НАРМАТОВ Ж.
МАМЫТОВ А.

БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕЛЕРГЕ КЕЛТИРИЛҮҮЧҮ ФИЗИКАЛЫК МАСЕЛЕЛЕР

В настоящей статье рассматриваются физические задачи приводящиеся к дифференциальным уравнениям первого порядка. Приводится методы решения.
The following article physical puzzles leading to differential equation. The solving methods of differential equation are given too in this article too.
Университеттердин физика адистигинде окуган студенттер үчүн 2 курста 36 саат лекция жана практикалык 18 саат көлөмүндө дифференциалдык теңдемелер курсунан сабак өтүлөт. Ушул сааттар, биринчиден, аталган курс үчүн өтө аздык кылат. Экинчиден, кыргыз тилиндеги адабияттар жокко эсе. Ошондуктан курсту адистикке байланышкан маселелердин жардамы менен өтүү бир топ жандуу, ошондой эле кызыктуу болот деп эсептейбиз.Мына ушул себептен төмөндөгү физикалык маселелерди карайлы. Алынган формулаларды кээде коюлган физикалык маселелердин математикалык модели деп дагы аташат. Ошондой эле дифференциалдык теңдеменин аныктамасын макаланын аягында бергенди эп кордук.Маселе. Массасы т ге барабар болгон нерсе томен карай вертикалдык түшсүн дейли. Эгерде нерсеге таасир эткен сүрүлүүнүн илешкектик кучу, анын ылдамдыгына түз пропорционалдуу экендиги белгилүү болсо (Fc- -2v, 2>0 сүрүлүү коэффициента), ылдамдыктын убакыттан коз карандылык законун аныктагыла.Чыгаруу. v(t}- аркылуу убакыттын t мезгилиндеги ылдамдыгын белгилейли. Нерсеге бири- бирине багыты боюнча карама- каршы эки куч таасир этет. Биринчиси Fo~mg- оордук куч, экинчиси Fc сүрүлүү күчү.Каралып жаткан маселеге Ньютондун экинчи законун колдонсок, анда төмөндөгү формуланы алабыз.
т= mg-a v,
dv а мындан — =— v+g, dt т
алынган туюнтма дифференциалдык теңдеме болот.
1. Мисал. Баштапкы мезгилдеги температурасы Т(0)-То болгон нерсени, температурасы турактуу 7>ге барабар болгон чойрого жайгаштырылган. Убакыттын отушу менен нерсенин температурасынын озгоруу закону кандай болот?Чыгаруу- T(t)- аркылуу нерсенин t- убакытындагы температурасын белгилейли. Эксперименталдык жол менен нерсенин озунун температурасынын айырмасына пропорционалдуу боло тургандыгы далилденген, анда
^=-г[П0-т],at
у- пропорционалдык коэффициента, минус белгиси эксперименттин жүрүшүнөн коз каранды болот.
Эгерде T(t)-Tj>0 болсо, анда нерсенин температурасы томондойт, ал эми T(t)-T<0 болсо, анда нерсенин температурасы жогорулайт (көтөрүлөт).Жогорудагы эки мисалдан биз физиканын көптөгөн маселелери дифференциалдык теңдемелерге келээрин байкадыпс.Аныктама. Тендеме белгисиз функцияны, анын туундусун жана коз каранды эмес өзгөрмө чоңдукту кармаса, аны дифференциалдыпс теңдеме деп атайбыз.Биз эми дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыш жолдорун үйрөнгөнгө аракет жасайбыз. Математикада каралып жаткан маселелердин физикалык, химиялык жана башка касиеттерин көңүлгө албастан, алардын аналитикалык формада чыгарылыштарын табуу маселеси коюлат. Ошондой эле бир дифференциалдык теңдеменин жардамы менен турмуштагы ар кандай маселелерди чечууго болот.Ошондуктан биз дифференциалдык теңдемелерди чыгаруу эрежелерине токтолуп өтөлү. Жөнөкөй жолдордун бири дифференциалдык теңдеменин он жагы белгилуу коз каранды эмес чоңдукту гана кармаган функция болсун:
ах

