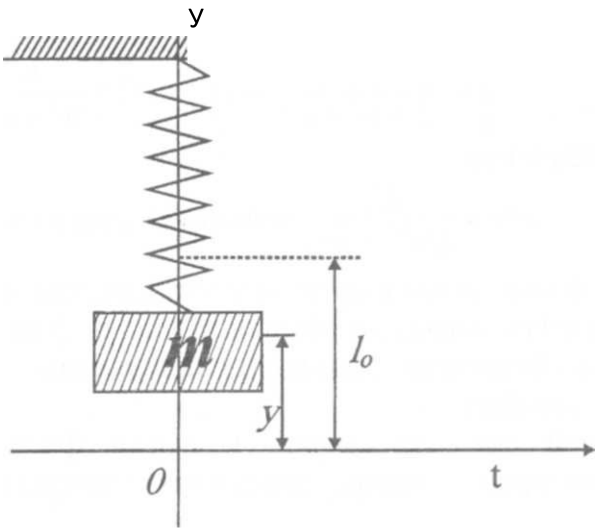
НАРМАТОВ Ж.
МАМЫТОВ А.

ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕЛЕРГЕ КЕЛТИРИЛҮҮЧҮ ФИЗИКАЛЫК МАСЕЛЕЛЕР

В настоящей работе рассматривается конкретный пример приводящий к дифференциальным уравнениям второго порядка. Приводится анализ решений.
The following work considers the concrete example leading to differential equation of second turn. The analysis of solving is given too.

Техникалык жана физикалык коптогон кубулуштарды окуп уйрөнүүдө биз толкундар, термелүүлөр жөнүндөгу түшүнүкко кездешебиз. Көпчүлүк учурда термелүү кубулуштары экинчи тартиптеги сызыктуу коэффициенттери турактуу болгон диференциалдык теңдемелер аркылуу туюндурулат. Жаратылышта термелүүлөр: механикалык, электромагниттик, электромеханикалык түрлөргө бөлүнөт. Төмөндө мүмкүн болушунча ушул маселелердин термелүү закондору экинчи тартиптеги диференциалдык теңдемелер аркылуу жазыла тургандыгына мисалдар карайбыз. Ошондой эле алынган теңдемелердин чыгарылыштарын табуу методуна токтолобуз.
Пружинага илинген массасы m ге барабар болгон жүк, вертикалдык түз сызыкка бекитилген. Эгерде жүктүү пружинаны чоюп же кыссак, анда жүк тең салмактуу абалынын айланасында термелет.



Каалаган убакыттагы жүктүн термелүү законун тапкыла.
Координат башталмасын тең салмактуу абал менен дал келгендей кылып жайгаштыралы. ОУоту вертикалдык түрдө тик жогору карай багытталсын. £а аркылуу чоюлган пружинанын акырынан жүктүн тең салмактуу абалга чейинки аралыгын белгилейли. У менен t убактысындагы жуктун ээлеген орду десек, анда жүккө уч куч таасир этет:
ылдамдыгыша
dy
(Я-
Жүккө тескери багытталган оордук кучу mg,
Жүккө тескери багытталган, анын
пропорционалдуу болгон чөйрөнүн каршылык күчү Я
dt
пропорционалдык коэффициенти);

3. Пружинанын серпилгич күчү: Гуктун закону боюнча серпилгич куч C(J0-Y) ге барабар, С - пропорционалдык коэффициент, пружинанын
массасы эске алынган эмес. Ньютондун экинчи закону боюнча жүктүн термелүү закону төмөндөгү теңдеме аркылуу аныкталат: салмагы серпилгич күчкө барабар болот

d2y m dy

(1)
= C(J0-Y)-mg-A
dt2 "vo dt
Тец салмактуу абалда (Y=0) болгондо, жүктүн салмагы серпилгич күчкө барабар, б. а. mg=ct0
Ошондуктан (1) теңдемесинен
m
(2)
m
O.

