УДК 517.929

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ж.К. Жээнтаева

Показано, что для систем линейных операторно-разностных уравнений можно наложить условия, обеспечивающие существование и асимптотические свойства «специальных» решений по аналогии с дифференциальными уравнениями с запаздыванием.

Ключевые слова: операторно-разностное уравнение; система уравнений; линейное уравнение; асимптотика.

ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS OF SYSTEMS OF LINEAR OPERATOR-DIFFERENCE EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS

Zh. K. Zheentaeva

It is shown that there can be imposed conditions on systems of linear operator-difference equations providing existence and asymptotic properties of "special" solutions by analogy with delay-differential equations.

Keywords: operator-difference equation; system of equations; linear equation; asymptotics.

1. Постановка проблемы. Решение начальной задачи для каких либо эволюционных уравнений в эвклидовых пространствах в наиболее общем виде можно записать в виде линейного непрерывного оператора

$$W(t,\varphi):Q_+\times\Phi\to R^k,$$

где Φ – некоторое линейное пространство начальных значений; Q_+ – неограниченное справа упорядоченное множество; k – натуральное число. Если $Q_+=\{0, 1, 2, 3,\ldots\}$, то получаем разностные уравнения.

Для случая, когда $Q_+= R_+:= [0,\infty)$, $W(t,\varphi(\times))$ – решение начальной задачи с начальным условием $\varphi\in\Phi: = C[-h,0]$ для линейного дифференциального уравнения с ограниченным запаздыванием аргумента, в ряде работ (см. обзор в [1], [2]) были найдены условия, когда существует такое конечномерное подпространство $\Phi_0\subset\Phi$, что

$$(\forall\varphi\in\Phi)(\exists\varphi_0\in\Phi_0)(\lim_{t\to\infty}\|W(t,\varphi)-W(t,\varphi_0)\|)=0, \quad (1)$$

то есть пространство решений «асимптотически конечномерно». Решения $W(t,\varphi_0)$ $(\varphi_0\in\Phi_0)$ были названы специальными.

В [3] был построен пример, показывающий, что специальные решения существуют не всегда. В [4] нами показано, что для поиска более широких условий, при которых выполняется (1), можно использовать численные эксперименты на компьютере.

В связи с этими результатами мы выдвинули гипотезу о том, что аналогичные результаты должны иметь место для более фундаментального типа эволюционных уравнений – разностных уравнений, и что результаты, полученные для них, могут улучшить известные для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. В [5] построены решения, «не обращающиеся в нуль». Здесь показано, что они могут использоваться, как специальные.

Еще отметим, что для решений линейных автономных эволюционных уравнений различных типов вопрос о структуре пространства решений сводится к исследованию соответствующих характеристических (алгебраических в широком смысле) уравнений. Поэтому мы рассматриваем существенно неавтономные уравнения.

Пусть Ω – некоторое нормированное пространство. Рассмотрим четыре последовательности операторов (первая – числа, вторая – «функционалы»): a_n: $R\to R$; b_n:$\Omega \to R$; c_n: $R\to\Omega$; d_n:$\Omega \to\Omega$, $n=0,1,2,\ldots$ с ограничениями $a_n\in A=[a_-,a_+]$; $||b_n||\le b>0$, $||c_n||\le c>0$, $||d_n||\le d>0$, и систему разностных уравнений в $R\times\Omega$:

$$x_{n+1}= a_n x_n + b_n y_n,$$
$$y_{n+1}= c_n x_n + d_n y_n, n=0,1,2,\ldots \tag{2}$$

Теорема 1. Если существует такое $\nu>0$, что

1) $q_-:= a_- - \nu b>0$; 2) $c+\nu d \le \nu q_-$,

то существует такое решение $\{X, Y\}$, что

$$(\forall n\in N)(X_n \ge q_-^{\,n};\ ||Y_n||\le \nu X_n). \tag{3}$$

Такие решения также будем называть специальными.

Доказательство. Положим $X_0 = 1$, $Y_0 = 0$, тогда (3) выполняется для $n=0$.

Имеем:

$$X_1= a_0 X_0 + b_0 Y_0 \ge a_- X_0 - b\,||Y_0||\ge a_- X_0 - b\nu X_0 = q_- X_0;$$
$$||Y_1||= ||c_0 X_0 + d_0 Y_0 || \le cX_0+ d\,||Y_0 || \le cX_0+ d\nu X_0 \le q_-\nu X_0 \le q_- X_1.$$

Далее доказательство проводится по индукции. Теорема доказана.