барабардыктын эки жагын dx ке кобойтуп жиберебиз, анда
dy=f(x)dx мындан
y=\ f(x)dx+C,
келип чыгат, С- каалагандай турактуу чыныгы турактуу чоцдук. Эгерде дифференциалдык тецдеме чыгарылышына ээ болсо, анда анын чексиз коп чыгарылышы жашайт. Экинчиден, тецдеменин чыгарылышы көпчүлүк учурда интегралдоонун жардамы менен алынат. Ошондуктан дифференциалдык тецдемени чыгарууну кээде аны интегралдоо деп атайбыз.Жогорудагы жонокой учурда биз өзгөрүлмөлөрдү ажыратууга дуушар болдук. Өзгөрүлмө чоңдуктарды ажыратып алсак, анда ар бирине озунчо интегралдоо жолу менен дифференциалдык тецдеменин жалпы чыгарылышын табабыз.
1°. Өзгөрүлмө чоцдуктары ажыроочу тецдеме.
ax
- c
турундогу тецдеме өзгөрүлмө чоцдуктары ажыроочу тецдеме деп аталат. Эгерде g(y) ф 0 болсо, анда бул тецдеменин жалпы чыгарылышы
dy г dx
4{y) Jf(x) формуласы аркалуу табылат.
Мисал. x(l + y2)dx + y(\ + x2)dy = O, теңдемесин мүчөлөп x(1 + x2) • (1 + y2) туюнтмасына көбөйтүп
f— -f
, dx + , ay = 0
2 1 , „2
Акыркы барабардыкты интегралдап
-ln(l + x2) + -ln(l + y2) = -InC
2 2 2
Же (l + x2)(l + y2) = C
жалпЫ чыгарылышын алабыз.
Өзгөрүлмөлөрү ажыроочу теңдемеге
— = f(ax + by + c) теңдемеси ax + by + c = z өзгөртып түзүү жолу менен dx
келтирилет. Ошондой эле dy
, =f(x,y) dx
y
Теңдемеси f(x, y) = <p\ — түрүндөгү бир тектүү функция болсо, анда z = —
\X) X
өзгөрүлмө чоңдукту алмаштыруу аркылуу өзгөрүлмө чоңдуктары ажыроочу тецдемеге келтирилет.
Өзгөрулмө чоцдуктары ажыроочу тецдемелердин жалпы учуру катары биринчи тартиптеги сызыктуу тецдемелер деп кароого болот. 2°. Биринчи тартиптеги сызыктуу тецдемеден
^ + a(x)y = 0 ax
Теңдемесин айтабыз. Мында а(х),в(х)-функциялары Y = (а, в) областында аныкталган белгилүү функциялар. Эгерде в{х) - 0 болсо теңдеме бир тектүү, ал эми в(х) * 0 болсо бир тектүү эмес тецдеме деп аталат.
± + a(x)y = 0 ax
Теңдемеси өзгөрүлмөлөрү ажыроочу сызыктуу дифференциалдык тецдемени берет. Анын чыгарылышы
— = -a(x)dx, У
In y = - ja(x)dx + In C,
-\a(x)Jx
y = Ce '
Мында С- каалагандай турактуу чоңдук.
Ал эми в(х) Ф 0 болгон учурдагы бир тектуу эмес тецдемени үч жол менен чыгаргынча болот:
1. Турактуу чоңдукту вариациялоо методу. Бул методу Лагранждын методу деп атайбыз.

2. Бернуллинин методу же өзгөрүлмө чоцдуктарды алмаштыруу методу.
3. Эйлердин методу же интегралдык көбөйтүүчү.

Жогорудагы биринчи учурда бир тектуу эмес теңдеменин чыгарылышын.

y = C(x)e 1

Түрүндө издейбиз. Мында C(x) азырынча белгисиз функция. C(x) ти аныктоо үчүн акыркыны берилген тецдемеге ордуна коебуз. Анда

dc . . -ia(x)dx
— = в(x)e 1 dx

Ошондуктан

C(x) = C+\(x)Ja(x)dx Мындан

У- -j C + Je(x> dx
a(x)dx

Эгерде чыгарылыш (x0; x0) чекити аркылуу өтсө, анда жалпы чыгарылыштан

-ja(x)dx A ^a(x)dx
y0 + jdve

айрым чыгарылышын алыбыз.

Бернуллинин методун колдонгон учурда, берилген тецдеменин чыгарылышын.

y = U(x)-v(x) түрундө ездейбиз. Анда

dU TTdv . .TI . .
v + U— + a(x)Uv = v{x)
dx dx

барабардыгына келебиз. Мындан U (x) функциясы үчүн dU
+ a{x)U = 0
dx

бир тектүү тецдемесинин бир чыгарылышын алабыз. Мисалга

г г/ \ ~[a(x)dx
U(x)-e 3
= в(x)

Ошондуктан v(X) функциясын

-\a(x)dx dv
o J
Dx

тендемесинен табабыз, б. а.