же
d2y -CY-Я dy
(3) dt
dt2 + A^ + CY
dt2 dt

Мына ошентип, (3) теңдеме пружинага илинген жүктүн эркин термелүүсүнүн математикалык моделин туюндурат. Математикалык жактан (3) теңдеме, коэффициенттери турактуу болгон экинчи тартиптеги сызыктуу диференциалдык теңдемени берет.
Эгерде жүккө ОУогу боюнча сырттан убакыттан коз каранды болгон мезгилдүү F(t) күчү таасир этсе, анда анын аргасыз термелүү законун алабыз. Дифференциалдык теңдеме төмөндөгү түрдө жазылат:
dt dt (4)
Математикада (4) теңдемеси коэффициенттери турактуу болгон экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектуу эмес теңдемени m ге мучолоп болуп жиберип жана белгилоо киргизип
2 C _ X ./ч F(t)
co1 =—; 2и-; f(t) = -^-:
mm т
d2y г. dy 2 г, n —f+2o- (5)
f+a>2y = f(t), dt dt

теңдемесин алабыз.
Ал эми сырттан таасир эткен куч /(0 = 0 жана чойронун карпгыльпы v = 0, болгон учурда биз эркин термелуу теңдемесин алабыз: ал
+ a>2y = f(t), (6)
dt2
Акырында сырттан таасир эткен куч f(t) = о, ал эми жок дегенде абанын каршылыгын эске алсак, б.а., о ф о болсо, анда теңдеме
£У+Ъ,& + Ф*у = 0 (7) dt dt
түрүндө жазылат.
Жогоруда биз бир гана физикалык мисалды карадык. Мындан башка коптогон маселелер, экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелерге келтирилет. Айталык физикалык жана математикалык маятниктердин термелиши, ар кандай тулкундардын таралыштары ж.у.с.
Эми биз экинчи тартиптеги коэффициенттери турактуу болгон сызыктуу бир тектуу жана бир тектуу эмес дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштарын табуу методуна токтололу.
Биринчи иретте бир тектуу экинчи теңдемени карайлы: ay' + Ьу' + CY = 0, (8)
же y" + py' + qy = 0. (9).
(9) теңдемесин чыгаруу учун Эйлердин методун пайдаланабыз. Анын мааниси төмөндөгүчө: теңдеменин чыгарылышын Y-e^ түрүндө издейбиз. Мында Я - белгисиз турактуу чоңдук. Аны табуу үчүн изделип жаткан функцияны (9) га коебуз, анда
Я2еь +рЛеЯх +qeAx =0^ ф0 ошондуктан, ага кыскартып жиберебиз
X2+pA + q = 0 (10) (10) чу тендеме (9) теңдемесинин мүнөздөөчү теңдемеси деп аталат. = - p±jp2-4q =-p±Jp
^•2 2 2
Математикадан белгилүү болгондой, үч учурду карайбыз:
1. D > 0. Бул учурда Л\ ф Л2 - чыныгы сандар, ошондуктан (9) теңдемесинин жалпы чыгарылышы:
y(x) = CieAx+C2ehx. (11)
2. ZN). Мында Л1=Л2= -■^ чыньпы сан, анда (9) теңдемесинин жалпы

чьпарылышы: y(x) = (Cx + C2x)e 2 . (12).

3. £)<0. Бул учурда (10) теңдемесинин тамырлары X^-a + iB; X2=a-iB түгөйлөш комплекстүү сандар.

Ошондуктан (9) теңдемесинин жалпы чыгарылышын төмөндөгүдөй жазсак болот:
y(x) = C/a+ф)x + C2e(a'тx (13)
Бул чыгарылыш компелкстуу чыгарылыш деп аталат, (13) тун оң жагын өзгөртүп түзөбүз, б.а.
y(x) = Cxет -eipx + C2e°* -e~ipx =eca(Cie'fix + C2e~i/k) (14) (14) формуланын оң жагына Эйлер дин формуласын колдонсок
e'P* - cos fix + sin fix,
e',px = cos fix - i sin fix, Анда
y(x) = e°* [C, (cos fix + i sin fix) + C2 (cos fix - i sin fix)] =
em [(C, + C2) cos fix + (C, - C2)/ sin- C2x] = г™ (C, cos Дx + C2 sin Дс)
y(x) = eax(C1 cos fix + C2 sin /?x), (15)