Теорема 2. Если 1) $d<a_-$; 2) $(a_- - d)^2 >4bc$, то выполняются условия 1), 2) Теоремы 1. Можно взять

$$\nu = \left((a_- - d) - \sqrt{(a_- - d)^2 - 4bc}\right)/(2b). \tag{3}$$

Доказательство. В силу условий 1) и 2) число ν определено и положительно. Проверим выполнение условия 1) Теоремы 1:

$$q_- = a_- - \nu b = \left(a_- + d + \sqrt{(a_- - d)^2 - 4bc}\right)/2 > 0. \tag{4}$$

Проверим выполнение условия 2) Теоремы 1: число (3) является решением уравнения $b\nu^2 - (a_- - d)\nu+c = 0$.

Преобразуем его к виду $d\nu+c = a_-\nu - b\nu^2$.

Отсюда получаем: $d\nu + c = q_-\nu$. Теорема доказана.

2. Разложение по специальным решениям

Теорема 3. Если $\omega:=(a_+ d + bc)\, q_-^{-2} <1$, то для любого решения $\{x, y\}$ и специального решения $\{X, Y\}$, определенного в Теореме 1, существует предел $\gamma\{x, y\}:=\lim_{n\to\infty} x_n/X_n$.

Доказательство. Имеем:

$$x_{n+1}/X_{n+1} - x_n/X_n =(x_{n+1}X_n - x_nX_{n+1})/(X_{n+1}X_n), \tag{5}$$

в первой скобке – определитель Казоратти (см. например [6]).

$$x_{n+1}X_n - x_nX_{n+1}= (a_n x_n + b_n y_n) X_n - x_n(a_n X_n + b_n Y_n)= b_n(X_n y_n - x_n Y_n),$$

в последней скобке – аналог определителя Вронского (см., например [7]).

Введем еще обозначение $\Delta_n := a_n d_n - b_n c_n$, тогда получим, используя формулу (17) из [7, с. 550]:

$$x_{n+1}X_n - x_nX_{n+1}= b_n(X_n y_n - x_n Y_n) = b_n\prod_{k=0}^{n-1}\Delta_k(X_0 y_0 - x_0 Y_0). \tag{6}$$

Имеем: $||\Delta_n||\le a_+ d + bc = \omega q_-^{\,2}$. Из (6) получаем:

$$|x_{n+1}X_n - x_nX_{n+1}|= |\, b_n(X_n y_n - x_n Y_n)|\le ||\, b_n||(\omega q_-^{\,2})^n||X_0y_0 - x_0Y_0||. \tag{7}$$

Используя (4), (6) и первую оценку (3), оцениваем:

$$|x_{n+1}/X_{n+1} - x_n/X_n|\le const\,(\omega q_-^{\,2})^n/(X_{n+1}X_n) \le const\,(\omega q_-^{\,2})^n/(q_-^{\,n+1} q_-^{\,n})= const_1\,\omega. \tag{8}$$

Теорема доказана.

Из (8) также следует

$$|\, x_n/X_n - \gamma\{x, y\}\,| \le |\, x_n/X_n - x_{n+1}/X_{n+1}\,|+|\, x_{n+1}/X_{n+1} - x_{n+2}/X_{n+2}\,|+|\, x_{n+2}/X_{n+2} - x_{n+3}/X_{n+3}\,|+$$
$$+\ldots\le const_1\omega^n+ const_1\omega^{n+1}+ const_1\omega^{n+2}+\ldots\le const_1\omega^n/(1-\omega)= const_2\omega^n. \tag{9}$$

Теорема 4. Если выполняются условия Теорем 2 и 3 и $\omega(a_+ + bv)<1,$ то для любого решения $\{x, y\}$ и специального решения $\{X, Y\}$, определенного в Теореме 1,

$$lim_{n\to\infty} |x_n - \gamma\{x, y\}X_n| = 0. \tag{10}$$

Доказательство. Имеем:

$$|x_n-\gamma\{x, y\}X_n| = |\ \gamma\{x, y\} - x_n / X_n|\ X_n \le const_2\omega^n X_n \le const_2\omega^n (a_+ X_{n-1} + bY_{n-1}) \le$$
$$\le const_2\omega^n (a_+ + bv)\ X_{n-1} \le \ldots \le const_2\omega^n (a_+ + bv)^n X_0 = const_2(\omega (a_+ + bv))^n X_0.$$

Теорема доказана.