у(ч) - C + Ja(x)dx, С-каалагандай туруктуу чоңдук. U(x), жана v(X) ти көбөйтүп y(x) ти табабыз y(x) = e ~ja(x)d C + Je(x> |a(x>& dx
x

Эйлердин методун колдонгондо берилген тецдеменин эки жагын мучолоп kg көбөйтүп, -\a(x)dx төмөндөгүнү алабыз.

d (\a (x)dx = в(x)e ^a(x)dx
— ye dx
V

Интегралдан жиберсек, — ye {x)dx (a(x)dx
dx V ye = в(x)e1 анда

ja(x)dx
\a(x)dx f
|a(д;)Л
C+ je(x>
ye1 -C+ \e(x)(Мындн
-f a{x)dx
y = e 1 =

келип чыгат.
Алынган жьшынтытардан көрүнгөндөй уч учурда тец бирдей жооп алдык. Эми ушул методдордун кайсынысын жакшы өздөштургөн болсок, ошол метод менен коюлган мисалдарды чыгарсак болот.
Омдук каршылыгы Rre жана оздук индукциясы L ге барабар болгон электр чынжырындагы ток кучу төмөндөгү дифференциалдык тецдемени канааттандырат.
L— + Ri = E dt
E - электр кыйылдаткыч күчү. Эгерде убакыттын t=0 мезгилде i(0)=0, E -синусоидалык закон боюнча өзгөргөн учурдагы ток күчүнүн убакыттан болгон коз карандылыгын тапкыла.
Чыгаруу. Биринчиден, каралып жаткан тендеме биринчи тартиптеги сызыктуу бир тектуу эмес дифференциалдык тендеме. Экинчиден, электр кыйсылдаткыч кучу синусоидалдык E = E0 sin Wt, E0 = const болсун, анда

di . E0 . R
— + cc1 = —-smwt; a = —
dt L a
Акыркы тецдемени Бернулинин методу менен чыгаралы, б.а., анын чьпарылышы i(t) = U(t)- v(t) көбөйтүндүсү түрүндө издейли. Анда тецдемеге койсок
du dv Eп .
—v + иh аи ■ v = — sin wt
dt dt L
(du ~dt dv En
+ au . + u—
J = —
smwt dt
L
■ + au — 0, En
v(t) - функциясын кашаанын ичиндеги туюнтма нөлгө айлангандай кылып тандап алабыз: du dt
dv _ ^0 dt L
Системанын биринчи тецдемесинен u(t) нын бир чыгарылышын алабыз:
и = е-"
Алынган ннун маанисин системанын экинчи тецдемесине коюп уяы табабыз.
at dv Er. . dv En a .
e — = —-sinwf, же— = —smwt
dt L dt L
Мындан
v(t) = ^ [eatsmwtdt = ^-J.
L J L
Y= {e"1 smwtdt-e"1 -—coswt + — \em coswtdt- = -—em coswt + -^reca sin wt-
J ww3 w w
-—[e"1 smwtdt.

Y = Y.
w
a!
at a • a
e cos wt h—- sm wt
w whl
2 2
w +a
e (-w cos wt + a sin wt)
v(0 = f w2 +a'
Эми /нин маанисин v(t)- га койсок
ем (-wcos wt + a sin wt)

+ c

C- каалагандай турактуу чоңдук.

Табылган u(t) жана v(t) ларды көбөйтүп изделүүчү ток күчү i(t)m>m. маанисин

f „at (j. , „_i A

+ c

алабыз:

e (-wco$et +asinwi)

w2+a

Бул алынган чыгарылыш чексиз көп болот. Ошондуктан маселен баштапкы У(19у^шартын пайдаланып С- ны табабыз:

0 = ^ (-w ^ , же C =

I ■ + c 2

\\v2+a2 J

2

w +a

Анда биз издеген закон
i(t) = г-5—— (-wcos wt + a sin wt + we~at.
L(w + cr)
Алынган закон баштапкы шарты канааттандырган жападан жалгыз болот. Эгерде баштапкы шартты өзгөртсөк, башка закондук формуланы алабыз.
Математикада баштапкы шартты пайдаланып, чыгарылган маселени Коши маселеси деп айтабыз. Мына ушундай эле жол менен коптогон физикалык, механика лык, техникалык маселелерди дифференциалдык теңдемелерге алып келип чыгарабыз.

Адабияттар

Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. -М.: Наука, 1979.
Тихонов А.И., Васильева А.Б., Свешников А.Г. -Дифференциальные уравнения. -М.: Наука, 1980.
Иманалиев М.И., Байзаков А.Б., Кененбаева Г.М., Жураев М.Ж. -Кадимки дифференциалдык теңдемелер жана алардын колдонулушу. -Бишкек, 2006.