Мында C, =Q +C2; C2 = (Q -C2)/.
Эми жогорудагы (7) конкреттүү физикалык маселеден келип чыккан теңдеменин талкууланышын карайлы:
y"+2(uy'+w)2y = 0 (16)
Мүнөздөөчү теңдемеси
k2cpk + w2=0, (к = Я) (17)

1. /л + w. Анда кx --ju + ^Ju2-w2; к2 = u-^Jи2- w2 чыныгы, ар башка сандар жана алар терс мааниге ээ. (16) теңдеменин жалпы чыгарылышы: y(x) = C/-M+^)X + C2e(-"-^)x

Эгерде x ти убакыт деп карасак, анда жүктүн термелуусу ото коп убакыттын ичинде өзүнүн тец салмактуу абалына жакындайт, б.а., у —> 0 качан гана х -> 0 да. Бул учурдагы термелуу мезгилдуу эмес өчуучу термелуу деп аталат.
2. jx + w . к{=к2<0.
у(х) = efa(Cl+C2x)
Бул учурда дагы өчүүчү термелуүнү алабыз.
3. u + w. кх+/л + It]w2 -ju2; k2 - /л - i^w2 - и2 - комплекстүү.
Анда жалпы чыгарылыш:
у(х) = е_/а(Cj cos wx + С2 sin wx).
Бул учурда у-»0,х-»0, ju + w болгондо. Ошондуктан жук тец салмактуу абалынын аймагында эркин гармоникалык өчүүчү термелүүнү берет.
Эми биз коэффициенттери турактуу болгон дифференциалдык тецдеменин чыгарылыштарынын жардамы менен термелүүлорун изилдөөгө өтөбүз.
Эркин термелуу. Алынган (5) чи тецдемеде сырткы куч f(t)=0 жана чөйрөнүн каршылыгы u + w болсун. Анда (5) чи тецдеме төмөндөгү түргө келет:
^. + w2y = 0 (18) at
(18) теңдемеси эркин термелуүнун теңдемеси деп аталат. Анын мүнөздөөчү теңдемеси:
к2 + w2 = 0; кх = iw болуп жалпы чыгарылышы
у(х) = С, cos wx + С2 sin wx,
СХ,С2- каалагандай турактуу чоңдуктар. Мындан аркы талкуулоолордо СХ,С2-чоңдуктардын башкача түрдө аныктайлы:
Сх=Asin<p; C2coscp - деп алалы (А >0); лС2 +С\; tg(p = ^L. Андыктан
V Q
у = Asirupcoswx + Acosip ■ sinwx = Asin(wt + (p) (19)
(19) формула асылган жүктүн каалаган мезгилдеги тең салмактуу абалдын айланасындагы термелүүсүн берет. Ошондой эле жук тең салмактуу абалдын айланасында эркин гармоникалык термелууто ээ болот.
А - термелүүнүн амплитудасы, w- термелүүнүн жыштыгы, <p - баштапкы фазасы деп аталат.
Жалпы (19)чу чыгарылыштан болуп алуу учун кошумча баштапкы шартты беруу зарыл. Мисалга х =0 болгондо у(0) = у0; у'(0) = у'0 белгилуу болсун десек, анда
(20) системадан А жана ср чоцдуктарын w, у0, у[тер аркылуу туюндуруп (19)га ордуна коюп, изделген жекече чыгарылышты алабыз.
Аргасыз термелуу. Резонанс. Жөнөкөйлүк учун асылган жукко сырттан мезгилдүү f(t) = asmo)xx күчү таасир этип, ал эми чөйрөнүн күчтөрү таасир этпесин, б.а. и = 0.
Анда (5) теңдеме төмөндөгүдөй болот: d2y 2
—Y + 0) у = asma)xx (21)
dx
Алынган (21) теңдеме бир тектуу эмес экинчи тартиптеги дифференциалдык тецдемени берет. Мындай теңдеменин жалпы чыгарылышы, бир тектуу эмес (18) тецдемесинин айрым чыгарылышы >>тин суммасына барабар болот. Ошол айрым чыгарылышты табабыз.
Мында эки учурду карайбыз:
1. со ф (йх, башкача айтканда, сырттан таасир эткен күчтүн термелуу жыштыгы сота барабар эмес болсун дейли. Айрым чыгарылышты у = Acos a>xx +В sin ti)xx, (22)
түрүндө издейбиз. Мында А,В- белгилүү коэффициенттер. Белгисиздерди табуу үчүн (22)ни (21)ге коебуз:
- A co] cos coxx - Bcox2 sin coxx + co2 A cos coxx + co2B sin coxx = a sin coxx,
Acox2 +co2A = 0,A(o)2 -a>x2) = 0;A = 0
мындан - ,9 a
- Bco[+ co B = a,B(co - щ) = a;B = —
co -cox
ушинтип
у = -^——г- sin wx х (23) w -wx
Ал эми (21) дин жалпы чыгарылышы
у = sm{wx + <p)-\—г-^—7 sin wxx (24) w -wr
(24) чыгарылыштан көрүнүп тургантай у татаал термелүү кыймылын берет. Бул кыймыл термелүү жыштыктары барабар эмес эки термелүүнүн суммасьшан турат