3. Приложение к дифференциальным уравнениям с запаздыванием. Рассмотрим уравнение с постоянным запаздыванием

$$z'(t) = P(t)z(t-h),\ \ t \in R_+,\ h = const > 0, \tag{11}$$

где $P(t) \in [p_-, p_+]$. Представим пространство $C[-h,0]$ в виде декартова произведения пространства функций-констант и пространства Ω функций, таких, что $Z(0) = 0$. Обозначим:

$$Z_m(t) := W(t+mh, \varphi(\cdot)),\ -h \le t \le 0,\ m=1,2,3,\ldots \tag{12}$$

$$S_m Z(\cdot)(t) := Z(0) + \int_{-h}^{t} P(s+mh+h)Z(s)ds \tag{13}$$

– интегральные операторы сдвига по траекториям уравнения (11) на шаг h. Полагая $Z(t) \equiv 1$, оцениваем для (2):

$$[a_-, a_+] = 1 + h[p_-, p_+] = [1 + hp_-, 1 + hp_+];$$

$$b = max\left\{\left|\int_{-h}^{t} [p_-, p_+]ds\right| : -h \le t \le 0\right\} = max\{\ |\ p_-\ | h, |\ p_+\ | h\}.$$

Если $Z(0) = 0$, то для оператора сдвига в общем виде

$$SZ(\cdot)(t) = \int_{-h}^{t} P(s)Z(s)ds = \int_{-h}^{0} P(s)Z(s)ds + \int_{0}^{t} P(s)Z(s)ds.$$

Отсюда видно, что можно взять $c=b;\ d=b$.

Условия Теоремы 2 для существования специальных решений:

$$b < 1 + hp_-;\ (1 + hp_- - b)^2 - 4b^2 > 0.$$

Первое условие здесь является следствием второго. Получаем:

$$1 + hp_- > 3b. \tag{14}$$

Рассмотрим различные случаи:

I. $p_- \ge 0$ (уравнение неустойчивого типа). Тогда (14) принимает вид

$$1 + hp_- > 3\ hp_+ . \tag{15}$$

II. $p_- < 0 \le p_+$**.** Тогда получаем:

$$1 + hp_- > 3\ max\{-hp_-,\ hp_+\}. \tag{16}$$

В свою очередь, если $|\ p_-\ | \le\ p_+$, то опять получается условие (15), иначе (16) принимает вид $1 + hp_- > 3(-hp_-)$, откуда $4(-hp_-) < 1$, или

$$||P(t)||h < ¼. \tag{17}$$

III. $p_+ < 0.$ Тогда также получается оценка (17).

Таким образом, даже при очень грубых оценках построенная теория дает конкретные результаты.

Литература

1. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом / А.Д. Мышкис. М.: Наука, 1972. 351 с.
2. *Панков П.С.* Асимптотическая конечномерность пространства решений одного класса систем с запаздыванием / П.С. Панков // Дифференциальные уравнения. 1977. Том 13. № 4. С. 455–462.

3. *Панков П.С.* Пример линейного однородного дифференциального уравнения с запаздыванием, не имеющего конечномерного экспоненциально устойчивого при $t \to \infty$ пространства решений / П.С. Панков // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Фрунзе: Илим, 1977. С. 117–125.
4. *Жээнтаева Ж.К.* Алгоритмы для экспериментального исследования асимптотики решений линейных уравнений с запаздывающим аргументом и их использование / Ж.К. Жээнтаева // Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования: сб. ст. межд. конф. 15–18 декабря 2014 г. М.: РУДН, 2015. С. 219–223.
5. *Zheentaeva Zh*. Investigation of asymptotics of solutions of difference equations with variable coefficients / Zh. Zheentaeva // Abstracts of the Issyk-Kul International Mathematical Forum / ed. by Academician A. Borubaev. Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2015. P. 36.
6. *Ласунский А.В*. Разностные уравнения / А.В. Ласунский. Великий Новгород: Новгородский ГУ им. Ярослава Мудрого, 2011. 62 с.
7. *Иванов В.А*. Математические основы теории автоматического регулирования / В.А. Иванов, Б.К. Чемоданов, В.С. Медведев, А.С. Ющенко. М.: Высшая школа, 1971. 808 с.