(W Ф Wj).
Бул учурда термелүүнүн амплитудасы туректуу болот, эгерде w жана w\ -жыштыктары бири - бирине жакын болсо, жүк тең салмактуу абалынын айланасында термелет.
2. w = wx, башкача айтканда, сырткы мезгилдүү таасир эткен күчтүн термелуу жыштыгы эркин термелүүнүн жыштыгы менен барабар. Мында мүнөздөөчү теңдеменин тамыры iwx болот.
Ошондуктан айрым чыгарылышты y = t(Acoswxx + Bsmwxx), (25)
түрүндө издейбиз. Жогорудагыдай эле (25) ти (21) ге коюп, коэффициенттерди
табабыз: A = —, 5 = 0. 2w
Ошондуктан айрым чыгарылыш
~ ax
y --cos wx. (26)
2w
Ал эми жалпы чыгарылыш ax
y = A sm{wx + <p) cos wx. (27)
2w
Алынган (27) формуласы деле жогорудагыдай татаал термелүүнү берет.
Экинчи мүчөсү x тин катышкандыпы убакыт оскон сайын термелуу амплитедасы чексиз өсө тургандыпын туюндурат. Башкача айтканда, сырттан таасир эткен күчтүн амплитудасы Кичине болгонуна карабастан, бир нече убакыт өткөндөн кийин жук ото чоң амплитуда менен термеле баштайт. Мындай учурда термелүүчү системаны бузууга (талкаланууга) дуушар болот. Техникада мындай көрүнүштү резонанс деп атайбыз.
Жогорудагы каралган маселени механикалык термелүү деп атайбыз. Мындай термелүүлөр практикада автомобилдердин, вагондордун ж.у.с. рессорлорун жасоодо колдонулат.
Ушундай эле изилдөөлөрдү электрдик термелүүлөрдү, элктромагниттик термелүүлөрдү, үндүн таралуу термелуулөрүн окуп үйрөнүүдө жүргүзсөк болот. Ошондой изилдөөлөрдүн негизин дифференциалдык теңдемелер түзөт.
Биз мүмкүн болушунча физика адистигинде окутан студенттерге дифференциалдык теңдемелр курсу менен физика сабагынын ортосундагы байланышты чагылдырууга аракет жасадык. Эгерде ушул сыяктуу адистик менен байланышкан сабактарды отсек, студенттердин сабакка болгон кызыгуусу артат деп ойлойбуз. Практикалык сабакта ушул темага байланышкан мисалдарды чыгарып, биртектүү эмес теңдемелерди барабардыктын оң жагы ар кандай туюнтмаларды кабыл алганда, айрым чыгарылыштарды табуу эрежелерине көңүлдү көбүрөөк буруу талап кылынат.

Адабияттар
1. Иманалиев М.И., Байзаков А.Б., Кенебаева Г..М., Жураев М. Ж. Кадимки дифференциалдык теңдемелер жана алардын колдонулушу. - Бишкек, 2006.
Савельев И. В. Курс обшей физики - М.: Наука, 1987. Т. 1,2.
Шипачев В. С. Курс высшей математики. -М.: Изд-во МГУ, 1982. -Т. 2.